

农业试验设计 与统计分析

NONGYIESHIIYAN
SHEJI
YU
TONGJIFENXI

主 编 王福亭
副主编 郭瑞林
郝国令



农村读物出版社

农业试验设计与统计分析

王福亭

主 编

郭瑞林

副主编

郝国令

农业出版社

一九九一年北京

(京)新登字169号

编 著 人 员:

王福亭	河南农业大学
郭瑞林	河南安阳农科所
郝国令	河南省种子管理总站
詹克慧	河南农业大学
霍晓妮	河南省作物品种审定委员会
杨剑波	河南省金属材料公司

农业试验设计与统计分析

主编 王福亭

责任编辑 钟国胜 肖岩

农村读物出版社 出版

化工部地勘公司印刷厂 印刷

各地新华书店 经销

787×1092毫米 1/16 45印张 1080千字

1993年6月第一版 1993年6月北京第一次印刷

印数: 1—10000册 定价: 21.00元

ISBN7-5048-1347-8/S·546

内容提要

本书系统地介绍了农业试验设计和统计分析的基本原理和方法。全书共分十六章。在对常用试验设计诸如单因素、多因素、拉丁方、裂区设计和多元线性、曲线回归分析等叙述的基础上,着重介绍了单个自由度、双重筛选逐步回归、联合回归、多元协方差、判别函数、趋势比较、稳定性分析、时空裂区、多点裂区、改良增广设计、平衡格子方设计、平衡不完全区组设计、混杂设计、回归正交设计、回归旋转设计、最优回归设计理论及应用等,是目前试验设计和统计分析方面论述较为全面的著述之一。其中涉及许多为国内外权威界人士公认的比较先进新颖的理论和方法。本书虽然理论较深,但密切联系实际,叙述清楚,深入浅出,通俗易懂,可以满足不同层次读者的要求,既可供高中以上文化程度的读者自学阅读,又可作为有关专业大学生、研究生、大学教师进一步深造的教材,对于农业科研单位的研究人员尤有重要的参考价值。

序

农业及生物学领域科学技术的进展有赖于大量的试验研究工作。这类研究涉及栽培植物与饲养动物本身、相应的自然、生态与培育条件以及人类的有关生产、科研活动等多种多样的因素。要想在这些种类繁多、变化万千的农业生物现象中探讨有关的规律并将其应用于农业生产，必须进行各种类型的研究探讨。每项研究结果均表现为不同类型的数据资料。这些数据表面看来杂乱无章，但其中蕴育着重要信息和规律。只有通过周密合理的试验设计才能取得包含准确可靠信息的数据，也只有通过正确细微的统计分析才能把数据中所隐含的信息和规律性充分地显示出来。

随着试验研究的广泛深入地开展，必然要求试验设计与分析方法相应多样化。近年来，生物统计学在原有经典理论与方法的基础上，衍生出不少适应新需要的设计与分析方法。遗憾的是，目前国内系统介绍这些统计方法的著作尚不多见。

福亭同志积多年从事生物统计教学与研究的经验，适应当前对于较高层次生物统计著作的急需，编著了“农业试验设计与统计分析”一书。书中荟萃了各种类型的试验设计与相应的统计分析方法。在某种程度上可以说这是一本中型实用生物统计方法大全。而且，此书原理与方法并重，深度与广度兼顾；侧重阐述各种高级试验设计与统计分析程序。不仅可用作有关专业的研究生和高级科技人员的教科书，而且也可作为大专院校师生及农业、生物学领域科技人员的参考书。毫无疑问，这本书的问世将有助于农业试验研究进一步地迅速发展。

范 濂

郭平仲

1990年12月于北京

前 言

谈到农业科学的发展,人们大概不会忘记生物统计的卓著功勋。因为现代农业科学研究的每一个新课题,从酝酿提出和试验设计到结果分析与决策实施,无一不渗透着缜密的数理思维、周详的科学论证和严谨的统计推理。面对世界技术革命的严峻挑战,数理统计、试验设计肩负历史使命,任重道远,以其独特的方式,愈来愈充分地显示出其不可估量的神奇魔力。也正因为如此,近年来,生物统计的百花园中,千姿婀娜,万态纷呈。莘莘学子,著名权威纷纷著书立说,尽情表述当代数理科学发展的极致。此中自然不乏上乘精品和传世名作。然而,就目前农业科技界的整体状况来看,绝大多数研究人员数学功底不深,因此,对抽象理论描述的统计佳作只能望洋兴叹,但随着农业科学研究水平的不断提高,又的确需要一整套高级试验设计和统计分析方法与之相匹配,于是,对优秀的普及性读物又感到难解疑端。由此可见,撰写一本既有一定理论深度又能为众多农业科研工作者乐于接受的统计新作势在必行。为此,我们在河南农业大学主办的全国农业院校助教进修班“生物统计”讲义、大学后教育“生物统计专题讲义”和研究生“高级生物统计”讲义试用多年的基础上,针对科研、教学和生产实践中提出来的一系列有关设计和统计问题,虚心听取各方面意见,并参考国内外一些有关专著,经多次加工、整理、修改、补充,撰写出版了这本书。

内容上,本书力求新颖独特,除扼要阐述常用试验设计和分析方法外,着重介绍了目前科技界反应比较敏感的新的理论和方法。譬如单个自由度、双重筛选逐步回归、联合回归、多元协方差、判别函数、趋势比较、稳定性分析、时空裂区、多点裂区、改良增广设计、平衡格子方设计、平衡不完全区组设计、混杂设计、回归正交设计、回归旋转设计、最优回归设计理论及应用等。因此,本书可以满足不同层次读者的要求。既可供高中以上程度的读者自学阅读,更可作为有关专业大学生、研究生和大学教师进一步深造的教材,对于农业科研单位的研究人员尤有重要的参考价值。

结构上,本书既注意了整体的系统完整性,又考虑到了各章节的独立性。章与章、节与节之间的编排尽量做到由简到繁,由浅入深、循序渐进。即使初学者,也可通过一定努力,基本掌握全书内容。

选材上,本书尽量从新,即努力选用最新的应用研究成果。书中例题大多是他人和我们在科研实践中的真实试验。因此,本书不仅是农业试验设计与统计分析原理和方法的生动再现,而且也是其应用成果的小规模博览,置身其中,读者可以尽情享受和领略农业科学发展的灿烂画面。相信本书的出版,既有助于解决农业科研工作者在数理统计方面的难题,也有助于启迪他们的研究思路。

如前所述,本书的撰写过程中,曾参阅了大量有关专著和文献。这些资料对于我们的确是弥足珍贵的,在参考文献中一并列出,并在此对作者们表示诚挚的谢意。

在本书出版过程中,曾得到北京农业大学方康云副教授的支持,值此表示谢意。

由于水平所限,本书难免舛误多端。恳请读者批评斧正,以俟日后修订。

王福亭

1990. 11 于河南农业大学

目 录

第一章	几种常用的单因素试验设计与方差分析	1
第一节	单因素完全随机设计与方差分析	1
第二节	完全随机区组设计与试验结果的分析	15
第三节	拉丁方试验设计与试验结果的分析	26
第二章	几种特定用途的单因素和多因素试验设计及其结果分析	34
第一节	对比法试验设计与方差分析	34
第二节	间比法试验设计与方差分析	39
第三节	双向随机区组设计及试验结果的分析	44
第四节	分组平衡区组设计及试验结果的分析	48
第五节	改良的增广设计及试验结果的分析	55
第六节	多重拉丁方设计及试验结果的分析	61
第七节	二因素随机区组设计常规分析及平均数线性分解	66
第八节	三因素随机区组设计常规分析及期望均方出现规律	82
第三章	几种常用试验设计试验结果的单个自由度比较分析	93
第一节	单个自由度比较法	93
第二节	完全随机试验结果的单个自由度比较分析	96
第三节	随机完全区组试验的单个自由度比较分析	98
第四节	拉丁方试验结果单个自由度比较分析	102
第五节	多因素随机区组试验结果的单个自由度比较分析	104
第四章	裂区试验设计常规分析及单个自由度比较分析	108
第一节	二因素空间裂区试验设计及其统计分析	108
第二节	三因素空间裂区试验设计及其统计分析	116
第三节	条区试验设计及其统计分析	125
第四节	时间裂区试验设计及其统计分析	132
第五节	时空裂区试验结果的统计分析	137
第五章	直线回归与相关	147
第一节	回归与相关的概念	147
第二节	直线回归方程的配合	147
第三节	直线回归模型和假设测验	150
第四节	回归方程的适合性测验	154
第五节	直线回归的预测推断和控制	158
第六节	加权回归	160
第七节	简单相关的计算方法	162
第八节	相关系数的假设测验和区间估计	163
第六章	曲线回归分析	166
第一节	曲线回归的线性化	166
第二节	对数函数曲线	167

第三节	指数函数曲线	171
第四节	幂函数曲线	179
第五节	对称 S 形曲线 (正态累积函数)	185
第六节	不对称 S 形曲线	188
第七节	logistic 生长曲线 $\hat{Y} = \frac{K}{1 + ae^{-bx}}$	192
第八节	多项式曲线	197
第九节	趋势比较	211
第七章	多元回归分析	221
第一节	多元线性回归方程的建立	221
第二节	多元线性回归的假设测验	235
第三节	逐步回归法——最优多元线性回归方程的统计选择法	240
第四节	通径分析	247
第五节	双重筛选逐步回归	258
第六节	多元正交线性回归	272
第七节	多元非线性回归和多元多项式方程	275
第八节	判别函数分析	283
第八章	协方差分析	296
第一节	协方差分析的概念及其用途	296
第二节	单向分组资料的协方差分析	298
第三节	双向分组资料的协方差分析	308
第四节	缺区估计的协方差分析法	316
第五节	多元协方差分析	323
第九章	多点试验结果的联合分析	331
第一节	一年多点随机区组试验结果的分析	331
第二节	多年多点随机区组试验结果的分析	343
第三节	稳定性分析	354
第四节	多点裂区试验结果的联合分析	365
第五节	多点随机区组试验的联合回归分析	374
第十章	混杂试验设计与统计分析	391
第一节	正交与混杂的概念	391
第二节	2^3 完全混杂设计及统计分析	392
第三节	2^3 部分混杂设计及统计分析	396
第四节	3^3 试验的混杂设计与统计分析	400
第五节	平衡不完全区组设计与统计分析	408
第六节	平衡格子方设计与统计分析	421
第十一章	一次回归正交设计	432
第一节	回归设计及其特点	432

第二节	一次回归正交设计	433
第三节	一次回归正交设计的应用	442
第四节	2^2 析因试验设计与分析	453
第五节	快速登高试验方案	456
第六节	一次回归正交试验设计的性质、优点及注意事项	462
第十二章	二次回归正交组合试验设计	463
第一节	二次回归正交组合设计	463
第二节	二次回归正交组合设计的统计分析	480
第三节	二次回归正交组合设计的应用	483
第四节	应用过程中的注意事项	488
第十三章	二次回归旋转设计	490
第一节	旋转性及其条件	490
第二节	二次旋转设计及其特点	500
第三节	二次旋转设计的统计分析	525
第四节	二次旋转设计的应用	529
第五节	应用过程中的注意事项	546
第十四章	正交区组与三次旋转设计	548
第一节	时间飘移与正交区组	548
第二节	二次旋转设计正交区组的统计分析	558
第三节	二次旋转正交区组设计的应用及注意事项	559
第四节	回归设计中采用的其它编码尺度	562
第五节	三次旋转设计	570
第十五章	回归最优设计理论	580
第一节	方案概念与回归模型的拓展	580
第二节	密集椭球体与 D-最优设计	583
第三节	D-最优设计与 G-最优设计的等价定理	592
第四节	D 最优方案的构造和检验	596
第十六章	回归最优设计分析及应用	619
第一节	饱和 D-最优设计	619
第二节	二次饱和 D-最优设计的统计分析	638
第三节	二次饱和 D-最优设计的应用	644
第四节	最优设计的优点及注意事项	654
附表		
表 1	正态分布的概率密度函数表	655
表 2	正态分布的累积函数表	656
表 3	t 分布的临界 t_{α} 值表	659
表 4	X^2 分布的临界 X^2_{α} 值表	660
表 5	F 分布的 $F_{0.05}$ (上) 和 $F_{0.01}$ (下) 值表 (右尾)	661
表 6	正态总体的容许系数 l 值表	671

表 7	Duncan' s 新复极差测验 $SSR_{0.05}$ 和 $SSR_{0.01}$ 值表	672
表 8	成数 P 的反正弦转换表 ($\theta = \text{Sin}^{-1}\sqrt{p}$)	674
表 9	r 与 R 的 0.05 和 0.01 临界值表	677
表 10	r 值与 Z 值转换表 [$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$]	678
表 11	百分率和概率单位 (P) 转换表	680
表 12	正交多项式系数 C_j 值表	684
表 13	等间隔数据配合至四次曲线与划分平方和用的系数、因数及 K 值	692
表 14	非等间隔处理某些选择集用的系数和因数	697
表 15	平衡不完全区组设计表 (阿拉伯数字表示处理, 横行表示区组, 罗马 数字表示重复)	698
主要参考文献 (按时间顺序排列)		709

第一章 单因素试验设计与方差分析

第一节 单因素完全随机设计与方差分析

一、完全随机试验的意义和优缺点

完全随机试验是将试验的 K 个处理完全随机的布置于 $N > nK$ 个试验单元上的试验。每一个处理要求至少重复 2 次（即有 2 个试验单元）。如果 $N = nK$ ，就称为是 n 次重复的完全随机试验。完全随机试验，每一处理重复数 n_i ($i = 1, 2, \dots, K$) 可相等，也可不相等。当不相等时， $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ，这称为重复不等的完全随机试验。完全随机试验只运用了环境设计的重复和随机原则，而没有运用局部控制。

完全随机设计的主要优点为：一是设计简便，单因素和多因素试验皆可用；二是每一处理的重复数可以相等，亦可不相等（这可使某些处理的精确度高一些，而另一些处理低一些）；三是分析简便，与其它试验设计相比，误差项的自由度可达到最大，因此可提高误差估计的精确性；四是在试验过程中遇到缺失数据，不必进行缺区估计。应用完全随机设计需要有一个前提，即试验的环境因素必须是相当均匀一致，其原因是本设计没有应用局部控制原则，试验环境的一切变异都将归入误差。如果环境因素有较大的差异性，就会增大试验误差。因此，这种设计一般仅用于环境变异较小的温室、实验室试验，它可能比其它设计更方便、有效。在田间试验中，很少应用，除非处理数少，而试验地又相当均匀。

完全随机排列设计的主要缺点是没有应用局部控制，不能将土壤肥力差异所造成的误差尽量减少。

二、完全随机设计试验结果的统计分析

完全随机设计试验结果的统计分析是一种单向分组资料的统计分析，需要进行多个平均数的假设测验。因此，对多个平均数的假设测验，需采用一种更合适的方法，即方差分析法。

方差又称均方，即标准差的平方，它是一个表示变异大小的量。任何一项调查或试验中，造成生物性状变异的因素往往是多种多样的。但是，这些因素有的是重要的，有的是次要的。方差分析就是将试验数据的总变异分解为来源于不同因素的变异估计量，从而评定出各个因素在总变异中所占相对重要性的一种统计方法。总变异中除去可控因素所引起的变异后，剩余变异可认为试验误差的准确无偏估计量，作为假设测验的依据。方差分析法的基本内容包括以下三部分：

（一）自由度与平方和的分解

方差(均方)是平方和除以自由度的商。要想将每一试验资料的总变异分解出各个变异来源的相应部分，首先将总自由度与平方和分解为各个变异来源的相应各个部分。因此，方差分析的第一步就是自由度和平方和的分解。

1. 自由度的分解。假设有一单因素完全随机试验, 有 K 个处理, 每个处理有 n 次重复, 则全试验共有 nK 个观测值。全试验的总自由度 $df_T = nK - 1$, 可分解为两部分, 即

$$\left. \begin{aligned} (nK - 1) &= (nK - 1) - K + K \\ (nK - 1) &= (K - 1) + (nK - K) \\ (nK - 1) &= (K - 1) + K(n - 1) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$df_T = df_t + df_e$$

总自由度 = 处理间自由度 + 试验误差自由度

为了说明这种可分解性现引入一个实例。

〔例 1·1〕设有 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 种生长素处理某小麦品种, 各种 4 盆, 采用完全随机试验, 每盆产量 (克) 列于表 1·1。

表 1.1 5 种生长素处理小麦的每盆产量(克)

处 理	X_{ij}				T_i	\bar{X}_i
A_1	79	83	81	73	316(T_1)	79(\bar{X}_1)
A_2	83	86	89	82	340(T_2)	85(\bar{X}_2)
A_3	80	78	79	75	312(T_3)	78(\bar{X}_3)
A_4	84	87	89	84	344(T_4)	86(\bar{X}_4)
A_5	81	85	81	81	328(T_5)	82(\bar{X}_5)
					1640(T)	82(\bar{X})

根据(1.1)式, 本例的各种自由度为:

$$df_t = nK - 1 = 4 \times 5 - 1 = 19$$

$$df_i = K - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$df_e = df_T - df_t = 19 - 4 = 15$$

2. 效应和平方和的分解。全试验的总变异也可分解为两部分。为说明问题, 先从样本的每一观测值 X_{ij} 的数字构成效应说起。每一观测值与全试验平均值的离差这个总效应由处理和误差两种效应部分组成。如果把表 1·1 中的 20 个观测值皆按照离差形式表示就得到以下数据效应结构表。该数据效应结构表是根据完全随机设计的数学模型算出的各种效应。其模型是:

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

式中 μ 为总体平均数; τ_i 为第 i 个处理的效应 ($i = 1, 2, \dots, t$); ε_{ij} 为第 i 个处理、第 j 个重复数据的随机效应 ($j = 1, 2, \dots, n$)。其相应的样本模型为:

$$X_{ij} = \bar{X} + t_i + e_{ij}$$

$$\tau_i = (\bar{X}_i - \bar{X}); \quad e_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_i)$$

其中 \bar{X} 为每个处理平均数; \bar{X} 为全试验所有观测值的平均数。

计算以上各种效应的平方和得:

$$\begin{aligned} \text{总变异平方和 } SS_T &= (-3)^2 + 1^2 + \dots + (-1)^2 = 330 \\ \text{总效应} = X_{ij} - \bar{X} & \quad \text{处理效应 } t_i = (\bar{X}_i - \bar{X}) \quad \text{误差效应 } e_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_i) \end{aligned}$$

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>-3</td><td>1</td><td>-1</td><td>-9</td></tr> <tr><td>B</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>0</td></tr> <tr><td>C</td><td>-2</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-7</td></tr> <tr><td>D</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>E</td><td>-1</td><td>3</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> </table>	A	-3	1	-1	-9	B	1	4	7	0	C	-2	-4	-3	-7	D	2	5	7	2	E	-1	3	-1	-1	=	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>-3</td><td>-3</td><td>-3</td><td>-3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td><td>-4</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	-3	-3	-3	-3	3	3	3	3	-4	-4	-4	-4	4	4	4	4	0	0	0	0	+	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>4</td><td>2</td><td>-6</td></tr> <tr><td>-2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>-3</td></tr> <tr><td>-2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>3</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> </table>	0	4	2	-6	-2	1	4	3	2	0	1	-3	-2	1	3	2	-1	3	-1	-1
A	-3	1	-1	-9																																																																	
B	1	4	7	0																																																																	
C	-2	-4	-3	-7																																																																	
D	2	5	7	2																																																																	
E	-1	3	-1	-1																																																																	
-3	-3	-3	-3																																																																		
3	3	3	3																																																																		
-4	-4	-4	-4																																																																		
4	4	4	4																																																																		
0	0	0	0																																																																		
0	4	2	-6																																																																		
-2	1	4	3																																																																		
2	0	1	-3																																																																		
-2	1	3	2																																																																		
-1	3	-1	-1																																																																		
$df_T = 19$		$df_t = 4$		$df_e = 15$																																																																	

$$\text{处理平方和 } SS_t = (-3)^2 + (-3)^2 + \dots + (0)^2 = 200$$

$$\text{误差平方和 } SS_e = (0)^2 + (4)^2 + \dots + (-1)^2 = 130$$

这里应当注意的是上述结果中， $SS_T = SS_t + SS_e$ 。这说明总变异的平方和已被分解为处理和误差两种来源的平方和。这种通过分解效应而分解变异的方法，是方差分析的基础。

上述过程对我们理解问题很有帮助，但书写起来太麻烦（尤其当变异来源多时）。所以，通常不应用这个过程，而是给出一组可根据观测值直接计算的公式。当然，这些公式也是根据这种分解效应的过程推导而来的。其公式为：

$$\left. \begin{aligned} \text{校正数 } C &= \frac{\mathbf{T}^2}{nK} \\ \text{总变异平方和 } SS_T &= \sum_1^k (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{nK} = \sum X^2 - C \\ \text{处理平方和 } SS_t &= n \sum (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = \frac{\sum T_i^2}{n} - C \\ \text{误差平方和 } SS_e &= \sum_1^k \sum_1^k (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = SS_T - SS_t \end{aligned} \right\} (1.2)$$

按照(1.2)式和表 1.1 中的数据，计算出各种效应平方和为：

$$C = 1640^2 / 4 \times 5 = 134480$$

$$SS_T = 79^2 + 83^2 + \dots + 81^2 - 134480 = 330$$

$$SS_t = (316^2 + 340^2 + \dots + 328^2) / 4 - 134480 = 200$$

$$SS_e = 330 - 200 = 130$$

根据(1.2)式计算的结果和前面的完全相同，但计算大为简化，所以在实际应用时都采用这一组计算公式。

(二) F 分布和 F 测验

1. F 测验的基本推理 多个样本测验是在 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu$ 下进行的，如果 H_0 成立，说明这 5 个处理效应没有本质差异，等于表 1.1 中的 5 个处理来自同一个总体。如果没有随机误差影响，这 20 个观测值应该一样大，现在的客观事实是有大有小，这是因为每个试验单元（在此是盆）上受到的误差大小不同，因此造成总效应中 20 个离差有大有小。如果 H_0 不成立，说明这 5 个处理效应之间有差异（至少也得有两个处理之间有差异），这说明总效应的变异不是单纯由误差引起，还有处理效应之间的差异所引起，换种说法，总效应的每个离差由两部分构成：一是处理效应；二是误差效应。

首先分析误差效应的变异。从误差效应表可看出，同一处理内（样本内）各个观测值上得到的误差效应也不完全相同，原因是它们都受到偶然性因素影响，影响的大小是随机变异。所以造成同一处理内各个观测值大小不同，这个变异属于随机变异。把这5个处理内的随机变异合起来就成为整个处理内变异，即误差（机误）。

其次分析一下处理间的变异。从表1·1可以看出，5个处理平均数之间是不同的，这说明处理间有变异。引起变异的原因有两个方面：一是每个处理的效应有变异。这一点从处理效应表可清楚看出，5个处理效应有大有小；二是各个处理所处的试验单元（或小区）的自然条件不尽相同，受到偶然因素影响的程度也不尽相同，由第二种原因产生的变异，其性质与处理内误差的性质完全相同，而且在一般情况下，经乘以n后，其大小也大致相似。

就本例来说，既然处理间的变异包括两部分，就可想到用方差来表示它们的大小。根据方差的定义，我们求得本例中处理间和误差的方差分别为：

$$\text{处理间方差} \quad S_t^2 = \frac{SS_t}{df_t} = \frac{200}{4} = 50.0000$$

$$\text{误差方差} \quad S_e^2 = \frac{SS_e}{df_e} = \frac{130}{15} = 8.6667$$

通过上述处理间的变异分析，我们已知处理间变异包括两部分，如果各个处理本质没有差异，那么处理间变异就应该与处理内变异大致相同。利用这种关系算出变异的比例为

$$\frac{\text{处理间变异}}{\text{处理内变异}} = \frac{S_t^2}{S_e^2} = F$$

从总体角度看这一比例，如果F大小与“1”相差不多（即处理间变异与误差变异相似），说明各个处理效应在本质上基本相同，即接受 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ ，说明处理间变异不显著。如果F比“1”大得多，超过了通常偶然性因素所能解释的范围，就否定 H_0 ，接受 H_A （即 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 中至少有两个不等这个备择假设），说明各个处理效应有本质差异（至少有两个差异显著）

本例是一个小样本，其

$$F = \frac{S_t^2}{S_e^2} = \frac{50.0000}{8.6667} = 5.77$$

并将上述测验结果列于表1·2。可以看出，这个F值（5·77）比“1”大的太多了，但是能否就可以拒绝 H_0 ，而接受 H_A 呢？现在还不能作肯定回答。原因是 $F = 5.77$ 的概率是多大还不清楚，更确切地说还不清楚这是一个小概率事件还是大概率事件。要作出肯定的回答，必须知其是小概率或大概率事件，为此必须借助于F分布。

2. F分布和F测验法 F测验的推理是从总体出发的，而实际做的试验只是从总体中抽出的样本，其F值大于“1”，不能把各处理的总体平均数都结论成确实有本质不同。其原因是F是一理论分布，它的分布形状受分子 S_t^2 的自由度 v_1 和分母 S_e^2 的自由度 v_2 大小所制约。 v_1 和 v_2 变了，F分布的曲线形状也随之而改变，不同形状分布曲线下的F值即使相等，它们出现的概率也不相同。为了弄清这一点，先从F分布讲起。

表 1.2 表 1.1 资料的方差分析

变异来源	df	SS	MS	F	显著水平	
					0.05	0.01
处 理	4	200	50.00	5.77**	3.06	4.89
误 差	15	130	8.67			
总 计	19	330				

假若在一个平均数为 μ 、方差为 σ^2 的正态总体中随机抽取两个独立样本,分别求出均方(方差) S_1^2 和 S_2^2 , 把 S_1^2/S_2^2 的比值定义为 F, 即

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad (1.3)$$

如果此 F 值具有 S_1^2 和 S_2^2 的自由度分别为 v_1 和 v_2 , 在这个特定的 v_1 和 v_2 下进行一系列连续抽样, 就会得到一系列的 F 值, 而且形成一个 F 分布。

图 1.1 的纵轴是代表 F 值的概率函数, 横轴是代表 F 值, 横轴上任一点所代表的 F 值出现的概率通过求概率密度 $[f(F)]$ 的公式(从略)即可算出。而分布的累积函数 $F(F_1)$ 为

$$F(F_1) = P_{\{F \leq F_1\}} = \int_0^{F_1} f(F) dF \quad (1.4)$$

因而 F 分布右尾从 F_1 到 ∞ 的概率为:

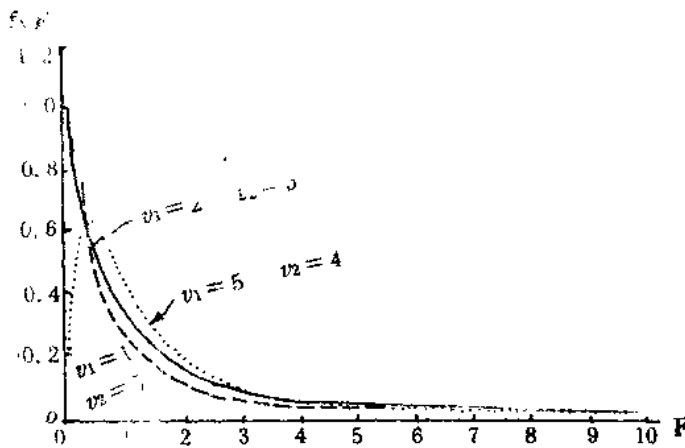


图 1.1 F 分布曲线(随 v_1 和 v_2 的不同而不同)

$$P_{\{F > F_1\}} = 1 - F(F_1) = \int_{F_1}^{+\infty} f(F) dF \quad (1.5)$$

例如, 当 $v_1=1$ 、 $v_2=2$ 时, F 分布严重倾斜成反向 J 型(曲线没有绘出), 概率为 5% 的临界 F 值(即 $F_{0.05}$) 为 18.51; 当 $v_1=2$ 、 $v_2=5$ 时, F 分布反向 J 倾斜就轻些, $F_{0.05}$ 为

5.79;当 $v_1=4$ 、 $v_2=10$ 时,就成为一种偏态分布, $F_{0.05}$ 为 3.48;当 $v_1=8$ 、 $v_2=20$ 时,偏态相对轻些, $F_{0.05}=2.45$ 。一般来说, $v_1>3$ 时, F 曲线就开始转向偏态.统计学家们把 v_1 和 v_2 的各种 F 分布下的 $P=0.05$ 和 $P=0.01$ 的临界值 $F_{0.05}$ 和 $F_{0.01}$ 已算出,并列成附表,专供 F 测验时查用。对于 F 测验仍和 t 测验一样简单,通过试验算出的 $F>F_{0.05}$ 或 $F_{0.01}$ (均由查附表 5 得出),我们就拒绝 H_0 ,接受 H_A , 否则接受 H_0 ,否定 H_A 。但注意的是求 F 值时应该将大的方差作为分子,小的方差作为分母。如果品种或处理的方差小于误差方差,则可不必进行测验。 F 和 t 值是不同的,前者是测验方差的相差,后者是测验平均数的相差,但在数学上这两个统计数是有关系的,即 F 是 t 的概括,在 $v_1=1$ 、 $v_2=n$ 时, $F=t^2$, 所以, F 表 $v_1=1$ 的一直行的 F 值可看为 5%与 1%的 t 的平方值,因此可以应用它测验平均数的差数。但须明确 t 表是两尾表, F 表却是一尾表。

有了 F 表,就可回答通过本例求出的 $F=5.77$ 是大概率还是小概率事件了。因为 $v_1=4$ 、 $v_2=15$,查附表,得 $F_{0.05}=3.06$, $F_{0.01}=4.89$,因为试验的 F 值 $5.77>4.89$ (即大于概率为 1%的临界 F 值),所以是小概率事件,拒绝 H_0 接受 H_A , F 测验结果说明 5 种生长素对小麦产量的效应间有极显著的差异。因此在方差分析表 1.2 中的 F 值右上角打上了两个星号,表示在 $\alpha=0.01$ 水平上显著。

上述方差分析的 F 测验,是一个整体测验。尽管 $F>F_{0.01}$ (处理间有极显著差异),这并不表明所有的处理平均数间哪些有显著差异? 哪些没有显著差异? 还需要进一步作多重比较。

(三)多重比较 多重比较就是通过对多个平均数进行互相比以确定它们的差异显著性。假若有 K 个平均数,如果是两两相互比,共有 $\frac{1}{2}K(K-1)$ 种比较;如果皆与一个平均数(对照)比较,需进行 $K-1$ 种比较。由于一个平均数要比较多次,所以称之为多重比较。多重比较的方法很多,现选其最常用的二种进行介绍。

1. 最小显著差数法 (LSD 法)。在农业试验中,多重比较的基本方法是学生氏最小显著差数法,亦称 LSD 法。这种方法必须在 F 测验显著的基础上才能应用,否则,在否定 H_0 时犯类似于 α 错误的概率会太高。

LSD 法是完全根据学生氏 t 分布,仅是两个平均数的简单推广,不过附加了方差分析时 F 测验必须显著这一前提条件。多重比较的步骤一般分为四步:

第一步,算出平均数差数标准误 $S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{2S_e^2}{n}} \quad (1.6)$$

式中 S_e^2 为误差方差, n 为重复次数。

第二步,计算显著水平为 α 的最小显著差数 LSD_{α} 。实际上 LSD 法是 t 测验法。对两个独立样本来说:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}$$

如果试验 $t>t_{0.05}$ 或 $t>t_{0.01}$,就可分别以 5%或 1%的概率水平拒绝 $H_0: \mu_1=\mu_2$, 而接受 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$, 可见

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} &\geq t_{0.05} \text{ 或 } \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq t_{0.05} S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \\ \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} &\geq t_{0.05} \text{ 或 } \bar{X}_1 - \bar{X}_3 \geq t_{0.05} S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_3} \\ &\vdots \\ \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_j}{S_{\bar{X}_i - \bar{X}_j}} &\geq t_{0.05} \text{ 或 } \bar{X}_i - \bar{X}_j \geq t_{0.05} S_{\bar{X}_i - \bar{X}_j} \\ &\vdots \end{aligned}$$

就可以在 5% 的概率水平上拒绝 H_0 而接受 H_A 。这里 $t_{0.05} S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ 提供出了测验两个样本平均数差异的 5% 概率水平的显著标准。这个标准称为最小显著差数 $LSD_{0.05}$ 。同理, $t_{0.01} S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ 称为最小显著差数 $LSD_{0.01}$ 。其通式为 (1.7)

$$LSD_x = t_x S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = t_x \sqrt{S_e^2 / n} \quad (1.7)$$

上式中的 t_x 是自由度为 v_e 、显著水平为 α 时的学生氏 t 值, 由附表 3 查出, 任何两个平均数的差数 $|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|$, 若大于或等于 LSD_x , 就承认在 α 水平上显著。

第三步, 对测验结果进行字母标记。在表示测验结果时, 可将各平均数从大到小 (或从小到大) 进行排列, 凡差数不显著的标记相同拉丁字母, 凡差数显著的标记不同的拉丁字母。

标记字母的方法是: 先在最大的平均数上标记字母 a, 然后将该平均数与以下各平均数相比, 凡差数小于 LSD_a 的均标 a, 直至某一差数大于 LSD_a 时, 则在差数显著的平均数后标记 b; 再将标 b 字母的平均数与它上方各平均数自下而上地进行比较, 凡差数不显著的一律标记 b; 再以标 b 的最大平均数为标准, 与以下各未标记的平均数相比, 凡不显著的继续标记 b, 下至某一差数显著时则标记 c; ……; 如此重复进行下去, 直至最后一个平均数标上字母为止。各平均数间凡标有相同字母的为差异不显著, 凡没标有相同字母的即表示差异显著。

在实际测验时往往需要区分是在 $\alpha = 0.05$ 或 $\alpha = 0.01$ 水平上显著。一般用小写字母表示在 $\alpha = 0.05$ 水平上显著, 大写字母表示在 $\alpha = 0.01$ 水平上显著。

第四步, 把比较结果列入多重比较内并对差异情况进行说明。

为了加深对 LSD 法的印象, 现引入一个实例。

[例 1·2] 对表 1·1 资料各处理平均数用 LSD 法进行多重比较。

由表 1.2 可知, F 测验结果为极显著, 其 $MS_e(S_e^2) = 8.67, df_e = 15, n = 4$ 。首先根据 (1.6) 式计算 $S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ 为:

$$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{2 \times 8.67}{4}} = 2.08 (\text{克})$$

其次按照 (1.7) 式算出 LSD_x 为:

$$LSD_{0.05} = 2.131 \times 2.08 = 4.4 (\text{克})$$

$$LSD_{0.01} = 2.947 \times 2.08 = 6.1 (\text{克})$$

第三, 对平均数由大到小进行多重比较并列于表 1.3。该表中任何两个平均数的差数绝