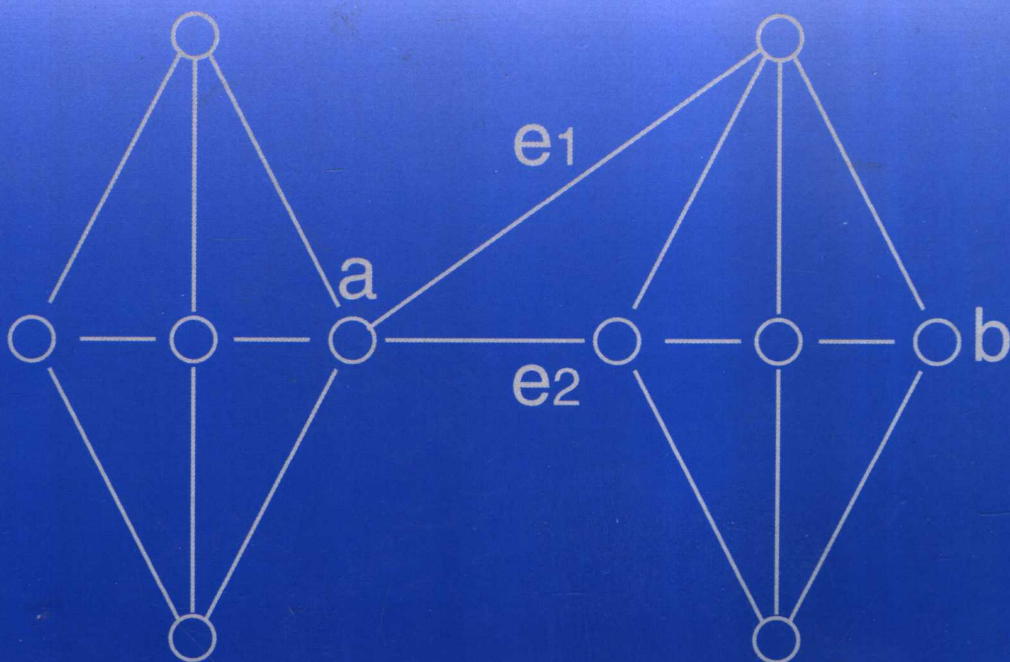
离散数学

（第2版）

于筑国 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

离散数学

（第2版）

于筑国　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

“离散数学”是计算机专业中的一门重要的专业基础课，它是以离散量、离散量的结构以及自然系统与形式系统之间的对应和转换为主要研究对象，它包含了人类在创造计算机，运用计算机以及发展研究计算机的过程中，所运用的各种数学方法和数学思想，以及与这些数学问题相关的基础知识。

本书主要介绍离散数学的基础知识，全书共分7章，包括：命题逻辑、一阶谓词逻辑、集合与二元关系、函数、代数系统、格代数、图论等，并含有相关的例题与习题。

本书适用于高等理工科院校的计算机科学、计算机工程技术与应用、信息安全专业的本科生，也适用于信息管理、通信工程、电子技术等专业的本科生。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/于筑国编著. —2版. —北京：国防工业出版社，2007.11

ISBN 978-7-118-05110-0

Ⅰ.离... Ⅱ.于... Ⅲ.离散数学 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第045141号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 23 **字数** 526千字

2007年11月第2版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 33.00元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前 言

人类在生产实践中，需要考虑的一个问题是：怎样使用工具去减轻劳动强度并加快生产的效率。为实现此理想，首先要根据劳动目的设想工具的结构和能力，接着要根据工具与劳动目的之间的对应关系去产生出方法，最后依据这些方法去设计和制造出这个工具。计算机是人类创造出的一种复杂而有效的工具，在它的诞生、应用和发展的过程中，数学始终是人类与机器之间的进行交互所必备的方法语言。当人类需要计算机去工作时，先要通过数学方法去转换成机器能接受的方法。这就是所谓的数学建模。为实现数学建模，“离散数学”已成为计算机科学与技术、电子信息技术、生物技术等领域里的一门重要专业基础课程。

“离散数学”包含了人类在创造计算机，运用计算机以及发展研究计算机的过程中，所使用的各种数学方法和数学思想，以及与这些数学问题相关的基础知识。学好“离散数学”不仅可以为学习计算机的后续课程奠定必需的入门基础，也为进一步参与计算机科学技术理论的研究和讨论或应用工作打下一个良好的数学基础。因此，“离散数学”已成为学习所有计算机课程之前所必须掌握的基础理论工具，也将它看成是加入计算机学科研究领域，特别是加入人工智能研究领域之前所必不可少的一门专业基础课程。

随着计算机学科研究往纵深发展、教育领域的拓展及各研究领域的互相渗透和交叉跨越，需要学习“离散数学”的人群在逐年扩大，特别是自学“离散数学”的人也越来越多。于是就有一种社会需求，就是如何能更好、更快、更容易地掌握住“离散数学”的基本内容和基本方法。这也是我们教学法研究的一个重要课题。根据多年来在大量的教学实践中所积累的经验，从学习者的角度，以自学者心理来编写这本《离散数学》，我们注重基础培养和基本素质培养，希望做到既能不失专业性抽象表述而又能达到拨云驱雾的目的，使学习者能得到专业性的指点，让学习者特别是自学者充满自信地走进考场或投入到科研工作中。

本书在每一小节前，都有一段具有启发作用的话，虽然有些是与专业无关的话，但是作者的目的是通过这些精心设计的话，逐步地引导读者进入抽象世界，得到抽象思维的训练。接触大量学习“离散数学”的学生，他们有的说：“离散数学”的内容虽然抽象，但还容易接受，只是习题太难做了。由于不会做习题以致给人的感觉就像没学懂一样。也有的说：内容太抽象，很难让人接受，更不要说做习题了。多年的教学实

践告诉我们，当人们在接受一种新的思维方式时，有一个思维方式的转变过程，这个转变需要足够的练习来实现，通过练习对课程中的定理、定义、方法等有所记忆以后，这才能具备解题的基本能力。所以本书配有一个练习册，除每小节后都配有少量的习题以外，另外对每个概念都配有练习，通过练习来加深对概念的记忆，掌握对定理定义的使用方法，以此来减小从学习内容到做习题之间有一个不容易逾越的困难。

本书吸收了许多“离散数学”教程的优点，在整体结构上、内容的叙述方法上都有自己的特色，使学习者在学习过程中能保持一定的连贯性。本书主要内容包括：命题逻辑、谓词逻辑、集合与计数、关系与函数、序数与基数、数论基础、群与环、格、图论。在叙述上既不失基础性，又不忽视专业性。本书可作为计算机或相关专业“离散数学”课程的教材及计算机专业师生的教学参考书，也可以作为自学“离散数学”的自学读本。

在此需要感谢刘欣等同学参与了此书的校稿和编辑工作，提出了许多合理建议并付出了辛苦劳动。由于作者水平有限，难免存在缺点和错误，希望广大读者和有识之士不吝赐教，给予指正。

编者

2007年7月

目 录

第一部分 数理逻辑

第二部分 集合论

第三部分 代数系统

第四部分 图 论

第一部分　数理逻辑

趣味导读　小说《哈利·波特》之所以畅销全世界，是因为作者在小说中创造了一个神奇的魔法世界，小说用神奇的故事展现了一种非同寻常的思维方式和价值观念。在那个魔法世界里，人们用魔法思想，用魔法交流，用魔法评价社会价值，用魔法解决一切问题。其实，计算机世界也是一个非同于人类世界的另类世界，在计算机世界里，计算机是通过将符号转换成物理量的方式来表现其非凡能力的，所以计算机必须跟随符号去思想，去表达，利用符号去解决问题。人类也必须用符号去与计算机交流，利用符号去驱动计算机来为人类服务。让符号来实现这一切的"魔法"便是"离散数学"。

第1章　命题逻辑演算系统

在这一章里，要学习一种用符号构建的形式语言系统，并要学会将自然语言无二义地转换成另一种更严谨的形式语言，这种符号表示的形式语言会更方便计算机去识别和处理有关逻辑推理的问题。这里的符号是指英文字母，联结词符号及括号。

1.1　命题逻辑演算系统的概念

本节导学　在命题逻辑演算系统中，命题是最基本的运算元素。就像算术四则运算的基本运算元素是自然数一样。在自然语言中，什么样的语句可以作为命题呢？它们又是怎样被表示成一种符号语言的呢？

1.1.1　命题

一、命题的概念

命题(statement)　具有确定的真值(真或假两者之一)，且能够用于判断的陈述句被称为命题。

【例1】　判断下列语句，哪些可以称之为命题，哪些不能。

(1) 我正在说谎；

(2) 满山的杜鹃花，散发着沁人的清香，鲜艳的红色，让人心旷神怡；

(3) $1+1=10$；

(4) 全体立正；

(5) 明天是否开大会;

(6) 音乐真美妙;

(7) 21 世纪末人类将移居火星。

解:(1)悖论是自相矛盾的陈述句,它没有确定的真值。如果(1)是真的,那么,我在说谎的同时没有说谎,所以矛盾,如果(1)是假的,那么,说明我没有说谎的同时确实在说谎。故又矛盾,不是命题。

(2)描述景物的陈述句常用于抒发感情,表现场景,不是用来判断其真假的,故不是命题。

(3)当条件不明确时,命题的真假也不明确。如果规定 $1+1=10$ 是在二进制数制下的表达式,那么,命题为真。而在十进制的数制下命题为假。所以在判断之前必须给出完整的条件。不是命题。

(4),(5),(6)一切不可判断或者无所谓是非的句子,如感叹句,疑问句,祈使句等都不是命题。

(7) 尽管 21 世纪末还未来临,我们对未来的事情处于一个未知状态,但(7)仍是一个可以判断出真假的陈述句,所以它是命题。

> **[提示]**人们不能给出命题的精确定义,只要是可以判断出真假的陈述句,而不在乎这个陈述句是真理还是谬论。

二、两种命题

原子命题(atomic statement) 当命题是不能再进行分解的陈述语句,则称其为原子命题。也称简单命题(simple statement)。

【例 2】 以下是原子命题。

(1) 我学习英语;

(2)《小李飞刀》是一部电视剧。

分子命题(molecular statement) 由一个或多个原子命题,至少有一个联结词以及必需的括号共同构成的命题,称作分子命题,也称复合命题(composite statement)。

【例 3】 以下是分子命题。

(1) 我学习英语,或者我学习日语;

(2) 亚马逊热带雨林不仅是一块美丽富饶的沃地,更是一个地球气候的调节器。

> **[提示]**原子命题与分子命题的概念类似于自然语言中简单句和复合句的概念。

三、命题的表示

在本书的"数理逻辑"部分约定使用以下符号来表示命题或公式:

(1) 用大写的英文字母 $P,Q,R,S,\cdots$ 或带下标的 $P_i,Q_i,R_i,S_i,\cdots$ 表示原子命题或命题变元;

(2) 用大写的英文字母 $A,B,C,D,\cdots$ 表示分子命题及命题公式。

命题符号 用于表示一个具体命题或抽象命题形式的符号称为命题符号或命题标识符。

[**提示**]在本书中常用(1),(2)所指的符号来表示原子命题,分子命题,命题变元,命题表达式及命题公式等。但不是只限于这些符号。在实际应用中,可以用任意符号表达任意需表达的命题符号。例如,可用中括号括起来的数字,如[6]可用于表示第6个命题。

【例4】 用命题标识符表示下列命题。

(1) P:大山的普通话很标准。

这里用 P 表示"大山的普通话很标准"这个具体的原子命题。

(2) [12]:第12个文件是文本文件,它被放在文件夹里。

这里用[12]表示"第12个文件是文本文件,它被放在文件夹里" 这个句子。

(3) 设 P_i 是其中第 i 个命题变元。

这里命题标识符 P_i 被说明为一个命题变元。

(4) 设 A,B 是两个命题公式。

命题标识符 A,B 被说明为两个抽象的命题公式。

[**总结**]以上的例子,给出了怎样对命题标识符加以说明的方法。在形式系统中,对命题标识符的解释应该没有二义性。也就是说,一个符号所表达的含义应该是唯一的。

四、命题的真值

命题真值(truth of statement) 将一命题的判断结果作为它的值,这个"值"被称为该命题的命题真值,简称真值。可将命题 A 的真值记为 $v(A)$。

对于{真,假},或{true,false},或{T,F},或{1,0},这4个集合中的任何一个都可以用来表示真值的取值范围。最常用的取值范围为{1,0}。其中用1表示真,用0表示假。

【例5】 给出下列命题的符号化表示,并给出它们的真值。

(1) 5月1日是国际劳动节;

(2) 如果妹妹生病了,那么我去看望她;

(3) 具有确定真值的陈述句是命题。

解:(1) 设 P:5月1日是国际劳动节。命题 P 的真值为真,记 $v(P)=1$。

(2) 设 P:妹妹生病了,Q:我去看望她。$P\to Q$:如果妹妹生病了,那么我去看望她。当命题 P,Q 为真命题时,$P\to Q$ 的真值为T,记 $v(P\to Q)=1$(其中"→"表示如果……,那么……)。

(3) 设 R:具有确定真值的陈述句是命题。R 命题的真值为1,记 $v(R)=1$。

[**提示**]真 = true = T = 1;假 = false = F = 0。但人们更喜欢使用1,0来表示真,假。

真值指派 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 n 个命题变元,如果对每个变元 $P_i(i=1,\cdots,n)$ 都指定一个确定的真值 $v(P_i)$,其中 $v(P_i)\in\{0,1\}$,那么,称 $(v(P_1),v(P_2),\cdots,v(P_n))$ 为

$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一种真值指派。可以表示为$(P_1, P_2, \cdots, P_n)/(v(P_1), v(P_2), \cdots, v(P_n))$。

例如:设有命题变量 P, Q, R 的一种真值指派(1,1,0),这组真值指派,将变量 P 指定为真,Q 指定为真,R 指定为假。记为$(P,Q,R)/(1,1,0)$。

1.1.2 联结词

为了用符号来表示比原子命题更为复杂的命题,需要利用联结词(connective)。

正如在自然语言的表达中,常用"如果","并且","虽然……但是"等联结词,将若干个简单句联结成一个复合句一样。所不同的是,在形式系统中联结词是用一些大家共同约定符号来表示的。

否定词¬(negative word) 联结词"¬"表示对受用命题的否定,读"非",把它视为一个一元逻辑运算。其真值表如表 1.1-1 所列。

表 1.1-1 否定词真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

设 P 为一命题符号,$\neg P$ 是对 P 的一个复合联结,称 P 的否定。若 P 为 true,则$\neg P$ 为 false;若 P 为 false,则$\neg P$ 为 true。

【例 6】 求出下列命题的否定命题。

(1) P:李农是一个种子研究者;

(2) Q:我否定了他的结论。

解:(1) $\neg P$:李农不是一个种子研究者。

(2) $\neg Q$:我没有否定他的结论。

[提示]而若用"我肯定了他的结论"去表示$\neg Q$ 则错。因为"我肯定了他的结论"不能与 Q 的真值相反。值得注意的是不能用反义词去表达否定命题。

析取词∨(disjunctive word) 联结词"∨"表示两个命题之间用"或"联结,汉语中的"排斥或"不能用"∨"表示。将析取词"∨"视为二元逻辑运算。

表 1.1-2 析取词真值表

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

设 P, Q 是两个命题符号,$P \vee Q$ 是 P 和 Q 的一个复合联结,称 P 析取 Q。

对 P, Q 而言它们的真值指派有 4 种,在 P, Q 的每种取值情况下 $P \vee Q$ 都有一个真值。其真值表如表 1.1-2 所列。

[提示]当且仅当 P, Q 同时为 0 时,$P \vee Q$ 的真值为 0。在其他情况下,$P \vee Q$ 的真值均为 1。

汉语中的"排斥或"是指"或"两端的事件不能同时发生,例如说,命题"今晚我在家看

电视或去剧场看戏”中的这个“或”就是一个“排斥或”。因为“在家看”和“去剧场看”的动作显然不可能同时发生,所以此“或”不能用“∨”表示。

【例 7】 将给定的复合命题符号化:他是 100m 或 400m 赛跑的冠军。

解:运动员跑 100m 和跑 400m 时,在时间和场地上不会有冲突,有可能都获得了冠军,所以是“可兼或”,可用“析取词∨”表示。

设 P:他是 100m 赛跑的冠军。Q:他是 400m 赛跑的冠军。

$P \vee Q$:他是 100m 或 400m 赛跑的冠军。

【例 8】 他昨天钓了 20 或 30 条鱼。

解:这个“或”表示近似数目,范围,不是两个命题之间的“或者”联结。所以不能用析取词“∨”表达。这是一个原子命题。

合取词∧(conjunctive word) 联结词“∧”用于表示两个命题之间“与”的联结,汉语中的“并且”,“同时”,“一边……一边”,“既……又”等都能用“∧”表示。将合取词“∧”视为二元逻辑运算。

设 P,Q 是两个命题符号,$P \wedge Q$ 是 P 与 Q 的一个复合联结,称 P 合取 Q。

其真值表如表 1.1-3 所列。

表 1.1-3 合取词的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

[提示]当且仅当 P,Q 同时为 1 时,$P \wedge Q$ 为 1。在其他情况下,$P \wedge Q$ 的真值都是 0。

【例 9】 将给定的复合命题符号化。

(1) 小李和小张同时获奖;

(2) 老曾在棋战中屡战屡败。

解:(1) P:小李获奖。Q:小张获奖。

$P \wedge Q$:小李和小张同时获奖。

(2) 老曾在棋战中屡战屡败。

不能将该命题翻译成 $P \wedge Q$。这是因为如果用 P 表示“老曾屡战”,Q 表示“老曾屡败”的话,当 P 与 Q 之间位置一交换,$P \wedge Q$ 与 $Q \wedge P$ 的含义是不同的。这样就不满足命题的无二义性了。同时也不满足∧的可交换性。

条件词→(conditional word) 联结词“→”用于表示两个命题之间“如果……那么”的联结,汉语中的“当……有……”,“如果……那么……”,“P 是 Q 充分条件”,“Q 是 P 的必要条件”等都能用“→”表示。将条件词“→”视为一个二元逻辑运算。

给定两个命题符号 P 和 Q,$P \to Q$ 是 P 与 Q 的一个复合联结,读作“若 P 则 Q”或“如果 P 那么 Q”。其真值表如表 1.1-4 所列。

表 1.1-4 $P \to Q$ 的真值表

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

我们称联结词→左边的 P 为前件(antecedent),联结词→右边的 Q 为后件(conseQuent)。$P \to Q$ 表示 P 是 Q 的

充分条件,用于表达“如果 P 那么 Q”。$Q \to P$ 表示 P 是 Q 的必要条件, 用于表达“Q 仅当 P”,“除非 P 才有 Q”,“除非 P 否则没有 Q”,“只要 Q 一定 P”,“只有 P 那么才有 Q”等等。

[**注意**]当且仅当 P 的真值为 1,Q 的真值为 0 时,$P \to Q$ 的真值为 0。其他情况下,$P \to Q$ 的真值均为 1。

【例 10】 将给定的复合命题符号化:少小不努力老大徒伤悲。

解:P:人在小的时候不去努力。Q:人在老的时候会空伤悲。

$\neg P \to Q$:少小不努力老大徒伤悲。

[**提示**]条件联结词与自然语言中的“如果……,那么……”是有所区别的,对条件命题 $P \to Q$ 来说,无论 P,Q 命题之间是否有逻辑关系,只要 P,Q 有确定真值,$P \to Q$ 即为命题。也就是说,不要求 P 与 Q 命题之间必须存在因果关系。

【例 11】 将给定的复合命题符号化, 并讨论其真值。

(1) 除非太阳从西边出来否则雪是白的。

(2) 只要你买了门票,就可进入参观大厅。

(3) 仅当小于 15 岁的孩子,才能参加少儿艺术团。

解:可以用以下方式来翻译,并根据原子命题的真值求出 $Q \to P$ 的真值。

(1) P:太阳从西边出来 (假) ,Q:雪是白的(真)。

$\neg Q \to P$:除非太阳从西边出来否则雪是白的(真)。

$\neg P \to Q$:如果太阳不从西边出来那么雪就一定是黑的(真)。

(2) Q:你买门票(假), P:你进入参观大厅 (真)。

$Q \to P$:只要你买了门票,就可进入参观大厅(真)。

(3) P:某人小于 15 岁 (假), Q :某人参加少儿艺术团 (真)。

$Q \to P$:仅当小于 15 岁的孩子,才能参加少儿艺术团(假)。

[**提示**]当前件为 0 时,不论后件是 0 还是 1, $P \to Q$ 真值总是 1。这种运算上的规定可用于表达了人类对未知世界的一种积极期待。当后件为 1 时,不论前件是 1 还是 0,$P \to Q$ 真值也总是 1。这种运算上的规定也可用于表达了人类对现实世界的一种肯定。

双条件词↔(bi-conditional word) 联结词“↔”用于表示两个命题之间“等值”的联结,汉语中的“当且仅当”,“P 是 Q 的充分必要条件”等命题都能用“↔”表示。将双条件词“↔”视为一个二元逻辑运算。

设 P 和 Q 为两个命题标识符号,$P \leftrightarrow Q$ 是 P 与 Q 的一种复合联结。读作“P 当且仅当 Q”。其真值表如表 1.1-5 所列。

表 1.1-5 $P \leftrightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1