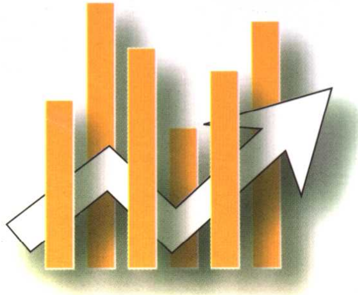

高职高专教材

经济应用数学基础

线性代数与线性规划

经慧芹 编

清华大学出版社

高职高专教材

经济应用数学基础

线性代数与线性规划

经慧芹 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是根据教育部制定的《高职高专教育线性代数与线性规划课程教学基本要求》编写的. 全书共分 6 章，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、线性规划问题、单纯形法等.

本书以矩阵为工具，以线性方程组为主线，用独特的方法讲解单纯形解法，通过大量的实例，强化了经济应用. 书中内容深入浅出，通俗易懂，突出重点，分散难点. 各章例题、习题都经过精心设计与编选，并注重解题方法的归纳和总结. 书末附有习题答案，便于检查学习效果.

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校经济类与管理类各专业线性代数与线性规划课程的教材，也可供经济领域工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与线性规划/经慧芹编. —北京：清华大学出版社，2007.5
（高职高专教材. 经济应用数学基础）
ISBN 978-7-302-15106-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. 经… Ⅲ. ①线性代数—高等学校：技术学校—教材 ②线性规划—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O151.2 O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 058814 号

责任编辑：刘 颖
责任校对：刘玉霞
责任印制：王秀菊

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京市昌平环球印刷厂
装 订 者：北京国马印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：9.75　**字　数**：201 千字
版　次：2007 年 5 月第 1 版　**印　次**：2007 年 5 月第 1 次印刷
印　数：1～5000
定　价：13.50 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换. 联系电话：010-62770177 转 3103　　产品编号：025954-01

FOREWORD 前言

本书是根据教育部有关本课程教学基本要求的规定，结合经管类专科（高职）院校、成人高校的实际情况编写而成的.

在本书的编写上，力求突出高职高专、成人教育的特色，注重适应性、实用性、针对性、通俗性.理论知识以必需、够用为度，尽量减少超出基本需求的理论证明或繁琐的运算论证，有的定理采取叙而不证，以举例说明为主，不求理论的全和深，而注重理论联系实际，解决涉及线性规划的实际问题.本书充分考虑学生实际水平，深入浅出，通俗易懂，高度重视例题、习题的选编，使它们与概念、理论、方法的讲述完全配套，其中除计算题与经济应用题外，还有考察基本概念与基本运算技能的标准化习题，书末附有习题答案.

本书图表部分由昆明理工大学柯建宏编写，全书文字部分由经慧芹编写并定稿.

本书在编写过程中，得到昆明理工大学成人教育学院的大力支持，昆明理工大学成人教育学院的叶春林、雷玉明、朱尚俊对本书的编写提出了许多宝贵意见，在此一并表示衷心感谢.

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，恳请读者和使用本教材的教师批评指正.

编　者

2007 年 3 月

CONTENTS 目录

第 1 章　行列式

线性代数是高等院校的一门重要基础课，也是初等代数的继续和发展. 而行列式是研究线性代数的重要工具，利用它可以给出某些 n 个未知量 n 个方程的线性方程组的解的公式，这在理论上是十分重要的. 本章介绍行列式的概念、基本性质，以及解线性方程组的克莱姆法则.

1.1 n 阶行列式的定义

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

其中 x_1, x_2 为未知量，$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数，b_1, b_2 为常数项. 用消元法解此线性方程组：第一个方程式两边乘以 a_{22}，第二个方程式两边乘以 a_{12}，然后相减；第二个方程式两边乘以 a_{11}，第一个方程式两边乘以 a_{21}，然后相减. 得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此线性方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了进一步揭示求解公式的规律，引进二阶行列式的概念.

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称它为二阶行列式，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为元素，这 4 个元素排成一个方块，横排称为行，竖排称为列，二

阶行列式共有两行两列.每个元素有两个下标,第一个下标指明这个元素所在行的行数,称为行标;第二个下标指明这个元素所在列的列数,称为列标.在二阶行列式中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线.

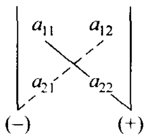

图 1-1

二阶行列式的计算可用对角线法则,即二阶行列式等于主对角线(实线)上两个元素的乘积减去次对角线(虚线)上两个元素的乘积,如图1-1.

例1 $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-6\times5=12-30=-18.$

例2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2-1\times(-1)=4-(-1)=5.$

例3 已知 $D=\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$,问 a 为何值时,使得 $D=0$.

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=(a-1)\times(-1)-1\times2=-a+1-2=-a-1.$$

令 $D=0$,得到 $a=-1$.所以 $a=-1$ 时,使得 $D=0$.

类似地,为了解由三个线性方程式构成的三元线性方程组,我们引进三阶行列式的概念.用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称它为三阶行列式,即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式共有9个元素,它们排成三行三列.三阶行列式表示的代数和,也可以用画线(图1-2)的方法记忆,其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项.

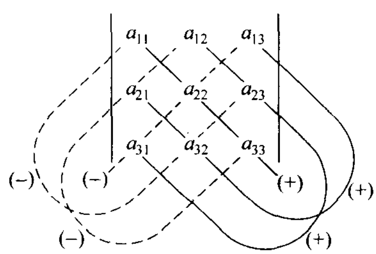

图 1-2

例 4 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0$

$-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1)$

$=-10-48=-58.$

例 5 已知行列式$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ k & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$,求 k 值.

解 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ k & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9k+1+k-3k+k-3=-10k-2.$$

从而$-10k-2=0$,所以 $k=-\dfrac{1}{5}$.

例 6 行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

解 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1.$$

若 $a^2-1>0$,当且仅当$|a|>1$. 所以行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是 $|a|>1$.

为了讨论 n 阶行列式,下面给出排列与逆序数的概念.

由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$,称为一个 n 级排列.

在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面,则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数,称为排列的逆序数,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$是奇数,则称为奇排列;如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$是偶数或零,则称为偶排列.

例如,在排列 23154 中,2 在 1 前面,3 在 1 前面,5 在 4 前面,共有 3 个逆序,即 $N(23154)=3$,所以 23154 为奇排列. 排列 $123\cdots n$ 的逆序数是零,是偶排列.

又如:由 1,2,3 这三个数字组成排列的逆序数及排列的奇偶性分别为:

$$N(1\ 2\ 3)=0,\text{偶排列};\qquad N(2\ 3\ 1)=2,\text{偶排列};$$
$$N(3\ 1\ 2)=2,\text{偶排列};\qquad N(3\ 2\ 1)=3,\text{奇排列};$$
$$N(2\ 1\ 3)=1,\text{奇排列};\qquad N(1\ 3\ 2)=1,\text{奇排列}.$$

考察二阶行列式，它是 $2!=2$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 2 个元素的乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 1 项，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按自然数顺序排列，此时，如果对应的列标构成的排列是偶排列，则这项前面取正号，是奇排列则取负号.

根据这个规律，可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它是 $n!$ 项的代数和，每项为取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和中的所有的项.

n 阶行列式有 n 行 n 列，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 可以证明：在 n 阶行列式中，前面取正号与取负号的项各占一半，即为 $\frac{n!}{2}$ 项.

行列式经常用大写字母 D 等表示，或记作 $|a_{ij}|$.

我们规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 7 已知四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

问：乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$；$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$；$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 是否为 D 中的项？若是，则前面应取什么符号？

解 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 行标排列为 1234，元素取自不同行；列标排列为 1234，元素取自不同

列. 所以 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为 D 中的项. 由于逆序数 $N(1234)=0$, 因而项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面应取正号.

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 1234, 元素取自不同行; 列标排列为 4312, 元素取自不同列. 所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 D 中的项. 由于逆序数 $N(4312)=5$, 即 4312 为奇排列, 因而项 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前面应取负号.

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 有两个元素取自第四列, 所以它不是 D 中的项.

定义 1.2 已知行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若将行列依次互换(第 1 行变成第 1 列, 第 2 行变成第 2 列, ……, 第 n 行变成第 n 列), 得到新的行列式, 则称这个新的行列式为行列式 D 的转置行列式, 记作

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 之间有什么关系呢? 考察三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \\ D^{\mathrm{T}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

容易看出, $D^{\mathrm{T}}=D$. 可以证明这个结论对于 n 阶行列式也是成立的.

定理 1.1 行列式 D 的值与转置行列式 D^{T} 的值相等, 即

$$D=D^{\mathrm{T}}.$$

此定理说明: 在行列式中, 行与列的地位是对等的. 即凡有关行的性质, 对于列必然成立; 凡有关列的性质, 对于行也必然成立.

定义 1.3 若行列式 D 主对角线以上或以下的元素全为零, 则称行列式 D 为三角形行列式.

例 8 计算 n 阶三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 该行列式为 n 阶行列式,它当然等于 $n!$ 项代数和,其中含有零因子的项一定等于零,可以不必考虑,所以只需考虑可能不为零的项.在这样的项中,必然有一个因子来自第一行,可供选择的元素只能是 a_{11};必然有一个因子来自第 2 行,有元素 a_{21},a_{22} 可供选择,但元素 a_{21} 与元素 a_{11} 同在第 1 列,不能乘在一起,从而只能是元素 a_{22}……;必然有一个因子来自第 n 行,有元素 a_{n1},a_{n2},…,a_{nn} 可供选择,但元素 a_{n1} 与元素 a_{11} 同在第 1 列,不能乘在一起,元素 a_{n2} 与元素 a_{22} 同在第 2 列,不能乘在一起……,从而只能是元素 a_{nn}.这说明可以不为零的项只有一项,它是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,由于列标排列逆序数 $N(123\cdots n)=0$,所以这一项应取正号.于是,三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式.

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特殊情况

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种行列式称为对角形行列式.

三角形行列式及对角形行列式的值,都等于主对角线上元素的乘积.这一结论在以后行列式计算中可直接应用.

由行列式的定义易得:一个行列式若有一行(或一列)的元素全为零,则此行列式的值

必为零.

例 9 四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\1&-3&0&0\\9&-6&4&0\\1&8&6&2\end{vmatrix}=2\times(-3)\times4\times2=-48.$$

例 10 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)(-1)\cdots(-1)=(-1)^n.$$

1.2 行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式,在一般情况下是较繁琐的,下面我们给出行列式的一些性质,以简化行列式的计算.

考虑三阶行列式

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

若将第 1 行与第 2 行交换,得到行列式

$$\begin{aligned}D_1&=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{21}a_{32}\\&=-D.\end{aligned}$$

若将第 1 行乘以数 k,得到行列式

$$\begin{aligned}D_2&=\begin{vmatrix}ka_{11}&ka_{12}&ka_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=ka_{11}a_{22}a_{33}+ka_{12}a_{23}a_{31}+ka_{13}a_{21}a_{32}-ka_{13}a_{22}a_{31}-ka_{12}a_{21}a_{33}-ka_{11}a_{23}a_{32}\\&=kD.\end{aligned}$$

若将第1行的 k 倍加到第2行上去，得到行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=a_{11}(a_{22}+ka_{12})a_{33}+a_{12}(a_{23}+ka_{13})a_{31}+a_{13}(a_{21}+ka_{11})a_{32}\\&\quad-a_{13}(a_{22}+ka_{12})a_{31}-a_{12}(a_{21}+ka_{11})a_{33}-a_{11}(a_{23}+ka_{13})a_{32}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&=D.\end{aligned}$$

可以证明，从上面观察得到的结论对于 n 阶行列式在一般情况下也是成立的，于是得到行列式的下列性质：

性质1 交换行列式的任意两行(列)，行列式变号；

性质2 行列式的任意一行(列)的公因子可以提到行列式外面；

性质3 用常数 k 乘行列式某一行(列)的各元素，然后再加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

推论 若行列式满足下列两个条件之一，则该行列式的值为零.

(1) 行列式有两行(列)对应元素相同；

(2) 行列式有两行(列)对应元素成比例.

例1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-3)\times5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-3)\times5\times1=30.$$

例2 已知 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=4$，求 $\begin{vmatrix} a_1+2a_2 & a_2+a_3 & a_3 \\ b_1+2b_2 & b_2+b_3 & b_3 \\ c_1+2c_2 & c_2+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} a_1+2a_2 & a_2+a_3 & a_3 \\ b_1+2b_2 & b_2+b_3 & b_3 \\ c_1+2c_2 & c_2+c_3 & c_3 \end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第 2 列上}]{\text{第 3 列乘以}-1}\begin{vmatrix} a_1+2a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+2b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+2c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到第 1 列上}]{\text{第 2 列乘以}-2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=4.$$

例 3 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

解 将第 1 行与第 3 行交换,则得

$$D=-\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-36.$$

例 4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

解 第 1 行乘以 -1 加到其他各行,得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第 2 行乘以}-3\text{加到第 4 行上}]{\text{第 2 行乘以}-2\text{加到第 3 行上,}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到第 4 行上}]{\text{第 3 行乘以}-3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

例 5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 第 1 行与第 2 行交换,则得

$$D=-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第1行乘以-2加到第4行上}]{\text{第1行乘以1加到第3行上,}}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&1&-1&2\\0&3&1&-4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第2行乘以3加到第4行上}]{\text{第2行乘以1加到第3行上,}}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&-2&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第3行乘以-1加到第4行上}}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

例6 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

解 $$D\xlongequal[\text{第1行乘以-4加到第4行上}]{\text{第1行乘以-2加到第2行上,第1行乘以-3加到第3行上,}}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&-2&-8&-10\\0&-7&-10&-13\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第2行乘以-7加到第4行上}]{\text{第2行乘以-2加到第3行上,}}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&0&-4&4\\0&0&4&36\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第3行乘以1加到第4行上}}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&0&-4&4\\0&0&0&40\end{vmatrix}=160.$$

例 7 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解 在该行列式中,元素构成的规律是:主对角线上元素全为 x,其余元素全为 y,因而每列的 n 个元素由 1 个 x 与 $n-1$ 个 y 构成,其和皆为 $x+(n-1)y$. 于是

$$\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{都加到第 1 行上}]{\text{第 2 行至第 } n \text{ 行}} \begin{vmatrix} x+(n-1)y & x+(n-1)y & \cdots & x+(n-1)y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{提到行列式外面}]{\text{将第 1 行的公因子 } x+(n-1)y} [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到第 2 行至第 } n \text{ 行上}]{\text{第 1 行乘以 } -y \text{ 分别}} [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$$

例 8 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$.

解 $$D_n \xlongequal[\text{加到第 2 行至第 } n \text{ 行上}]{\text{第 1 行乘以 } -1 \text{ 分别}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)].$$

计算 n 阶行列式,关键在于弄清楚元素的构成规律.