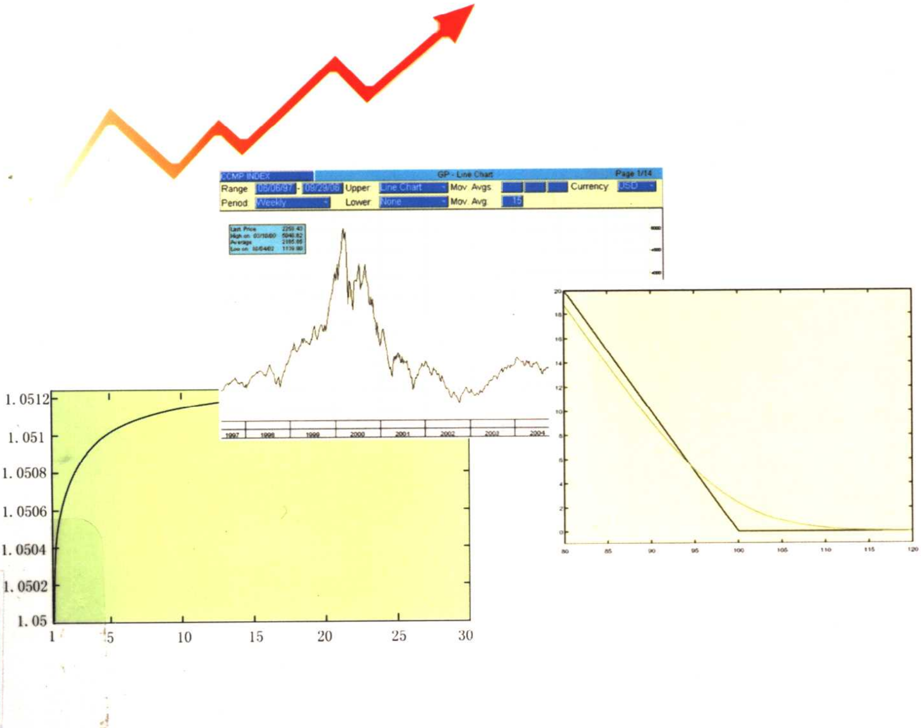
孙 健/著

金融衍生品定价模型

——数理金融引论



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

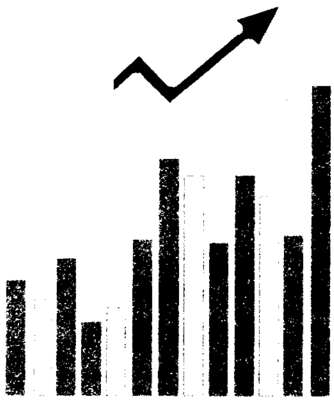
金融衍生品定价模型

——数理金融引论

金融衍生品定价模型

——数理金融引论

孙 健/著



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

北 京

图书在版编目（CIP）数据

金融衍生品定价模型：数理金融引论/孙健著．—北京：中国经济出版社，2007.2

ISBN 978－7－5017－7806－5

Ⅰ．金…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．金融市场－研究　Ⅳ．F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 009067 号

出版发行：中国经济出版社（100037·北京市西城区百万庄北街 3 号）
网　　址：www.economyph.com
组稿编辑：刘一玲（电话：010－68359417）
责任编辑：霍宏涛
责任印制：张江虹
封面设计：巢新强
经　　销：各地新华书店
承　　印：北京东光印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　**印　张**：27　　**字　数**：470 千字
版　　次：2007 年 2 月第 1 版　　**印　次**：2007 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1－3000 册
书　　号：ISBN 978－7－5017－7806－5/F·6811　　**定　价**：58.00 元

JINRONG YANSHENGPIN DINGJIA MOXING

SHULI JINRONG YINLUN

金融衍生品定价模型

——数理金融引论

组稿编辑：刘一玲
责任编辑：霍宏涛
封面设计：巢新强

金融衍生品定价模型
——数理金融引论

JINRONG YANSHENGPIN DINGJIA MOXING
SHULI JINRONG YINLUN

前　言

我们先从一个故事讲起吧。在从芝加哥大学拿到博士学位的两个月前，我开始在金融行业中找工作。我已经完成了博士论文，然而，要找到一份工作并不容易。放弃了在大学里当教授的想法后，我花了一个月的时间去读 John Hull 的那本书："Futures，Options and Other Derivatives"(《期货，期权和其他衍生产品》)。帮我找工作的猎头打电话，说纽约有一家公司想尽快见我。那时候，我曾在三家公司面试过，一家在俄克拉荷马州，一家在华盛顿，还有一家在纽约。可是，他们要么直接把我拒了，要么让我先等着，然后又开始不停地面试别人。猎头说这家公司前景应该不错，不过他们不愿意为我支付飞机票。要么自己买票，要么就得放弃。我当时还只是个学生。去纽约的单程机票在机场当场买要五百美元，要是提前几周预定的话，双程票才要一百五十美元。妻子和我商量了一下，然后帮我收拾了行李，开车把我送到火车站。我坐上了去纽约的火车。在火车上，我并没有睡意，把 Steven Shreve 在网上发的那份数理金融讲义翻来覆去地看，并设想着如果得不到这份工作我该怎么办。

飞机只要一个半小时的路程，火车走了差不多二十四个小时。火车到达纽约时，已是中午十二点了。我简短地拜会了一下我的猎头，就冲进了地铁，目的地是市区下城紧靠着华尔街的大通曼哈顿 (Chase Manhattan) 大楼的第四十四层。

一点钟，一个和我年纪相仿的年轻人把我带进办公室，开始面试。

“读过 John Hull 的书？”

“读过。”

“如果我让你推导 Black-Scholes 方程，你能做到吧？”

“没有问题。”

“既然没有问题，就不用了。”他微笑着说：“什么是波动率的偏态？”

“波动率的偏态就是市场上看涨、看跌期权在 Black-Scholes 方程中的隐含波动率的一条曲线。”

“所以说 Black-Scholes 模型是错误的，对吧？”

“可以这么说。”

“如果你卖了个看涨期权，想对冲风险，你是应该买股票，还是卖股

票？”

“买股票”

“为什么？”

“因为看涨期权的 Delta 是正的。”

“为什么看涨期权的 Delta 是正的？”

“因为 Delta 等于 $N(d_1)$，所以是正的。”

“不用公式好不好？”

“那是因为看涨期权的价格曲线是递增的，而 Delta 是切线的斜率。”

“假定 IBM 每股的交易价为 75 元。有个没有截止日期的触及生效期权，当 IBM 股价首次涨到 100 元时恰好支付 1 美元，否则期权继续有效。这个期权的价格是多少？忽略红利并且假定波动率是百分之二十，利率为零。”

我想了一会儿，用 Black-Scholes 方程给了解答。“0.75元。”答案虽然正确，但他不是很满意，他给了我一个更直观的解释。“其实这个触及生效期权的值根本不依赖于波动率。为了对冲 IBM 股价首次涨到 100 元时支付的 1 美元只要买百分之一股的 IBM 股票即可。而为了买百分之一股的 IBM 股票今天要 0.75 元，所以公式是不必要的。作为一个好的计量分析师，不能总是依赖公式。”

“有 A，B 两个足球队进行比赛，谁只要先积累地赢三场，谁就成为最后的冠军，因此它们最多比赛五场。你和另一个球迷将对每一场比赛打赌，赌注为 x 美元。如果你赢了，你就得到 x 元，否则就输掉 x 元。每场比赛的赌注 x 元都是可调整的，完全由你决定。你的目标是通过一系列赌局，使得最后只要 A 队赢了你将赢得 100 元，否则你将输掉 100 元。问题是第一场的赌注你该押多少呢？”

我用了一些符号表示比赛的输赢次序，作了十分钟的代数计算：“31.25 元，对吧？”

“为什么不用二叉树来计算呢？就跟计算期权价一样的道理。”他说。

“如果你进入一个十年的利率交换，你付每三个月的 LIBOR 利率，接受每六个月的固定利率百分之五。结果第二天十年的利率交换固定利率涨了零点一个百分点，你是亏了还是赚了呢？你的盈亏的贴现值是多少？”

“当然是亏了，由于我每年将要亏损一个百分点，而十年的贴现值之和是七点五左右，所以我亏损的贴现值是百分之七点五左右。”

“假定 Black-Scholes 方程成立，且无股票红利。如果股票价格为 100 元。无风险利率为百分之五。考虑一个一年到期的欧式看涨期权，执行价格就是 100 元。如果波动率为零，那么看涨期权的价值应该是多少？再告诉我怎样

对冲这个期权。”

我试着回答完他的问题，他就出去了，接着又进来了一个人。“你好，我是公司的一个交易员。听说 Pouria 的问题你都答上来了。我有几个问题，你准备好了吗？”

“你听过俄罗斯左轮手枪问题吗？一把左轮手枪可以装六发子弹。一个赌徒在手枪里放了两发子弹，子弹在弹膛里是挨着的，然后把子弹轮盘随机地转了一下。他先朝自己开了一枪。幸运的是，当然，你也可以说不幸的是，他还活着。接着轮到你。你是接过枪直接朝自己开枪，还是先随机地转一下轮盘再朝自己开枪呢？”

“能不能不朝自己开枪呢？”

“可惜这不是正确答案。”

“那我就直接朝自己开枪吧，因为我有四分之三的活的概率。可是如果转一下轮盘再朝自己开枪的话，我就只有三分之二的概率了。”

“一个国王抓住了 100 个犯人。一天他决定把他们都处死。但是在处死之前，国王把他们召集起来，想给他们最后一次机会。他说将会给每个人一顶帽子戴在头上。每顶帽子上随机写上 1 到 100 之间的一个数，作为编号，但允许重复。同时，每个犯人都可以看到其他人帽子的编号，但看不到自己的。每个人会得到一张纸条，犯人自己在上面写下一个数。如果有一个犯人写下的数字和自己帽子的编号相同，所有的犯人都将被释放，否则所有人都将被杀掉。在国王给帽子编号之前，犯人们将有十分钟的时间来讨论策略，在国王正式给帽子编号以后就不许再说话或者传递任何信息。这个策略将会是什么呢？”

当交易员问完了他的问题之后，风险组的头儿进来了。

“我问你个问题。看涨期权，同样执行价，同样到期日，波动率越高，价格是越高还是越低？”

“波动率越高，不确定性越高，所以价格越高。”

“看涨期权，同样执行价，到期日越长，价格是越高还是越低？”

“时间越长，价格越高”

“看跌期权是不是也这样呢？”

“应该不是的。”

风险组的头儿走了，公司的总经理进来了。“我只有一个问题。我们两个人做个交易。假定 S&P 指数今天的价格是 1000，利率是零。S&P 指数的

一个月的远期是多少？”

“如果利率是零的话，一个月的远期就是 1000。”

“如果一个月后，我给你 S&P 的指数，你给我 1000 元，这个交易是公平的了？”

“是公平的。”

“如果一个月后，我给你 1000 除以 S&P 这么多的美元，你给我 1 美元。这个交易还公平吗？”

就这样，一个接一个的人进来面试我。有的问题我答得对，有的我一时也不知道。最后，差不多七点钟了，最先面试我的那个年轻人又进来了。

“正常情况下，我们还会让你再来一次。然而，考虑到你住在芝加哥，这次我们给你破例。我们决定聘用你。这是我们提供的待遇：我们将给你两万五千元的安家费。你第一年的年薪将是九万元，年终时，根据你的表现，你将获得至少六万元的奖金。你享受的福利还包括医疗保险和养老金，还有免费的健身会员卡，我们其实认为健身会员卡比什么都重要。你要不要回去先考虑一下，再告诉我们？”

“让我想一下。好吧，我接受。”

走出大通大楼时，我是一下子如释重负。我打电话给妻子，告诉她这个好消息。她对我说：“直接去机场的柜台买票，别管有多贵。忘了火车的事，快点回来吧。”

我马上打电话给了父母，告诉他们我终于有了工作，还说了薪水的情况，我的父亲在电话另一端喊到：“他们一定是疯了，一定是疯了！”

就这样，我开始了华尔街的职业生涯。那个最先面试我的年轻人叫 Pouria Dehghanpour，是我日后工作的顶头上司。他是个很有才华的年轻人，教给了我很多的金融知识。

每年都会有很多毕业生在华尔街开始他们的职业生涯，学数学的、物理的、统计的、运筹的等等。无论专业背景是什么，他们都需要掌握这本书中涉及的基本内容。

最新的金融定量方法主要是在西方金融行业中发展起来。在日益开放的中国，金融专业人员对这些定量方法的需求将是巨大的。本书试图在此鸿沟上搭起一座桥梁。

作者毕业于芝加哥大学 (University of Chicago)，并取得博士学位，接着就开始在华尔街工作。这些年以来，我有机会在金融行业的许多领域中都工作过，包括股票衍生品、固定收益类衍生品和信贷衍生品等。很长一段时间，我都觉得很有必要写一本关于我工作所需专业知识的书，作为船桨，引领来

者。数理金融是一门需要大量高等数学知识的学科，包括微积分、概率论、随机分析、偏微分方程和傅立叶分析等等。然而，数理金融毕竟是为实际的金融操作服务的。所以，本书的目的不是介绍所有这些专门领域的背景知识，而是希望尽可能地把隐藏在这些专业知识背后的一些重要的、直观的概念以及它们和实际操作的联系讲清楚。这个领域中一个很重要的原则是：读者应该明白，任何数理金融理论和模型都有它们的优点和局限。从这个意义上说，所有的模型都是错误的。我在书中再三强调，理论和模型都是在某些对现实世界做了过度简化后的条件下成立的。读者应永远带着这些条件去理解这些理论，并要思考如果假设的条件不满足时，如何修改理论。

金融衍生品主要包括三个部分：股票衍生品，利率衍生品和信贷衍生品。考虑到这些理论可能占的篇幅，我希望分三部分来介绍。这本书为第一部分，介绍股票衍生品。在未来，我还希望写书来专门介绍利率衍生品和信贷衍生品。学习金融衍生品模型，有三个境界。如果去问从事数理金融工作的人什么是衍生品模型的核心，也许能听到两种回答。第一种回答是，衍生品定价很简单，就是要计算概率的期望值。而所谓 Delta 就是期望值对其函数变量的一阶导数。第二种回答是，衍生品价格不过是在风险中性概率测度下取的期望值，或通过建立 Black-Scholes 方程，求解得到。所谓风险中性概率测度，就是假设任何资产的收益率都是无风险利率。具体数值实现是建立树或者用有限差分法。

在作者看来，任何优秀的金融衍生品模拟都有两个最重要的任务：**一是衍生品的复制与对冲策略，以减少最终收益的不确定性；二是让复制与对冲尽可能少地依赖于模型本身**。因为本书是讲金融模型理论的，书中千方百计地建立各种模型，然而目标却是要使我们的方法独立于模型。这看起来似乎自相矛盾。我想，一旦读完本书，读者一定会对此有更深的理解。那将是第三个境界。

下面介绍一下本书的框架。本书包括两个部分：基础理论部分和高等理论部分。基础理论部分可以作为金融衍生模型方向一学期课程的教材，高等理论部分可以作为数理金融研究生的课程，或是讨论班的讲课内容。作者强烈建议在金融机构、共同基金或对冲基金工作的交易员、风险管理师或投资经理熟悉本书中的基础部分。

本书第一章先从利率的概念出发，给读者讲述了金融中的最基本的原则：现金的时间价值。接着本章介绍了世界各金融中心的股票指数，并且给出了所有这些指数的历史变化图。本章还介绍了几种常见的股票衍生品。这些衍生品中既有大家熟知的看涨、看跌期权，也有最近两年才开始交易的方

差和波动率互换。

第二章介绍了一些常见的衍生品的投资组合。为了让读者更清楚这些投资组合的交易头寸能做什么，我们对每个衍生头寸都给出了损益图。同时，我们第一次用无套利的原理给出了股票或股票指数的远期与现价的关系。读者将第一次领略衍生品模型根本不是源于什么概率的期望，而是要考虑复制收益的策略。

第三章仔细研究了看涨、看跌期权的基本性质。这些性质与任何概率论模型和偏微分方程模型都无关。这是对上述的第二个原则的一个很好的阐释。在通常的教科书上，这些性质会被 Black-Scholes 公式的一些技术性分析所证明，但实际上它们可以简单地由收益函数推导出来。这些性质以及推导出它们的方法将给读者展示一个最基本的原理：**无套利原理**。在第二章的后半部分，我还介绍了一个在期权市场寻找套利机会的有用算法。基于这个算法，读者可以开发出一个简单的软件。我在介绍这个算法的同时，详细地讲述了如果套利机会存在的话，如何通过一系列的交易达到套利的目标。

第四章将给读者简单地介绍一下随机分析理论。如果读者已经学过这部分内容，当然会有帮助。然而，为了逻辑的完备性，我们还是列出了后面将用到的主要随机分析的结果。对从没有学过随机分析的读者，我的建议很简单：就使用普通微积分，只不过把其中的求导法则换成 Itö 引理就行了。读者不应该只因为不懂随机分析而觉得阅读本书有困难。作者在开始工作之前就从没有接触过随机分析。

第五章推导著名的 Black-Scholes 偏微分方程，并对看涨、看跌期权求解。在推导过程中，我们用到了重要的“自融资”和“无套利”原理，尽管那时这两个概念还没有正式的定义。之后本章推导了希腊字母的计算公式。最后指出这个模型实际上并不完美，因为它不能解释波动率偏态效应。

第六章使用概率论的方法研究金融模型问题。通常有两种方法研究衍生品定价：偏微分方程方法和概率论方法。这两种方法可以通过 Feynman-Kac 方程联系起来。讲金融模拟的有些书只讲其中一种方法。然而，我相信那样做不能够一览这个领域的全貌，也不能学到很多有用的方法。本章将证明金融市场的资产定价基本定理，这个基本定理把无套利条件与相对价格鞅测度的存在性联系了起来。然后本章构造了风险中性测度，运用鞅的表示定理证明了看涨看跌期权可以通过动态地交易标的资产来复制出相同的收益函数，并再次给看涨看跌期权定价。本章还将介绍在很多实际中非常有用的计价单位变换技术和 Girsanov 定理。

第七章把介绍过的方法应用到很多新型期权上，包括二元期权，亚式期

权和回望期权等。新型期权已被广泛地用于投资银行间的交易。这一章还会讲到 Merton 的用期权来计算信贷风险的模型。读者可以看到股票衍生品与信贷衍生品之间的关系。其实这个模型已经被广泛地用于各个投资银行或对冲基金机构。这一章还将介绍期权动态对冲过程中的一些相关问题，并且第一次推导出了区域波动率模型。

第八章介绍模型的数值实现。数值方法是一个很广阔的领域，完全的介绍超出了本书的范围。这一章介绍了在华尔街实际操作中一些常用的方法：二叉树、Monte Carlo 模拟和有限差分法。Monte Carlo 模拟是概率论中的方法，而有限差分则是偏微分方程中的方法。这两种方法都可以在日常工作中有效地帮助我们求解模型。特别是，在利用介绍二叉树的同时，本章又在离散的情况下解释了风险中性概率的来源。

第九章讨论 CAPM 数学模型。这章的内容与本书的其他部分是相对独立的。然而，考虑到它数学上的完美及其在共同基金管理上广泛的应用，作者认为在介绍金融模型的书中值得用一章来介绍它。

第十章介绍傅立叶变换方法。近几年来，这种方法在华尔街的定量研究中起着越来越重要的作用。我们不仅介绍了傅立叶变换方法，而且还介绍了拉普拉斯变换的方法。这两种变化在复解析平面上可以统一起来。

第十一章开始介绍经典的 Black-Scholes 模型之外的一些模型。本章给出了两个这样的例子：Merton 的跳跃扩散模型和 Heston 的随机波动模型。对这两个模型，本章都给出了闭形式公式。事实上，大多数现代金融模型都可以归结为一个跳跃扩散模型，或者一个随机波动模型。

第十二章介绍一些常见的华尔街定量工作的面试问题，并给出了解答。这些问题不是一般的习题，它们多是工作人员在实际工作中碰到的问题。学习这些问题有助于读者总结衍生品定价的基本方法和技巧。

在本书的第二部分作者尝试着向读者介绍一些更新的金融数学模型，作为对第一部分的补充。

第十三章讨论了一个理论问题：在给定波动率偏态信息的情况下，如何证明无套利的存在。我们解决这个问题的方法是证明了鞅测度的存在性。为此本章证明了事实上存在无穷多个鞅测度，这些测度可以实现所有的波动率偏态。本章先证明离散情形，然后证明一般连续情形。这就使我们看到，Black-Scholes 模型远远不是唯一的模型，甚至区域波动模型也不是可以模拟整个波动率偏态的唯一模型。这一章可以被看成是第三章的引伸。

第十四章介绍区域波动模型。这是一个扩散模型，但是可以模拟整个波动率偏态，所以要大大优于传统的 Black-Scholes 模型，同时也对第十三章的

理论作了具体实现。

第十五章介绍一种新型期权。这种期权经常在年金产品中出现，在美国人的退休计划中很常见。本章将给出这种新型期权的一个完整解析公式，这可以视为标准 Black-Scholes 模型的一个应用。

第十六章研究一类“可加泛函”及其定价。在这一章，读者将看到怎样把偏微分方程工具、概率论工具、傅立叶变换和拉普拉斯变换在一起综合地使用。特别地，这章的结果可以用于亚式期权和其他新型期权的定价。

第十七章研究回望期权的定价问题。这章用到的方法是跳跃过程方法的一个推广，因为我们只要假设资产遵从 Lévy 过程。接着，作者将在本章证明一个很有意义的结果：回望期权可以用普通的看涨、看跌期权在有限个点上静态地对冲。这又是前面列出的第一个基本原则的一个实现。

第十八章研究一个漂亮的结果：“Doob 不等式及其应用”。这些结果源于作者企图给变异互换定价。这一章对感兴趣的读者来说将是概率论与经典分析的一次美妙结合。

第十九章是作者与 Peter Carr 合写的一篇论文。后者是华尔街著名的定量分析家，曾获得风险杂志 (Risk) 授予的2003年度最佳衍生品专家奖。我们将揭示一般期权与变异互换之间的关系。我们也将研究如何用变异互换对冲普通期权。特别地，我们将推广抛物型 Black-Scholes 方程为椭圆型偏微分方程。进一步，我们给出一个闭形式解。在这一章，读者将看到鞅、偏微分方程、Monte Carlo 模拟、变异互换和普通期权等等之间的紧密联系。这一章是整本书的最后部分，其内容可以看做是随机波动模型的推广，同时也是本书研究衍生品模型的高潮。

藉此书出版之际，我要感谢我的同事和朋友 Pouria Deghanpour 先生对我的工作的长期以来的支持。我也感谢 Peter Carr 先生，他的影响对本书的出版是至关重要的。我感谢刘一玲主任和霍宏涛编辑的认真细致的工作。我感谢我的妻子，她在我写作此书期间承担了全部的家务并忍受了许多的不眠之夜。我感谢我的祖父祖母、父亲母亲从小对我的辛苦培养。我也感谢我的岳父，岳母在我写此书期间曾给我的许多鼓励。最后我祝愿我们伟大的祖国繁荣富强。

纽约，2006 年 12 月

孙健

目　录