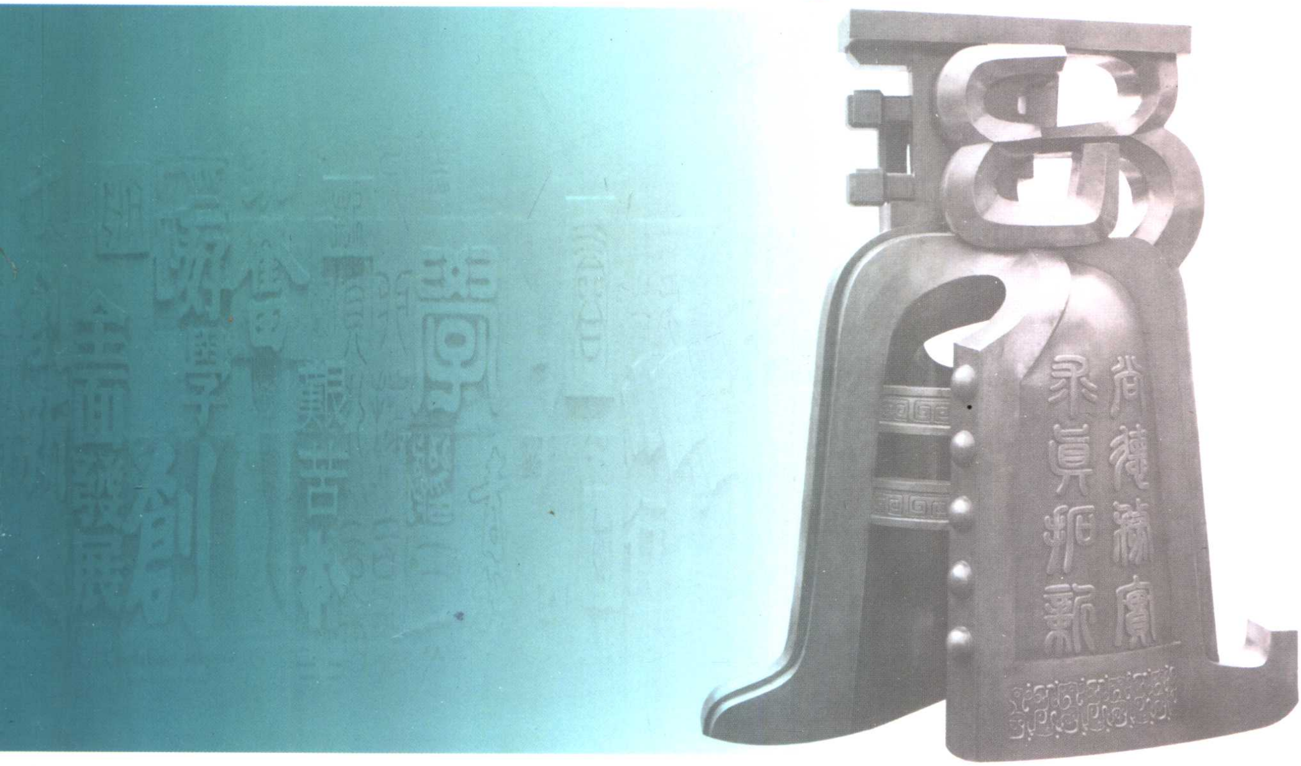
北京市高等教育精品教材立项项目

研究生精品课程系列教材



孙善利　王振鹏　编

泛函分析

北京航空航天大学出版社

北京市高等教育精品教材立项项目

泛函分析

孙善利　王振鹏　编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是为数学学科各方向的研究生编写的泛函分析教材。主要内容包括：1. 拓扑学引论，介绍一般拓扑的基本概念，特别是弱拓扑、网及其收敛以及 Banach 空间上弱拓扑；2. 抽象测度理论，重点介绍欧氏空间及一般紧 Hausdorff 空间上的 Borel 测度；3. 商空间的对偶、Stone - Weierstrass 定理、Riesz - Markov 定理等几个经典结果；4. 局部凸拓扑线性空间及其几何；5. 自伴算子谱理论，包括自伴算子谱定理及其证明、自伴算子的函数演算以及算子的极分解等；6. 迹类算子、Hilbert - Schmidt 类算子及一般 C_p 类算子的对偶；7. 无界线性算子简介。

本书适合作为高等院校数学系研究生教材，也可作为高等院校理科研究生和数学工作者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/孙善利，王振鹏编. —北京：北京航空航天大学出版社，2008.1
ISBN 978 - 7 - 81124 - 176 - 1

Ⅰ. 泛… Ⅱ. ①孙…②王… Ⅲ. 泛函分析—研究生—教材 Ⅳ. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 156057 号

泛函分析
孙善利　王振鹏　编
责任编辑　董　瑞
*
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市学院路 37 号(100083)　发行部电话：010－82317024　传真：010－82328026
www.buaapress.com.cn　E - mail：bhpress@263.net
涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销
*
开本：787×1092　1/16　印张：10.75　字数：275 千字
2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷　印数：4 000 册
ISBN 978 - 7 - 81124 - 176 - 1　定价：19.00 元

前　言

泛函分析是20世纪初产生和发展起来的现代数学分支。它的基本概念和主要方法是从古典分析，如变分法及积分方程等科目的内部逐渐形成的。它的发展也受到数学物理和量子力学的有力推动。

泛函分析的实质在于将数学分析初等部分的许多概念和方法推广到更一般的对象或属性更复杂的事物上去。不仅如此，泛函分析还广泛地应用了几何和代数的方法，这样就可以以一个统一的观点来处理许多早期只在特殊的分析科目里被孤立讨论的问题，并把一些看起来似乎相隔较远的数学理论联系起来，从而可能促进新的数学事实的发现。

泛函分析的特点不仅在于把古典分析的概念和方法一般化，更重要的是把这些概念和方法几何化。例如，抽象向量空间的引进可以把每个函数看做函数空间中的一个点，从而分析中的许多问题可以用几何的语言来描述，用几何的方法来研究。同样的，抽象代数学可以使原来施用于数的代数运算推广到属性更一般的、具有代数结构的对象上去。泛函分析研究的正是这种具有某种代数结构，同时还有拓扑几何结构的一般对象以及这些对象间的映射，例如局部凸拓扑线性空间、Hilbert 空间、Banach 空间以及这些空间之间的有界线性算子。

如今，泛函分析的思想和方法不仅广泛用于数学各分支，同样也应用于现代物理学及量子力学的研究中。每个要掌握现代科学技术的人都需要了解泛函分析的思想和方法，学会用泛函分析的观点及方法去分析和解决现代数学中的问题。因此，近年来泛函分析一直是各高等学校数学系本科生和研究生必修的一门基础课。

王振鹏教授编写的《泛函分析》(吉林大学出版社，1990)是作者在多年教学实践基础上吸取各大学好的教学经验，结合自己的教学体会，专门为研究生编写的泛函分析教材。在自伴算子谱定理讲述中，先给出标量值谱测度的构造性定义，然后进行 Borel 函数演算，得到射影值谱测度，进而得到积分形式的谱定理。王振鹏认为这种讲谱定理的方法与常见的中外教科书不同，也算是略有新意吧！

王振鹏教授的《泛函分析》出版后长年在吉林大学数学系研究生教学中使用，收到较好的教学效果。遗憾的是该书一直未再版。为了适应研究生教学的需要，编者结合教学实践和体会，在王振鹏原有《泛函分析》教材框架基础上重新编写了《泛函分析》讲义。这本讲义在保留原书特色和优点的基础上，进行了较大改写，力求使重点更突出，内容更精练。这本讲义已经在吉林大学和北京航空航天大学数学系研究生教学中使用多年，教学效果较好。如今作为教材正式出版，还请广大读者指正。

本教材主要是为数学系研究生编写的，面向的主要对象也是数学学科各方向

的研究生。因此,假定读者已经熟悉本科泛函分析的基础知识。对于没学过泛函分析的读者,建议在读本教材之前先读江泽坚与孙善利编写的《泛函分析》(第2版)(高等教育出版社,2005)或其他有关的泛函分析本科教材。这样由浅入深,循序渐进,就能较好地掌握泛函分析的思想和方法。

本教材在出版过程中得到北京航空航天大学教务处和研究生院的大力支持。北京航空航天大学理学院陆启韶教授详细审阅了全部书稿,并提出了十分中肯和宝贵的修改意见,在此一并表示衷心感谢。

编 者

2007 年 6 月

目　　录

第 1 章　拓扑学引论

泛函分析研究的对象既有代数结构，又有拓扑结构。特别在无穷维赋范线性空间中不仅有度量拓扑，还有各种弱拓扑。要深刻理解和扎实掌握泛函分析的思想和方法就必须具备足够的拓扑学知识。因此，本章介绍一般拓扑学的基础知识。首先介绍抽象拓扑的最基本概念和映射连续性定义；然后着重介绍弱拓扑，包括网、子网及其收敛的概念和紧拓扑空间的特征等，这部分内容是比较难理解和掌握的，需要多花精力；最后介绍 Banach 空间中和 Banach 空间上有界线性算子空间中的拓扑与弱拓扑，这在以后各章节中是要经常用到的。

1.1　拓扑空间

定义 1.1.1　设 X 是一个非空集合，如果 X 的一族子集 $\mathfrak{J}$ 具有如下性质：

(1) $\mathfrak{J}$ 封闭于有限交运算，即若 $\{A_j\}_{j=1}^n\subset\mathfrak{J}$，则 $\bigcap_{j=1}^n A_j\in\mathfrak{J}$，其中 n 是任意正整数；

(2) $\mathfrak{J}$ 封闭于任意并运算，即若 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset\mathfrak{J}$，则 $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\in\mathfrak{J}$，其中 I 是任意的指标集；

(3) $\varnothing, X\in\mathfrak{J}$；

则称 $\langle X,\mathfrak{J}\rangle$ 为拓扑空间。不发生混淆时就说 X 是拓扑空间，$\mathfrak{J}$ 称为 X 上的拓扑，$\mathfrak{J}$ 中的元称为开集，开集的余集称为闭集。

例如，实数集 $\mathbb{R}$ 上的全体开集就是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑。更一般的度量空间都是拓扑空间，其上拓扑是由度量定义的全体开集组成。事实上，拓扑空间的概念正是从度量空间的开集抽象出来的。度量空间 X 的一个重要性质是：对 $x,y\in X$，$x\neq y$，必存在分别包含 x,y 的开集 U_x,U_y，使 $U_x\cap U_y=\varnothing$。一般的拓扑空间不具有这样好的性质，因而需要给它特殊名称。

定义 1.1.2　如果对于任何相异的 $x,y\in X$ 都存在开集 G_x,G_y，使 $x\in G_x$，$y\in G_y$，且 $G_x\cap G_y=\varnothing$，拓扑空间 X 称为 Hausdorff 空间或 T_2 空间。

同一个集合 X 上可以有各种不同的拓扑。其中有两个拓扑是极端情形，一个是由 X 的所有子集组成的拓扑，即所谓离散拓扑；另一个是只由两个元素，即 $\varnothing, X$ 组成的拓扑 $\{\varnothing, X\}$，称为平庸拓扑。

定义 1.1.3　设 $\mathfrak{J}_1,\mathfrak{J}_2$ 是 X 上两个拓扑，如果 $\mathfrak{J}_1\subset\mathfrak{J}_2$，就称 $\mathfrak{J}_1$ 弱于 $\mathfrak{J}_2$ 或 $\mathfrak{J}_2$ 强于 $\mathfrak{J}_1$，记作 $\mathfrak{J}_1\leqslant\mathfrak{J}_2$。

显然，非空集合 X 上的任何拓扑都弱于离散拓扑，而强于平庸拓扑。

定义 1.1.4　设 $\langle X,\mathfrak{J}\rangle$ 是一个拓扑空间，$A\subset X$，令

$$\mathfrak{J}_A=\{G\cap A \mid G\in\mathfrak{J}\}$$

则 $\mathfrak{J}_A$ 是 A 上的一个拓扑，称 $\mathfrak{J}_A$ 为 A 上的相对拓扑或 $\mathfrak{J}$ 在 A 上诱导出的拓扑。$\mathfrak{J}_A$ 中的元称为相对开集。

定义 1.1.5　设 $\langle X,\mathfrak{J}\rangle$ 是一个拓扑空间，如果 $\mathfrak{J}$ 中每个开集都能表成 $\mathfrak{R}$ 中元的并，一族开集 $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{J}$ 称为 $\mathfrak{J}$ 的基。如果 $\mathfrak{J}$ 中每个开集都能表成 $\mathfrak{S}$ 中元的有限交的并，即 $\mathfrak{S}$ 中元的有限交的全体是 $\mathfrak{J}$ 的一个基，一族开集 $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{J}$ 称为 $\mathfrak{J}$ 的次基。

设 $x\in X$,$N\subset X$,若存在开集 $U\in\mathfrak{J}$,使 $x\in U\subset N$,则称 N 为 x 的邻域。设 $x\in X$,x 的一族邻域 $\mathfrak{A}$ 称为 x 的邻域基,如果对于 x 的每个邻域 V,都有 $U\in\mathfrak{A}$,使 $U\subset V$,x 的邻域基常记为 $\mathfrak{A}(x)$。

在度量空间 $\langle M,\rho\rangle$ 中,$x\in M$,n 是任意正整数,令

$$N_n=\{y\in M\mid \rho(y,x)<1/n\}$$

则 $\mathfrak{A}=\{N_n,n=1,2,\cdots\}$ 便是 x 的一个可数的邻域基。

给了一个拓扑,就有拓扑基和拓扑次基;反之,给定一个拓扑基或拓扑次基,也可以确定这个拓扑。常常是通过给定拓扑基或拓扑次基的方式来给定拓扑。但在实际中,也常通过给定每点的邻域基来确定这个拓扑。

有了拓扑就有了邻域,也就可以给出极限和连续的概念。

定义 1.1.6 设 $\langle X,\mathfrak{J}\rangle$ 是一个拓扑空间,$\{x_n\}$ 是 X 中一个序列,$x\in X$。如果对 x 的每个邻域 V,都存在正整数 N,使当 $n\geqslant N$ 时,$x_n\in V$,则称 $\{x_n\}$ 收敛于 x,记作 $x_n\to x$ 或 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$。

定义 1.1.7 设 $\langle X,\mathfrak{J}\rangle$,$\langle Y,\mathfrak{S}\rangle$ 都是拓扑空间,映射 f: $X\to Y$。如果对任意的 $G\in\mathfrak{S}$,都有 $f^{-1}(G)\in\mathfrak{J}$,则称 f 是连续的;如果对任意的 $V\in\mathfrak{J}$,都有 $f(V)\in\mathfrak{S}$,则称 f 是开的;如果 f 是双射(即单射且满射),而且是连续的开映射,则称 f 是同胚。

定理 1.1.1 设 $\langle X,\mathfrak{J}\rangle$,$\langle Y,\mathfrak{S}\rangle$ 都是拓扑空间,f: $X\to Y$ 是映射,则 f 是连续的当且仅当对 Y 中任何闭集 F,$f^{-1}(F)$ 是 X 中闭集。

证明 必要性。设 F 是 Y 中闭集,则 F^C(表示 F 的余集)是 Y 中开集。由 f 的连续性,$f^{-1}(F^C)$ 是 X 中开集。但是由于 $f^{-1}(F^C)=[f^{-1}(F)]^C$,故 $f^{-1}(F)$ 是 X 中闭集。

充分性。对 Y 中的任何开集 G,G^C 是 Y 中闭集。由假设,$f^{-1}(G^C)$ 是 X 中闭集。但是由于 $f^{-1}(G^C)=[f^{-1}(G)]^C$,于是 $f^{-1}(G)$ 是 X 中开集,故 f 是连续的。

证毕。

1.2 弱拓扑

上节引进的映射连续性是依赖于拓扑的。由定义可见,对于连续的映射 f: $\langle X,\mathfrak{J}\rangle\to\langle Y,\mathfrak{S}\rangle$,当拓扑 $\mathfrak{J}$ 加强为 $\mathfrak{J}_1$ 时,f 还是连续的。但是当拓扑 $\mathfrak{J}$ 减弱为 $\mathfrak{J}_2$ 时,f 未必还连续。于是可以考虑 X 上使 f 保持连续的最弱拓扑,显然它应为

$$\{f^{-1}(U)\mid U\in\mathfrak{S}\}$$

若又有映射 g: $X\to\langle Y,\mathfrak{S}\rangle$,则 X 上使 f,g 都连续的拓扑必须包含

$$\mathfrak{A}=\{f^{-1}(U)\mid U\in\mathfrak{S}\}\cup\{g^{-1}(U)\mid U\in\mathfrak{S}\}$$

这时,$\mathfrak{A}$ 未必是拓扑,但是以 $\mathfrak{A}$ 为次基的拓扑即为使 f,g 皆连续的最弱拓扑。由此引进如下重要概念。

定义 1.2.1 设 K 是从集合 X 到拓扑空间 $\langle Y,\mathfrak{S}\rangle$ 的一族映射。X 上使所有的 $f\in K$ 皆连续的拓扑中最弱者称为 X 上由 K 决定的弱拓扑或 K-弱拓扑。

注意:任给一族映射 K,这样的 K-弱拓扑一定存在。

命题 1.2.1 设 K 是从 X 到 $\langle Y,\mathfrak{S}\rangle$ 的一族映射,则

(1) 以 $\{f^{-1}(U)\mid f\in K,U\in\mathfrak{S}\}$ 为次基的拓扑即为 K-弱拓扑;

(2) 对于任何 $x_0\in X,f\in K,\mathfrak{A}(f(x_0))$表示 $f(x_0)$的邻域基,则形如

$$\bigcap_{j=1}^{n}\{f_j^{-1}(U_j)\ \mid\ f_j\in K,U_j\in\mathfrak{A}(f_j(x_0))\}$$

的集合全体就是 K-弱拓扑在 x_0的邻域基。

证明　(1) 设 K-弱拓扑为 $\mathfrak{J}_1$,而以$\{f^{-1}(U)\ \mid f\in K,U\in\mathfrak{S}\}$为次基的拓扑为 $\mathfrak{J}_2$。由假设,任意的 $f\in K$ 关于 $\mathfrak{J}_1$连续,当$U\in\mathfrak{S}$时,$f^{-1}(U)\in\mathfrak{J}_1$,故$\{f^{-1}(U)\ \mid f\in K,U\in\mathfrak{S}\}\subset\mathfrak{J}_1$,从而 $\mathfrak{J}_1\supset\mathfrak{J}_2$。

另一方面,由 $\mathfrak{J}_2$定义,每个 $f\in K$ 均关于 $\mathfrak{J}_2$连续,由 $\mathfrak{J}_1$是使每个 $f\in K$ 连续的最弱拓扑可知,$\mathfrak{J}_1\subset\mathfrak{J}_2$。总之,$\mathfrak{J}_1=\mathfrak{J}_2$。

(2) 设 V 是 K-弱拓扑中 x_0的邻域,不妨设 V 是开的。由(1),V 可表为

$$V=\bigcup_{\alpha\in I}\bigcap_{j=1}^{k_{\alpha'}}\{f_{\alpha j}^{-1}(U_{\alpha j})\ \mid\ f_{\alpha j}\in K,U_{\alpha j}\in\mathfrak{S}\}$$

注意:$x_0\in V$,于是必存在某个 $\alpha'\in I$,使

$$x_0\in\mathfrak{A}=\bigcap_{j=1}^{k_\alpha}\{f_{\alpha' j}^{-1}(U_{\alpha' j})\ \mid\ f_{\alpha' j}\in K,U_{\alpha' j}\in\mathfrak{S}\}$$

若诸 $U_{\alpha' j}\in\mathfrak{A}(f_{\alpha' j}(x_0)),j=1,2,\cdots,k_{\alpha'}$,则 $\mathfrak{A}$ 即为(2)中形式的集合;否则,由 $f_{\alpha' j}(x_0)\in U_{\alpha' j}$,$j=1,2,\cdots,k_{\alpha'}$,存在 $U_j\in\mathfrak{A}(f_{\alpha' j}(x_0))$,使 $f_{\alpha' j}(x_0)\in U_j\subset U_{\alpha' j}$。于是 $x_0\in f_{\alpha' j}^{-1}(U_j)\subset f_{\alpha' j}^{-1}(U_{\alpha' j})$,$j=1,2,\cdots,k_{\alpha'}$。这样

$$x_0\in\bigcap_{j=1}^{k_{\alpha'}}\{f_{\alpha' j}^{-1}(U_j)\ \mid\ f_{\alpha' j}\in K,U_j\in\mathfrak{A}(f_{\alpha' j}(x_0))\}\subset V$$

证毕。

设$\{\langle Y_\alpha,\mathfrak{S}_\alpha\rangle,\alpha\in I\}$是一族拓扑空间,映射 f_α: $X\to Y_\alpha,\alpha\in I,K=\{f_\alpha|\alpha\in I\}$。依照上述,同样可以在 X 上定义 K-弱拓扑。由此可以产生乘积空间上拓扑,即所谓乘积拓扑。

设$\{\langle X_\alpha,\mathfrak{J}_\alpha\rangle,\alpha\in I\}$是一族拓扑空间,考虑$\{X_\alpha,\alpha\in I\}$的笛卡儿积

$$X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha=\{\{x_\alpha;\alpha\in I\}\mid x_\alpha\in X_\alpha,\alpha\in I\}$$

X 称为$\{X_\alpha,\alpha\in I\}$的乘积空间。X 中每个元 $\boldsymbol{x}=\{x_\alpha;\alpha\in I\}$均可以看作 I 上函数,即对每个 $\alpha\in I$,均有 $\boldsymbol{x}(\alpha)=x_\alpha\in X_\alpha$。这里 x_α称为元 $\boldsymbol{x}=\{x_\alpha;\alpha\in I\}$的第 α 个分量。$\{x_\alpha;\alpha\in I\}$有时也记作$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$。

对每个 $\alpha\in I$,均可以定义从 X 到 X_α的映射 P_α: $\boldsymbol{x}=\{x_\beta;\beta\in I\}\mapsto x_\alpha$,常称为 X 到 X_α的射影。

定义 1.2.2　乘积空间 $X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$上由射影族$\{P_\alpha|\alpha\in I\}$决定的弱拓扑,即使每个射影 P_α: $X\to X_\alpha$都连续的最弱拓扑,称为$\{\mathfrak{J}_\alpha,\alpha\in I\}$的乘积拓扑,记作$\prod_{\alpha\in I}\mathfrak{J}_\alpha$。

今后在乘积空间上总是赋予乘积拓扑。由命题 1.2.1 可见,所有形如

$$\bigcap_{\alpha\in F}\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha);U_\alpha\in\mathfrak{J}_\alpha\}$$

的集合是乘积拓扑的拓扑基。这里 F 是 I 的任何有限子集。

注意:上述集合中的每个元$\{x_\alpha;\alpha\in I\}$只有有限个坐标 $x_\alpha,\alpha\in F$,是受到限制的;要求在集合 U_α中,其余的坐标 $x_\alpha,\alpha\notin F$,是很自由的,可以取遍整个 X_α。因此每个拓扑基中的元是很"大"的。

作为弱拓扑的一个例子是在本科泛函分析中学习过的序列弱收敛概念。

设 H 是复可分 Hilbert 空间,具有内积$(\cdot,\cdot)$。设 $x_n\in H,n=1,2,\cdots$。如果对任何 $y\in H$ 都有

$$(x_n,y)\to(x,y),\qquad n\to\infty$$

称$\{x_n\}$序列弱收敛于 x。由著名的 Riesz 表示定理,实际上是说对 H 上每个连续线性泛函 f 都有

$$f(x_n) \to f(x), \qquad n \to \infty$$

容易看出,这样的弱收敛实际上是使 H 上有界线性泛函都连续的最弱拓扑中的收敛。

定义 1.2.3 设 H 是复可分 Hilbert 空间,H^* 是 H 的对偶空间。H 上的 H^*-弱拓扑称为 H 上弱拓扑。

由命题 1.2.1 (2)可见,H 上弱拓扑在 $0\in H$ 的邻域基就是所有形如下面的集合

$$N(y_1, y_2, \cdots, y_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \bigcap_{j=1}^{n}\{x \in H \mid |(x, y_j)| < \varepsilon_j\}$$

其中,n 是任意的正整数,$y_j \in H, \varepsilon_j > 0, j = 1, 2, \cdots, n$。由于 H 是线性空间,H 上弱拓扑在 $x_0 \in H$的邻域基就是所有形如下面的集合

$$x_0 + N(y_1, y_2, \cdots, y_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) =: \{x_0 + x \mid x \in N(y_1, y_2, \cdots, y_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\} = \bigcap_{j=1}^{n}\{x \in H \mid |(x - x_0, y_j)| < \varepsilon_j\}$$

注意:在 0 点的邻域基表达式 $N(y_1, y_2, \cdots, y_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$中,若以 y_j/ε_j代替 $y_j, j = 1, 2, \cdots, n$,则它可以表成

$$N(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \bigcap_{j=1}^{n}\{x \in H \mid |(x, y_j)| < 1\} \tag{1.2.1}$$

因此,0 点的邻域基可由所有的形如式(1.2.1)的集合组成。以后常以这种形式给定 0 点的邻域基。

论断 H 中序列$\{x_n\}$按弱拓扑收敛于 x 当且仅当对任何 $y\in H$,都有$(x_n, y)\to(x, y)$。

证明 必要性。对任何 $y\in H, \varepsilon>0, U=\{z\in H \mid |(z-x, y)|<\varepsilon\}$是 x 的一个弱拓扑的邻域。于是存在正整数 N,当 $n\geqslant N, x_n\in U$,即

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| < \varepsilon$$

充分性。设 V 是 x 的任何一个弱拓扑的邻域,由弱拓扑邻域基的构造,存在 $y_j \in H, \varepsilon_j > 0, j = 1, 2, \cdots, m$,使 $x + N(y_1, y_2, \cdots, y_m; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) \subset V$。由假设,$(x_n, y_j) \to (x, y_j), j = 1, 2, \cdots, m$。存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,有

$$|(x_n, y_j) - (x, y_j)| < \varepsilon_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

从而,当 $n\geqslant N$ 时,$x_n \in x + N(y_1, y_2, \cdots, y_m; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) \subset V$。故按弱拓扑,$x_n\to x$。 **证毕。**

尽管有这样的等价关系,但刻画弱拓扑的收敛不只是序列收敛,而是一种新的收敛,即所谓网的收敛。

1.3 网与收敛

在度量空间中,序列的极限足以刻画聚点、闭集等拓扑对象。但是在一般拓扑空间中,仅有序列极限是不够的,需要引进网及其收敛的概念。

定义 1.3.1 设$\langle X, \mathfrak{F}\rangle$是拓扑空间,$A\subset X, x\in X$。如果 x 的任何邻域中都有 A 中异于 x 的点,称 x 是 A 的聚点。用 A'表示 A 的全体聚点的集合。包含 A 的最小闭集,即所有包含 A 的闭集的交,称为 A 的闭包,记为 $\overline{A}$。

命题 1.3.1 $x\in A$ 当且仅当 $x\in A$ 或 $x\in A'$。

证明 ⇒。若不然,存在 x 的开邻域 U,使 $U\cap A=\emptyset$,即 $A\subset U^C$。而 U^C是闭集,故$\overline{A}\subset$

U^C。但 $x \notin U^C$，于是 $x \notin \overline{A}$，与假设矛盾。

$\Leftarrow$。若不然，存在闭集 F，使 $A \subset F$，但 $x \notin F$。这样 $x \in F^C$，但 F^C 是开集，且 $A \cap F^C = \varnothing$。于是 x 不是 A 的聚点，又 $x \notin A$，和假设矛盾。

由命题 1.3.1 可知

(1) $\overline{A} = A \cup A'$；

(2) 集合 F 是闭集当且仅当 F 包含它的所有聚点。

由数学分析和实变函数论可知，在度量空间中，

$$x \text{ 是集合 } A \text{ 的聚点当且仅当存在序列} \{x_n\} \subset A \backslash \{x\}\text{，使 } x_n \to x\text{。}$$

但是在一般拓扑空间中此说法不成立，主要是其必要性不成立。

例 1.3.1　设 $S=[0,1]$，考虑 S 的子集类

$$\mathfrak{I} = \{G \mid G \subset S, S \backslash G \text{ 是有限或可数集合}\} \dot{\cup} \{\varnothing\}$$

易见 $\mathfrak{I}$ 是 S 上一个拓扑。令 $A=[0,1)$，$x=1$。容易看到 1 的任何邻域不可能只由 1 组成，必包含 A 中点，故 $x=1 \in A'$。但是，A 中任何序列 $\{x_n\}$ 不能收敛到 1。事实上，令 $G = S \backslash \{x_n \mid n = 1,2,\cdots\}$，则 G 是开集，且 $1 \in G$，但 G 不包含 $\{x_n\}$ 中任何一点。因而 $x_n \to 1$ 不成立。

再看一个例子。

例 1.3.2（von Neumann 的例子）　对每个固定的正整数 k 及所有的 n，$n>k$，取 l^2 中元

$$\boldsymbol{x}_n^{(k)} = \{0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,k,0,\cdots\}$$

其中，1 是第 k 个坐标，而 k 是第 n 个坐标。令 $A_k = \{\boldsymbol{x}_n^{(k)} \mid n>k\}$，$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$。注意：

$$\| \boldsymbol{x}_n^{(k)} \| = (1+k^2)^{1/2}, \qquad k = 1,2,\cdots, \qquad n = 1,2,\cdots$$

这样，A 中任何有界序列一定包含在前有限个 A_k 中。例如，若 $\{\boldsymbol{z}_j\} \subset A$ 满足

$$\| \boldsymbol{z}_j \| \leqslant N, \qquad j = 1,2,\cdots$$

N 是正整数，则 $\boldsymbol{z}_j \in \bigcup_{k=1}^{N} A_k$，$j=1,2,\cdots$。这样存在某个 A_k 包含无穷多个 $\boldsymbol{z}_j$，而这无穷多个 $\boldsymbol{z}_j$ 的第 k 坐标全为 1。显然，$\{\boldsymbol{z}_j\}$ 序列不可能弱收敛于 0。Hilbert 空间任何弱收敛序列都是有界的。于是，这证明 A 中任何序列都不可能弱收敛于 0；但是，0 却是 A 的弱聚点，即弱拓扑下的聚点。

事实上，由第 1.2 节，弱拓扑中 0 点的每个邻域都包含如下形式的集合

$$N(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in l^2 \mid |(x, y_j)| < 1\}$$

其中，$y_j = \{\eta_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$。于是 $\lim_{i\to\infty} \eta_i^{(j)} = 0$。这样，一定有正整数 k 及 n，$n>k$，使

$$|\eta_k^{(j)}| < 1/2, \qquad |\eta_n^{(j)}| < 1/(2k), \qquad j = 1,2,\cdots,m$$

于是

$$|(\boldsymbol{x}_n^{(k)}, y_j)| = |\eta_k^{(j)} + k\eta_n^{(j)}| \leqslant |\eta_k^{(j)}| + k|\eta_n^{(j)}| < 1, \qquad j = 1,2,\cdots,m$$

从而 $\boldsymbol{x}_n^{(k)} \in N(y_1, y_2, \cdots, y_m)$，即 0 是 A 的弱聚点，但是 0 不能用 A 中序列来刻画。

定义 1.3.2　设 $\{I, \geqslant\}$ 是部分有序集，如果对任何 $\alpha, \beta \in I$，都有 $\gamma \in I$，使 $\gamma \geqslant \alpha$，$\gamma \geqslant \beta$，则称 $\{I, \geqslant\}$ 是有向集。

从有向集 I 到拓扑空间 X 的映射：$\alpha \mapsto x_\alpha = x(\alpha)$，称为 X 中的网，记为 $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 或 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$。

正整数集按通常的序是有向集，定义在正整数集上的网就是普通的序列，即序列是特殊的网。

实数集$\mathbb{R}$按通常的序也是有向集，根据$\mathbb{R}$的序可以将$\mathbb{R}^2$做成部分有序集。

对$(x_i, y_i)\in\mathbb{R}^2$，$i=1,2$，定义其序为

$$(x_1, y_1) \geqslant (x_2, y_2), \qquad \text{当 } x_1 \geqslant x_2, \text{且 } y_1 \geqslant y_2$$

按这个序，$\mathbb{R}^2$也是有向集。

按着这个方法可以将任何两个有向集的笛卡儿积定义为一个有向集。设$\{I, \geqslant\}$，$\{J, \geqslant\}$是两个有向集，在笛卡儿乘积$K=I\times J$中定义乘积序如下：对(α,β)，$(\alpha',\beta')\in K$，则

$$(\alpha,\beta) \geqslant (\alpha',\beta'), \qquad \text{当 } \alpha \geqslant \alpha', \text{且 } \beta \geqslant \beta'$$

易见，按这个乘积序，$\{K, \geqslant\}$成为有向集，记为

$$\{K, \geqslant\} = \{I, \geqslant\} \times \{J, \geqslant\}$$

设$\langle X, \mathfrak{J}\rangle$是拓扑空间，$x\in X$。若$\mathfrak{U}(x)$表示$x$的全体邻域的集合，容易验证$\mathfrak{U}(x)$按集合包含关系（对$U, V\in\mathfrak{U}(x)$，若$V\subset U$，则$V\geqslant U$）成为一个有向集。特别是若$\mathfrak{U}(x)$表示$x$的邻域基，则按集合包含关系，$\mathfrak{U}(x)$也成为有向集。根据选择公理，对每个$U\in\mathfrak{U}(x)$，均可以取定一个$x_U\in U$，则$\{x_U \mid U\in\mathfrak{U}(x)\}$便是$X$中一个网。

定义 1.3.3 设$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$是拓扑空间$X$中的网，$x\in X$，如果对任何$U\in\mathfrak{U}(x)$，存在$\beta\in I$，使

$$x_\alpha \in U, \qquad \text{当 } \alpha \geqslant \beta$$

称$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$收敛到$x$，记为$x_\alpha\to x$，或$\lim_\alpha x_\alpha = x$。

从字面上看，网的收敛与序列的收敛没有不同，但实际上差异很大。一个序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$收敛到一点x，则对x的任何邻域U，序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$中只有有限个点不在该邻域中。但网$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$收敛于$x$则不同，对$x$的任何邻域$U$，网$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$中都可能有无穷多个点不在该邻域中。因此，收敛的序列一定是有界的，而收敛的网却未必有界。

可以证明拓扑空间X是Hausdorff空间当且仅当X中任何收敛的网的极限都是唯一的。

定理 1.3.2 设$\langle X, \mathfrak{J}\rangle$是拓扑空间，$A\subset X$，$x\in X$，则$x\in A'$当且仅当存在$A\setminus\{x\}$中的网$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$收敛于$x$。

证明 必要性。任给$U\in\mathfrak{U}(x)$，由聚点定义，存在$x_U\in A\setminus\{x\}$，使$x_U\in U$。由前述，$\mathfrak{U}(x)$是有向集，这样得到$A\setminus\{x\}$中的网$\{x_U \mid U\in\mathfrak{U}(x)\}$，它收敛于$x$。事实上，任给$x$的邻域$V$，则$V\in\mathfrak{U}(x)$。当$U\in\mathfrak{U}(x)$，且$U\geqslant V$时，$U\subset V$，从而$x_U\in U\subset V$，即$x_U\to x$。

充分性。设V是x的邻域，由于$A\setminus\{x\}$中网$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$收敛于$x$，则存在$\beta\in I$，使当$\alpha\geqslant\beta$时，$x_\alpha\in V$。特别$x_\beta\in V$，且$x_\beta\neq x$，故$x$是$A$的聚点。

推论 1.3.3 $x\in\overline{A}$当且仅当存在A中的网$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$收敛到$x$。

证明 由命题1.3.1和定理1.3.2可得必要性。至于充分性，若$x\in A$，则$x\in\overline{A}$；若$x\notin A$，则A中的网$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$亦即$A\setminus\{x\}$中的网。由定理1.3.2可知，$x\in A'$，亦有$x\in\overline{A}$。

命题 1.3.4 设X, Y都是拓扑空间，$f\colon X\to Y$是映射，则f是连续的当且仅当对X中任意的网$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$，若$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$收敛于$x$，则必有$\{f(x_\alpha) \mid \alpha\in I\}$收敛于$f(x)$。

证明 必要性。设$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$是$X$中网，收敛于$x$，易见$\{f(x_\alpha) \mid \alpha\in I\}$是$Y$中网，而且收敛到$f(x)$。事实上，任给$f(x)$开邻域$V$，由$f$的连续性，$f^{-1}(V)$是$x$的开邻域，于是存在$\beta\in I$，使

$$x_\alpha \in f^{-1}(V), \qquad \text{当 } \alpha \geqslant \beta$$

即

$$f(x_\alpha) \in V, \qquad 当 \alpha \geqslant \beta$$

可见$\{f(x_\alpha)\mid\alpha\in I\}$收敛到$f(x)$。

充分性。由定理 1.1.1,只须证对 Y 中任意闭集 F,$f^{-1}(F)$是 X 中闭集。而欲证 $f^{-1}(F)$是闭集,只须证对 $f^{-1}(F)$的任何聚点 x_0 都有 $x_0\in f^{-1}(F)$。由定理 1.3.2,存在$f^{-1}(F)\backslash\{x_0\}$中网$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$收敛于 x_0。由假设$\{f(x_\alpha)\mid\alpha\in I\}$收敛到 $f(x_0)$,而 $f(x_\alpha)\in F,\alpha\in I,F$ 是闭集,故 $f(x_0)\in F$,从而 $x_0\in f^{-1}(F)$。　**证毕。**

定理 1.3.5　设$\{X_\alpha\mid\alpha\in I\}$是一族拓扑空间,则乘积空间 $X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$中网$\{\boldsymbol{x}_\beta\mid\beta\in J\}$按乘积拓扑收敛到 $\boldsymbol{x}$ 当且仅当对所有的 $\alpha\in I,x_\beta(\alpha)\to x(\alpha)$。

证明　必要性。在乘积拓扑中,对每个 $\alpha\in I$,射影 P_α: $X\to X_\alpha$是连续的。于是由命题 1.3.4,当$\{\boldsymbol{x}_\beta\mid\beta\in J\}$收敛到 $\boldsymbol{x}$ 时,$\{P_\alpha(\boldsymbol{x}_\beta)\mid\beta\in J\}$收敛于 $P_\alpha(\boldsymbol{x})$,即$\{x_\beta(\alpha)\mid\beta\in J\}$收敛于 $x(\alpha)$。

充分性。设 V 是 $\boldsymbol{x}$ 的邻域,由乘积拓扑定义,存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in I$,使

$$U=\bigcap_{j=1}^{n}\{P_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})\mid U_{\alpha_j}\in\mathfrak{U}(x(\alpha_j))\}\subset V$$

注意:$x_\beta(\alpha_j)\to x(\alpha_j),j=1,2,\cdots,n$。于是必有 $\beta_j\in J,j=1,2,\cdots,n$,使当 $\beta\geqslant\beta_j$ 时

$$x_\beta(\alpha_j)\in U_{\alpha_j}, \qquad j=1,2,\cdots,n$$

由 J 是有向集,可取 $\beta'\in J$,使 $\beta'\geqslant\beta_j,j=1,2,\cdots,n$,则当 $\beta\geqslant\beta'$时

$$x_\beta(\alpha_j)\in U_{\alpha_j}, \qquad j=1,2,\cdots,n$$

即

$$\boldsymbol{x}_\beta\in U=\bigcap_{j=1}^{n}\{P_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})\mid U_{\alpha_j}\in\mathfrak{U}(x(\alpha_j))\}\subset V$$

这说明$\{\boldsymbol{x}_\beta\mid\beta\in J\}$收敛于 $\boldsymbol{x}$。　**证毕。**

回忆度量空间$\mathbb{R}^n$中,一个有界序列未必收敛,但一定有收敛子序列。换言之,这个序列必有聚点。现在对一般拓扑空间也有如下概念。

定义 1.3.4　设 X 是拓扑空间,$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$是 X 中网,$x\in X$。如果对 x 的每个邻域 U 和每个 $\beta\in I$,都有 $\alpha\in I$,使 $\alpha\geqslant\beta$,且 $x_\alpha\in U$,则称 x 是网$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$的聚点。

显然,若网$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$收敛到 x,则 x 必是这个网的聚点;反之,若 x 是网$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$的聚点,则该网未必收敛于 x。

注意:网$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$的聚点与作为 X 的集合$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$的聚点不是一回事。例如,$\{x_\alpha=\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$是拓扑空间$\mathbb{R}$中的一个网。作为网,它没有聚点。事实上,对任何 $\alpha_0\in\mathbb{R}$,取(α_0-1,α_0+1)为 α_0的邻域,$\beta=\alpha_0+2\in\mathbb{R}$,则当 $\alpha>\beta$时,$x_\alpha=\alpha\notin(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$。所以 α_0不是网$\{x_\alpha=\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$的聚点。但是作为集合,$\{x_\alpha=\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$就是实数集$\mathbb{R}$,有无穷多个聚点。又例如,$\mathbb{R}$ 中网$\{1,2,1,3,\cdots\}$有唯一聚点,即 1;但是作为集合,$\{1,2,1,3,\cdots\}$是正整数集,没有聚点。

为了刻画网的聚点,需要引进所谓"子网"的概念。这是一个比较难掌握的概念。

定义 1.3.5　设 X 是拓扑空间,$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$,$\{y_\beta\mid\beta\in J\}$都是 X 中网。如果存在映射 F: $I\to J$,使

(1) 对每个 $\alpha\in I,x_\alpha=y_{F(\alpha)}$;

(2) 对每个固定 $\beta'\in J$,都有 $\alpha'\in I$,使当 $\alpha\geqslant\alpha'$时

$$F(\alpha)\geqslant\beta$$

则称$\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$是$\{y_\beta\mid\beta\in J\}$的子网。

注记:(a) 子网与子序列的概念不同。序列的子序列与原序列仍定义在同一个有向集上,即自然数集上。但一般来说子网与原网定义在不同的有向集上。

(b) 若令 $J'=\{F(\alpha)|\alpha\in I\}$，则 J' 是 J 的子集，按 J 的序也成为一个有向集。对 $F(\alpha_1)$，$F(\alpha_2)\in J'\subset J$，有 $\beta'\in J$，使 $\beta'\geqslant F(\alpha_1)$，且 $\beta'\geqslant F(\alpha_2)$。由子网定义，存在 $\alpha'\in I$，使 $F(\alpha')\geqslant\beta'$，从而 $F(\alpha')\in J'$，且 $F(\alpha')\geqslant F(\alpha_1)$，$F(\alpha')\geqslant F(\alpha_2)$。称 J' 为 J 的有向子集。

(c) 有向集 J 的有向子集 K 称为与 J 共尾。如果对每个 $\beta'\in J$，都有 $\gamma\in K$，使 $\gamma\geqslant\beta'$。易见(b)中的 J' 与 J 共尾。

(d) F 是从有向集 J 到有向集 J' 的映射，但它未必保序，也未必是单射。

(e) 序列的子序列也是这个序列的子网。但是序列的子网未必是序列，更不是子序列。设 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是序列，取 $I=[0,\infty)$，当 $\alpha\in[n-1,n)$，$n=1,2,\cdots$，时，定义

$$x_\alpha = y_n$$

则 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子网，但不是子序列。

(f) 若 X 是 Hausdorff 空间，则收敛网的任何子网也收敛，且极限相同。

设 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 是 X 中网，收敛于 y，$\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的子网。若 V 是 y 的任一邻域，由 $y_\beta\to y$，存在 $\beta'\in J$，使当 $\beta\geqslant\beta'$ 时

$$y_\beta\in V$$

由子网定义，存在 $\alpha'\in I$，使当 $\alpha\geqslant\alpha'$ 时

$$F(\alpha)\geqslant\beta'$$

从而当 $\alpha\geqslant\alpha'$ 时

$$x_\alpha = y_{F(\alpha)}\in V$$

即 $x_\alpha\to y$。由 X 是 Hausdorff 空间，$\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 收敛的极限还是唯一的。

(g) 若 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的子网，$\{y_\beta|\beta\in J\}$ 是 $\{z_\gamma|\gamma\in K\}$ 的子网，则 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 $\{z_\gamma|\gamma\in K\}$ 的子网。

定理 1.3.6 设 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 是拓扑空间 X 中网，$x_0\in X$，则 x_0 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的聚点当且仅当存在 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的某个子网 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 收敛到 x_0。

证明 充分性。设 U 是 x_0 的邻域，由 $x_\alpha\to x_0$，存在 $\alpha'\in I$，使当 $\alpha\geqslant\alpha'$ 时

$$x_\alpha\in U$$

又 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的子网，存在映射 $F: I\to J$，对 $\beta'\in J$，存在 $\alpha''\in I$，使当 $\alpha\geqslant\alpha''$ 时

$$F(\alpha)\geqslant\beta'$$

I 是有向集，存在 $\bar\alpha\in I$，使 $\bar\alpha\geqslant\alpha'$，且 $\bar\alpha\geqslant\alpha''$。于是 $F(\bar\alpha)\geqslant\beta'$，且 $y=x_{\bar\alpha}\in U$。可见 x_0 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的聚点。

必要性。设 $\mathfrak{U}(x_0)$ 是 x_0 的邻域基，考虑乘积有向集

$$K = J\times\mathfrak{U}(x_0) = \{(\beta,U)\mid\beta\in J,U\in\mathfrak{U}(x_0)\}$$

I 表示如下定义的 K 的子集：

$$I = \{(\beta,U)\mid\beta\in J,U\in\mathfrak{U}(x_0),\text{且 } y_\beta\in U\}$$

首先，I 是非空的。取 $U\in\mathfrak{U}(x_0)$，$\beta'\in J$，由 x_0 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的聚点，存在 $\beta\in J$，使 $\beta\geqslant\beta'$，且 $y_\beta\in U$，则 $(\beta,U)\in I$。

其次，I 按乘积序是 K 的有向子集。若 (β_1,U_1)，$(\beta_2,U_2)\in I$，则必有 $\beta\in J$，使 $\beta\geqslant\beta_1$，且 $\beta\geqslant\beta_2$，又有 $U\in\mathfrak{U}(x_0)$，使 $U\subset U_1\cap U_2$。由 x_0 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的聚点，存在 $\gamma\in J$，使 $\gamma\geqslant\beta$，且 $y_\gamma\in U$。于是 $(\gamma,U)\in I$，而且 $(\gamma,U)\geqslant(\beta_i,U_i)$，$i=1,2$。

当 $(\beta,U)\in I$ 时，定义映射

$$x_{(\beta,U)} = y_\beta$$

易见$\{x_{(\beta,U)} \mid (\beta,U)\in I\}$是 X 中网，且是$\{y_\beta \mid \beta\in J\}$的子网。事实上，若令 $F\colon I\to J$ 为

$$F((\beta,U)) = \beta$$

则 $x_{(\beta,U)} = y_\beta = y_{F((\beta,U))}$。$\forall \beta'\in J$，取 $U_1\in\mathfrak{A}(x_0)$。由聚点定义，存在 $\beta_1\in J$，使 $\beta_1\geqslant\beta'$，且 $y_{\beta_1}\in U_1$，则 $\alpha_1=(\beta_1,U_1)\in I$。当 $\alpha=(\beta,U)\geqslant\alpha_1$ 时，$\beta\geqslant\beta_1$，$U\geqslant U_1$，于是 $F(\alpha)=\beta\geqslant\beta_1\geqslant\beta'$，所以$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$是$\{y_\beta \mid \beta\in J\}$的子网。

又根据$\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$的选取，有 $x_\alpha\to x_0$。事实上，对 x_0 的任意邻域 V，均有 $U'\in\mathfrak{A}(x_0)$，使 $U'\subset V$。取定 $\beta_1\in J$，存在 $\beta'\in J$，使 $\beta'\geqslant\beta_1$，且 $y_{\beta'}\in U'$，则 $\alpha'=(\beta',U')\in I$。当 $\alpha=(\beta,U)\geqslant\alpha'=(\beta',U')$ 时，$\beta\geqslant\beta'$，$U\geqslant U'$。于是

$$x_\alpha = y_\beta \in U \subset U' \subset V$$

证毕。

1.4　紧拓扑空间

在这节总假定所论拓扑空间是 Hausdorff 空间。

设 S 是拓扑空间 X 的一个子集合，设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 中一族开集，如果$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\supset S$，则称$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 S 的一个开覆盖。$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的一个子覆盖$\{G_\beta\}_{\beta\in\vartheta}$指的是 ϑ 是 Λ 的子集，且仍有$\bigcup_{\beta\in\vartheta}G_\beta\supset S$。

定义 1.4.1　设$\langle X,\mathfrak{I}\rangle$是拓扑空间，$S$ 是 X 的子集合。如果 S 的任何开覆盖都有有限的子覆盖，则称 S 为紧的。若 X 本身是紧的，则称 X 为紧拓扑空间。若对任何 $x\in X$，都存在 x 的一个紧的邻域，则称 X 是局部紧的拓扑空间。

在 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中有界闭集都是紧的，而$\mathbb{R}^n$本身不是紧的，是局部紧的。一个拓扑空间是不是紧的非常重要。在度量空间中紧与自列紧是等价的(一个集合是自列紧的，即其中任何有界序列都有收敛于该集合中某个元的子序列)。

例 1.4.1　取普通闭集 $X_n\subset[0,1]$，$n=1,2,\cdots$。当 $n\neq m$ 时，把 X_n，X_m 视为不同直线上的集合，考虑不交并 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$，在 X 中令

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x-y| & (\text{当 } x,y \text{ 属于同一个 } X_n) \\ 1 & (\text{当 } x,y \text{ 属于不同的 } X_n) \end{cases}$$

容易验证$\langle X,\rho\rangle$是一个完备的度量空间，从而是一个拓扑空间。又

$$X \text{ 的子集 } G \text{ 是开的} \Leftrightarrow G\cap X_n \text{ 都是开的}, \qquad n=1,2,\cdots$$

还可以验证 X 是局部紧的，但不是列紧的。

$\mathbb{R}^n$中一个集合是紧的当且仅当该集合中任何序列都有收敛于该集合中点的子序列。这个结果在度量空间中也是对的，但是到了一般拓扑空间就变成如下形式定理。

定理 1.4.1 (Bolzano - Weierstrass)　设 X 是 Hausdorff 空间，$S\subset X$，则 S 是紧的当且仅当 S 中每个网都有收敛于 S 中点的子网(即 S 中每个网都有聚点属于 S)。

证明　充分性。用反证法。设 $\mathscr{B}$ 是 S 一个开覆盖，没有有限子覆盖。$\mathscr{B}$ 的有限子集的全体记作 $\mathscr{G}$(即 $\mathscr{G}$ 中每个元是 $\mathscr{B}$ 的有限个集合)，则 $\mathscr{G}$ 按包含关系成为有向集。$\forall\alpha=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}\in\mathscr{G}$，$\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$不能覆盖 S，必有 $x_\alpha\in S$，使 $x_\alpha\notin\bigcup_{j=1}^{n}G_j$。于是$\{x_\alpha \mid \alpha\in\mathscr{G}\}$是 S 中

一个网。由假设，它有收敛于 S 中点的子网，即 $\{x_\alpha|\alpha\in\mathscr{G}\}$ 有聚点，记为 x。因 $\mathscr{B}$ 覆盖 S，必有 $U\in\mathscr{B}$，使 $x\in U$。注意：$\{U\}\in\mathscr{G}$，由聚点定义，存在 $\beta=\{G'_1,G'_2,\cdots,G'_m\}\in\mathscr{G}$，使 $\beta\geqslant\{U\}$，且 $x_\beta\in U$。又由 $\mathscr{G}$ 中序的定义，$\{U\}\subset\{G'_1,G'_2\cdots,G'_m\}$。这样，$x_\beta\in U\subset\bigcup_{i=1}^m G'_i$ 和 x_β 的选取矛盾。

必要性。也用反证法。设 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 是 S 中网，假设它无收敛于 S 中点的子网。于是，对任何 $x\in S$，存在 x 的开邻域 U_x 及 $\alpha_x\in J$，对一切 $\alpha\geqslant\alpha_x$，都有 $y_\alpha\notin U_x$。但 $\{U_x|x\in S\}$ 覆盖 S，由 S 是紧的，存在 $\{U_x|x\in S\}$ 的有限子覆盖，设其为 $\{U_{x_1},U_{x_2},\cdots,U_{x_n}\}$。$J$ 是有向集，取 $\alpha'\in J$，使 $\alpha'\geqslant\alpha_{x_j}$，$j=1,2,\cdots,n$。从而 $y_{\alpha'}\notin U_{x_j}$，$j=1,2,\cdots,n$。这样，$y_{\alpha'}\notin\bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$ 与 $\{U_{x_1},U_{x_2},\cdots,U_{x_n}\}$ 覆盖 S 矛盾。 **证毕。**

命题 1.4.2 (1) 紧拓扑空间的闭子集还是紧的。

(2) 紧集在连续映射下的像还是紧的。

证明 (1) 设 X 是紧拓扑空间，F 是 X 的闭子集。根据定理 1.4.1，为证 F 是紧的，只须证明 F 中任何网都有收敛于 F 中点的子网。设 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 是 F 中网，当然 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 也是 X 中网。因 X 是紧的，由定理 1.4.1，存在 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 收敛子网 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$。设 $x_\alpha\to x$，因 F 是闭集，$x_\alpha\in F$，$\forall\alpha\in I$，故 $x\in F$。于是 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 在 F 中收敛于 x。

(2) 设 F 是紧集，f: $X\to Y$ 是连续映射。为证 $f(F)$ 是紧的，只须证 $f(F)$ 中任何网都有收敛于 $f(F)$ 中点的子网。设 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 是 $f(F)$ 中网，由选择公理，$\forall\beta\in J$，可取 $z_\beta\in f^{-1}(y_\beta)\cap F$，则 $\{z_\beta|\beta\in J\}$ 是 F 中网。因 F 是紧的，$\{z_\beta|\beta\in J\}$ 有收敛于 F 中某点 w 的子网 $\{w_\alpha|\alpha\in I\}$。令 $x_\alpha=f(w_\alpha)$，$\forall\alpha\in I$，则 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta|\beta\in J\}$ 的子网。因 f 是连续的，由命题 1.3.4，$\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 收敛于 $f(w)\in f(F)$。

推论 1.4.3 设 X 是紧拓扑空间，f 是 X 上实值连续函数，则 f 在 X 上能达到最大值和最小值。

证明 由命题 1.4.2(2)，$f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 中紧集，当然有最大值和最小值。

命题 1.4.4 设 X 是 Hausdorff 空间，S 是 X 的紧子集，则 S 是闭集。

证明 设 $x\in S'$，由推论 1.3.3，存在 S 中网 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 收敛于 x。因 S 是紧的，故 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 存在收敛于 S 中某个元 y 的子网 $\{y_\beta|\beta\in J\}$。而 X 是 Hausdorff 空间，$\{y_\beta|\beta\in J\}$ 与 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 收敛于同一元 x，从而 $x=y\in S$。故 S 是闭集。

在非 Hausdorff 空间中，紧集未必是闭集。

例 1.4.2 设 $X=\{1,2,3,\cdots\}$，定义 X 中开集为 $\{k,k+1,k+2,\cdots\}$，$k=1,2,\cdots$，以及空集。所有这样的开集生成的 X 上的拓扑空间不是 Hausdorff 空间。例如，包含 1 的开集一定包含 2，即 1 和 2 不能被不相交的开集分开。子集 $S=\{1,3\}$ 是紧集，但不是闭集，因为其余集 $S^C=\{2,4,5,\cdots\}$ 不是开集。

命题 1.4.5 设 X,Y 都是紧 Hausdorff 空间，f: $X\to Y$ 是连续的双射，则 f 是同胚。

证明 只须证明 f 是开映射。因 f 是双射，又只须证明对 X 的任何闭集 F，$f(F)$ 是 Y 的闭集。因 X 是紧 Hausdorff 空间，F 也是紧的。由命题 1.4.2(2)，$f(F)$ 是 Y 的紧集。而 Y 是 Hausdorff 空间，故 $f(F)$ 是闭集。 **证毕。**

定理 1.4.6 设 X 是 Hausdorff 空间，$K\subset X$，$p\in X$。若 K 是紧集，$p\notin K$，则存在开集 U，V，使

$$p\in U,\qquad K\subset V,\qquad \text{且}\, U\cap V=\emptyset$$