Http://www.nwpup.com

FUDAO JIANGAN

精品课程 名师讲堂

●本讲内容聚焦 ●典型例题精选 ●课后作业 ●检测真题

高等数学

辅导讲案

主讲教材《高等数学》(同济·第四版)

符丽珍 刘克轩 主编

西北工業大學出版社

FUDAO JIANGAN

Http://www.nwpup.com

JINGPIN KECHENG MINGSHI JIANGTANG

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲案/符丽珍,刘克轩主编. 西安:西北工业大学出版社,2007.8

(精品课程·名师讲堂丛书)

ISBN 978-7-5612-2233-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①符…　②刘…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086023 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号　**邮编**:710072

电　　话:(029)88493844　88491757

网　　址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西丰源印务有限公司

开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张:19.375

字　　数:644 千字

版　　次:2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷

定　　价:26.00 元

前　　言

高等数学是变量数学，它是研究运动、无限过程、高维空间和多因素作用的科学。高等数学课程是理工科院校的一门非常重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者学好高等数学课程，满足读者学习和考研的需要，我们根据多年的教学经验编写了本书。

本书参考了同济大学编写的《高等数学》（第四版）的章节顺序，分为 12 讲，每讲均设计了 4 个板块。

1. 内容聚焦

一、内容要点精讲　列出了基本概念、重要定理和公式，突出考点的核心知识。

二、知识脉络图解　用框图形式列出，并指出各知识点间的有机联系。

三、重点、难点点击　突出重点，剖析难点，强调考点。

2. 典型例题精选

从历年本科生期末试题和全国硕士研究生入学试题中精选出典型题目，进行分析解答。

3. 课后作业

4. 主讲教材课后习题精选详解及检测真题

附录中对同济大学数学教研室编写的《高等数学》（第四版）的课后习题做了详细解答。因篇幅所限对超出教学基本要求标“*”号的内容，仅对欧拉方程一节的习题做了解答。每一讲编入了课后检测真题，并附有参考答案。

本书通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧。这对于提高读者分析问题的能力，理解基本概念和理论，开拓解题思路、全面增强数学素质，会起到良好的效果。

全书分为上、下两册。参加编写的有符丽珍、刘克轩、肖亚兰、王雪芳、杨月茜、陆全。由符丽珍、刘克轩统稿并担任主编。

由于编者水平有限，书中疏漏和不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2007 年 5 月

于西北工业大学

目　录

第1讲 函数与极限

本讲涵盖了主讲教材第1章的内容。

1.1 本讲内容聚焦

一、内容要点精讲

(一) 函数概念

1. 函数的几种特性

(1) 有界性：$|f(x)| \leqslant M, \forall x \in X \subset D$.

(2) 单调性：$x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) \leqq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D$.

(3) 奇偶性：$f(-x) = \pm f(x), \forall x, -x \in D$.

(4) 周期性：$f(x+L) = f(x), \forall x, x+L \in D$.

2. 基本初等函数，初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

(二) 数列极限

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 收敛数列的性质

(1) 若数列$\{x_n\}$收敛，则其极限必唯一．

(2) 若数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$一定有界．

(3) 若数列$\{x_n\}$收敛于a，则它的任一子数列也收敛于a.

3. 数列收敛性的判别定理

(1) 夹逼定理.

(2) 单调有界数列必有极限.

(三) 函数极限

1. 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 左极限、右极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A.$

3. 极限的局部保号性

(四) 无穷小与无穷大

1. 无穷小

(1) 定义:以零为极限的变量称做无穷小量.

(2) 无穷小的阶:设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小,且 $\alpha\neq0$,

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0 & \text{称}\,\beta\,\text{是比}\,\alpha\,\text{高阶的无穷小,记作}\,\beta=o(\alpha)\\ \infty & \text{称}\,\beta\,\text{是比}\,\alpha\,\text{低阶的无穷小}\\ c\neq0 & \text{称}\,\beta\,\text{与}\,\alpha\,\text{是同阶无穷小}\\ 1 & \text{称}\,\beta\,\text{与}\,\alpha\,\text{是等价无穷小,记作}\,\alpha\sim\beta\end{cases}$$

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0,k>0$,称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(3) 无穷小的运算性质:有限个无穷小的和仍为无穷小.有限个无穷小的乘积仍为无穷小.无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.求两个无穷小之比的极限时,分子及分母可用等价无穷小来代替.

2. 无穷大

绝对值无限增大的变量叫无穷大.无穷小(不取零值)的倒数为无穷大,反之无穷大的倒数为无穷小.

(五) 两个重要极限

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ (或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$).

（六）函数的连续性

1. 定义：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续．

初等函数在其定义区间内都是连续的．

2. 闭区间上连续函数的性质

① 有界性；② 最值定理；③ 介值定理；④ 零点存在定理．

3. 函数的间断点

(1) 第一类间断点：左、右极限都存在的间断点．有可去间断点及跳跃间断点．

(2) 第二类间断点：左、右极限不都存在的间断点．有无穷间断点及振荡间断点．

二、知识脉络图解

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义（定义域，对应规则）
    - 性质（有界性，单调性，奇偶性，周期性）
    - 复合函数（中间变量，复合函数的分解）
    - 反函数
    - 初等函数
    - 分段函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限
        - $\varepsilon - N$ 定义
        - 收敛数列的性质
      - 函数极限
        - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，$\varepsilon - X$ 定义
        - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\varepsilon - \delta$ 定义
    - 极限存在准则
      - 单调有界数列必有极限
      - 夹逼准则
    - 无穷小与无穷大
      - 定义
      - 性质
      - 阶的比较
    - 连续与间断
      - 定义
      - 间断点的分类
      - 闭区间连续函数的性质

三、重点、难点点击

本讲的重点内容是极限.既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件,又要能正确求出各种极限.求极限的方法很多,主要有:

(1) 利用极限的四则运算法则;

(2) 利用连续函数;

(3) 利用两个重要极限;

(4) 利用等价无穷小代换(常会使运算化简);

(5) 利用夹逼定理;

(6) 先证明数列的极限存在(通常用"单调有界数列必有极限"的准则),再利用关系式求出极限.

有时在一个题目中往往要用到多种方法.

由于函数的连续性是通过极限定义的,因而判断函数是否连续,判断函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限.这一部分也是重点.

函数部分,重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

本讲常见的题型有:

(1) 直接计算给定的极限或给定极限值反过来确定式子中的待定常数;

(2) 讨论函数的连续性,判断间断点的类型;

(3) 无穷小的比较;

(4) 讨论连续函数在给定区间的零点或方程在给定区间有无实根;

(5) 求分段函数的复合函数.

1.2 典型例题精选

【例 1-1】(1988 考研) 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解】 因为 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$, 故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 再由 $\ln(1-x)\geqslant 0$, 得 $1-x\geqslant 1$ 即 $x\leqslant 0$.

所以
$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\quad x\leqslant 0$$

【例 1-2】(1987 考研) $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是( ).

(A) 有界函数　　　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　　　(D) 偶函数

【解】 应选(D). 因 $f(x)=f(-x)$.

【例 1-3】(1987 考研)　函数 $f(x)=x\sin x$(　).

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大　　　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　　　(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限

【解】 应选(C).

【例 1-4】 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$　(2006 考研)

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$　(2004 考研)

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-2\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\ln(x^2+x)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

这是因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=0$,而 $\left|\sin\ln(x^2+x)^{\frac{1}{2}}\right|\leqslant 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}=$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}(x+\sin x)=0$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2}{n^3}\cdot\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\dfrac{a^2}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{x_2}{2}}=2$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(\frac{2+\cos x}{3})}-1}{x^3}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-1}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

【例 1-5】 设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{2}{2\times 3}+\frac{2}{3\times 4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\{1+2[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]\}=$$

$$\lim_{n\to\infty}[1+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})]=2$$

【例 1-6】(2000 考研) 求 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}]$.

【解】 因 $\lim\limits_{x\to 0^+}[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}]=\lim\limits_{x\to 0^+}[\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}]=1$

$$\lim_{x\to 0^-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim_{x\to 0^-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}]=2-1=1$$

故原式 $=1$.

【例 1-7】(1993 考研) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$.

【解法 1】 令 $x=\frac{1}{t}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{3+5t^2}{5+3t}\cdot\frac{\sin 2t}{t}=\frac{6}{5}$$

【解法 2】 因为当 $x\to\infty$ 时，$\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+10}{5x^2+3x}=\frac{6}{5}$$

【例 1-8】(1993 考研) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]=$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

【例 1-9】(1995 考研) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【解】 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+$

$$\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

因
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

由夹逼准则，从而原极限 $=\frac{1}{2}$.

【例 1-10】(1999 考研) 设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$$

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[a^1a^2\cdots a^n]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a$$

【例 1-11】(2000 考研) 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ( ).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

【解】 应选(D).因 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 不一定存在.

【例 1-12】 设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的( ).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 振荡间断点

【解】 应选(B).因 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,则

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{3}$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,且为跳跃间断点.

【例 1-13】(1990 考研) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=9$,求常数 a.

【解】 因为
$$9=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}$$

即 $e^{2a}=9$,从而 $a=\ln3$.

【例 1-14】(2002 考研) 设 $0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,并求此极限.

【解】 由 $0<x_1<3$ 知 x_1,$3-x_1$ 均为正数,故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}$$

设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1)$,则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leqslant \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2}$$

由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$ 均有 $0 < x_n \leqslant \frac{3}{2}$，因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $n>1$ 时，

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n =$$

$$\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n} - \sqrt{x_n}) = \frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}} \geqslant 0$$

因而有 $x_{n+1} \geqslant x_n(n>1)$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由单调有界数列必有极限知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，在 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，得

$$a = \sqrt{a(3-a)}$$

解之得 $a = \frac{3}{2}$，$a=0$（舍去）.

故
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$$

【例 1-15】(1998 考研)　求 $f(x) = (1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

【解】　$f(x)$ 的间断点为 $\tan(x-\frac{\pi}{4})=0$ 的点及 $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 不存在的点，故 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处，$f(\frac{\pi}{4}+0)=+\infty$；在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 处，$f(\frac{5\pi}{4}+0)=+\infty$. 故 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点（无穷间断点）.

在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi} f(x)=1$；在 $x=\frac{7\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi} f(x)=1$. 故 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 为第一类间断点（可去间断点）.

【例 1-16】　当 $x\to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A) 等于 2　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

【解】 应选(D).

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

【例 1-17】 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$,其中 a,b 是常数,则(　　).

(A) $a=1,b=1$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　　(D) $a=-1,b=-1$

【解】 应选(C).

由 $$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$$

得 $$\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}$$

即 $a=1,b=-1$,故(C)项正确.

【例 1-18】 设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)>a,f(b)<b$. 证明:在开区间(a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=\xi$.

证明 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $F(a)=f(a)-a>0,F(b)=f(b)-b<0$.

由闭区间上连续函数的零点存在定理,在开区间(a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

【例 1-19】 (2007 考研) 当 $x\to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

【解】 应选(C).

【例 1-20】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数,试确定 a,b.

【解】

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, & |x|<1\\ \frac{1}{x}, & |x|>1\\ \frac{1+a+b}{2}, & x=1\\ \frac{-1+a-b}{2}, & x=-1\end{cases}$$