

王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第二卷 下册

(自学方法指导及习题讲解)

北京王式助尔高等数学研究院

王振力 编讲



中国科学技术出版社

王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第二卷 下册

(自学方法指导及习题讲解)

北京王式助尔高等数学研究院

王振力 编讲

中国科学技术出版社

· 北 京 ·

内容提要

本卷下册是本卷上册所讲微分学及其应用的方法指导及上册中所留全部习题的详细讲解. 目的是为自学者按照上册的要求, 自己独立做题时, 提供一种“保险”和示范. 某些自学者自己做习题时, 如果遇到了不会做得题目, 此时你也不必害怕, 因为根据书中的指导或提示, 你会快速准确地找到自己不会做的那些题目的正确解法或证法. 看懂之后, 自己再独立地做一遍就行了. 这样, 每一位自学者, 都可以顺利完成自学任务, 达到自学目的: 全面掌握微分学及其应用方面的知识和技能.

目 录

第十章的自学方法与习题讲解	(1)
一、关于习题 10.1 的讲解	(1)
二、关于习题 10.2 的讲解	(6)
三、关于习题 10.3 的讲解	(12)
四、关于习题 10.4 的讲解	(14)
五、关于习题 10.5 的讲解	(31)
六、关于习题 10.6 的讲解	(44)
七、关于习题 10.7 的讲解	(56)
八、关于习题 10.8 的讲解	(61)
九、关于习题 10.9 的讲解	(70)
十、关于习题 10.10 的讲解	(71)
十一、关于习题 10.11 的讲解	(85)
第十一章的自学方法与习题讲解	(103)
一、关于习题 11.1 的讲解	(103)
二、关于习题 11.2 的讲解	(113)
三、关于习题 11.3 的讲解	(123)
四、关于习题 11.4 的讲解	(130)
五、关于习题 11.5 的讲解	(145)
六、关于习题 11.6 的讲解	(153)
七、关于习题 11.7 的讲解	(157)

第十二章的自学方法与习题讲解	(177)
一、关于习题 12.1 的讲解	(177)
二、关于习题 12.2 的讲解	(193)
三、关于习题 12.3 的讲解	(200)
四、关于习题 12.4 的讲解	(201)
第十三章的自学方法与习题讲解	(205)
一、关于习题 13.1 的讲解	(205)
二、关于习题 13.2 的讲解	(216)
三、关于习题 13.3 的讲解	(269)
四、关于习题 13.4 的讲解	(301)
第十四章的自学方法与习题讲解	(323)
一、关于习题 14.1 的讲解	(323)
二、关于习题 14.2 的讲解	(335)
三、关于习题 14.3 的讲解	(349)
四、关于习题 14.4 的讲解	(373)
五、关于习题 14.5 的讲解	(388)
六、关于习题 14.6 的讲解	(399)
七、关于习题 14.7 的讲解	(436)
八、关于习题 14.8 的讲解	(456)
九、关于习题 14.9 的讲解	(466)
十、关于习题 14.10 的讲解	(521)
十一、关于习题 14.11 的讲解	(536)
第十五章的自学方法与习题讲解	(572)
一、关于习题 15.1 的讲解	(572)
二、关于习题 15.2 的讲解	(577)
三、关于习题 15.3 的讲解	(581)
四、关于习题 15.4 的讲解	(594)
五、关于习题 15.5 的讲解	(608)

六、关于习题 15.6 的讲解	(620)
七、关于习题 15.7 的讲解	(645)
八、关于习题 15.8 的讲解	(667)
九、关于习题 15.9 的讲解	(686)
十、关于习题 15.10 的讲解	(716)

第十章的自学方法与习题讲解

在这一章里,我们讲的主要内容有:集合的概念、表示方法、运算及其规律;实数的概念、绝对值及其性质;实数集中的元素与数轴上的点之间的对应关系;函数的定义、定义域、值、值域及其求法;表示函数及建立函数关系的方法;反函数的概念及其求法;复合函数的概念、定义域及其求法;复合函数复合层次的剖析方法;基本初等函数、双曲函数、初等函数的定义、性质及其图像;分段函数的概念及其图像的画法;初等函数图像的平移、伸缩与叠加方法等(详见上册第1~141页)。

这一章里,前后共留了11个习题,现结合自学方法依次讲解如下:

一、关于习题10.1的讲解

这个习题在第二卷上册第21页,是在讲了集合的概念,表示方法,种类,相等,运算及其规律之后布置的. 自学者在做这个习题之前,应先把第1~21页的课文和例题看懂,然后再做这个习题;做这个习题时,如果还有困难,可看下面的讲解,但看懂之后,自己仍应独立、正确、认真地做一遍,以培养和锻炼自己的解题能力.

10.1 按下列要求举例:

(a) 一个有限集合; (b) 一个无限集合;

(c) 一个空集; (d) 一个集合是另一个集合的子集.

解: 只要把“有限集”、“无限集”、“空集”及“子集”的概念搞清楚了, 作这个题目不应该有什么困难.

在第二卷上册第4~5页我们曾经讲过: 集合中元素的个数称为集合的“基数”, 基数有限的集合(即元素有限多的集合)称为“有限集”; 基数无限的集合(即元素无限多的集合)称为“无限集”, 没有元素的集合称为“空集”, 被某集合包含的集合称为那个集合的子集, 如果 $A \supset B$, 则 B 是 A 的子集(具体例子自己举).

10.2 用描述法表示下列集合:

(a) 大于 -3 的所有实数集合; (b) 大于 5 的正整数集合;

(c) 圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 的内部一切点的集合.

解: 设 A 是大于 -3 的所有实数集, B 是大于 5 的正整数集, C 是圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 内部的点集, 则

$A = \{x | x > -3 \text{ 的实数}\}$, $B = \{x | x > 5 \text{ 的整数}\}$,

$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$.

10.3 下列集合哪个是空集 \emptyset : (a) $A = \{x | x + 1 = 1\}$;

(b) $B = \{x | x > 1 \text{ 且 } x < 1\}$; (c) $C = \{\emptyset\}$.

答: B 是空集, 因 $\{x | x > 1\} \cap \{x | x < 1\} = \emptyset$.

10.4 写出集合 $A = \{2, 3, 4\}$ 的一切子集.

解: 根据子集的定义(见第二卷上册第5页), 集合 $A = \{2, 3, 4\}$ 的子集有: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$.

10.5 如果 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, 下列各种写法, 哪些对? 哪些错?

(a) $1 \in A$; (b) $0 \in B$; (c) $\{1\} \in A$; (d) $1 \subset A$;

(e) $\{1\} \subset A$; (f) $0 \subset A$; (g) $\{0\} \subset A$; (h) $A = B$;

(i) $A \supset B$; (j) $\emptyset \subset A$; (k) $A \subset A$.

答: 因为元素与集合的关系是属于或不属于的关系, 用以表示

这种关系的符号为 \in 或 \in ; 而集合与集合之间的关系是包含或不包含的关系, 用以表示这种关系的符号是 \subset 或 $\bar{\subset}$, 所以, 上列各种写法中对有: (a), (b), (e), (g), (i), (j), (k); 错误的写法有: (c), (d), (f), (h).

10.6 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$. 求:

$$(a) A \cup B; \quad (b) A \cap B; \quad (c) A \cup B \cup C;$$

$$(d) A \cap B \cap C; \quad (e) A - B; \quad (f) C - B.$$

解: $\because A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$ (已知) (1)

$$\therefore (a) A \cup B \stackrel{(1)}{=} \{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}.$$

$$(b) A \cap B \stackrel{(1)}{=} \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}.$$

$$(c) A \cup B \cup C \stackrel{(1)}{=} \{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} \\ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$(d) A \cap B \cap C \stackrel{(1)}{=} \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset.$$

$$(e) A - B \stackrel{(1)}{=} \{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}.$$

$$(f) C - B \stackrel{(1)}{=} \{2, 4, 6\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6\}.$$

10.7 如果 A 表示某班选学英语的人的集合, B 表示选学俄语的人的集合, 那么 $\bar{A}, \bar{B}, A - B, B - A, A \cup B, A \cap B, \overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}$ 各表示什么样人的集合?

答: A 的补集 \bar{A} 表示班上没有选学英语的人的集合;

B 的补集 \bar{B} 表示班上没有选学俄语的人的集合;

差集 $A - B$ 表示选学英语而不选学俄语的人的集合;

差集 $B - A$ 表示选学俄语而不选学英语的人的集合;

并集 $A \cup B$ 表示选学英语或选学俄语的人的集合;

交集 $A \cap B$ 表示选学英语又选学俄语的人的集合;

$\overline{A \cup B}$ 表示不学英语或不学俄语的人的集合;

$\overline{A \cap B}$ 表示不学英语也不学俄语的人的集合.

10.8 如果 $A = \{x | 3 < x < 5\}$, $B = \{x | x > 3.5\}$, 求:

(a) $A \cup B$; (b) $A \cap B$; (c) $A - B$; (d) $B - A$.

解: $\because A = \{x | 3 < x < 5\}$, $B = \{x | x > 3.5\}$ (已知) (1)

$$\therefore (a) A \cup B \stackrel{(1)}{=} \{x | 3 < x < 5\} \cup \{x | x > 3.5\} = \{x | x > 3\};$$

$$(b) A \cap B = \{x | 3 < x < 5\} \cap \{x | x > 3.5\} \\ = \{x | 3.5 < x < 5\};$$

$$(c) A - B = \{x | 3 < x < 5\} - \{x | x > 3.5\} \\ = \{x | 3 < x \leq 3.5\};$$

$$(d) B - A = \{x | x > 3.5\} - \{x | 3 < x < 5\} = \{x | x \geq 5\}.$$

10.9 如果 $A = \{(x, y) | x - y + 2 \geq 0\}$, $B = \{(x, y) | 2x + 3y - 6 \geq 0\}$, $C = \{(x, y) | x - 4 \leq 0\}$ 在坐标平面上标出 $A \cap B \cap C$ 及 $\overline{A \cap B \cap C}$ 的区域.

解: 根据平面解析几何的知识(见本教程第一卷上册第二章), 在平面直角坐标系 xOy 中, 因方程 $x - y + 2 = 0$ 表示一条直线, 所以不等式 $x - y + 2 \geq 0$ 表示这条直线以下的半平面区域, 即集合:

$A = \{(x, y) | x - y + 2 \geq 0\}$ 表示这个半平面内的点集. 同理, 集合:

$B = \{(x, y) | 2x + 3y - 6 \geq 0\}$ 表示直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 以上半平面内的点集.

集合 $C = \{(x, y) | x - 4 \leq 0\}$ 表示直线 $x - 4 = 0$ 以左的半平面内的点集.

交集 $A \cap B \cap C$ 表示上述三个半平面的公共部分的点集, 如图 1 中带阴影的三角形区域所示.

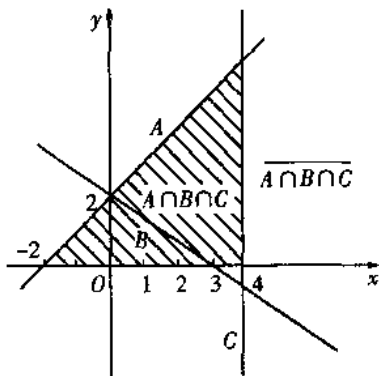


图 1

补集 $\overline{A \cap B \cap C}$ 表示图 1 中阴影三角形以外的区域.

10.10 如果 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$,

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 求:

(a) \bar{A} ; (b) \bar{B} ; (c) $\bar{A \cup B}$; (d) $\bar{A \cap B}$;

(e) $\overline{A \cup B}$; (f) $\overline{A \cap B}$; (g) 验证 $A - B = A \cap \bar{B}$.

解: 根据补集的定义(见上册第 7 页):

(a) $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$; (b) $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$;

(c) $\bar{A \cup B} = \{4, 5, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$;

(d) $\bar{A \cap B} = \{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \{5\}$;

(e) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (根据摩根律, 见上册第 17 页 5)

$= \{5\}$ (根据上面(d)的结果);

(f) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (摩根律) $\stackrel{(c)}{=} \{1, 3, 4, 5, 6\}$;

(g) $\because A - B = \{1, 2, 3\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3\}$ (1)

$A \cap \bar{B} \stackrel{(b)}{=} \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$ (2)

比较(1), (2)两式, 不难看出: 它们的右边相同, 据此推知它们的左边必相等, 即必有 $A - B = A \cap \bar{B}$. 证毕.

10.11 如果 A 为非空集合, 下列各式哪些对, 哪些错? 为什么?

(a) $A \cup A = A$; (b) $A \cap A = A$; (c) $A \cap A = \emptyset$;

(d) $A \cap \emptyset = A$; (e) $A \cup \emptyset = \emptyset$; (f) $A \cup U = U$;

(g) $A \cup U = A$; (h) $A \cap \emptyset = \emptyset$; (i) $A - A = A$;

(j) $A - A = \emptyset$.

答: 根据并、交、差集的定义与性质(见二卷上册第 6~8 页), 上列各式中对有:(a), (b), (f), (h), (j)式; 错的有:(c), (d), (e), (g), (i)式.

10.12 如果 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{d, e, f\}$, 验证:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$\text{证:} \because A = \{a, b, c, d\} \quad (\text{已知}), \quad (1)$$

$$B = \{c, d, e\} \quad (\text{已知}), \quad (2)$$

$$C = \{d, e, f\} \quad (\text{已知}), \quad (3)$$

$$B \cup C \stackrel{(2), (3)}{=} \{c, d, e\} \cup \{d, e, f\} = \{c, d, e, f\}. \quad (4)$$

$$A \cap (B \cup C) \stackrel{(1), (4)}{=} \{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e, f\} = \{c, d\}. \quad (5)$$

$$A \cap B \stackrel{(1), (2)}{=} \{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e\} = \{c, d\}. \quad (6)$$

$$A \cap C \stackrel{(1), (3)}{=} \{a, b, c, d\} \cap \{d, e, f\} = \{d\}. \quad (7)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \stackrel{(6), (7)}{=} \{c, d\} \cup \{d\} = \{c, d\}. \quad (8)$$

比较(5), (8)两式, 不难看出: 它们的右边相同, 据此推知, 它们的左边必相等, 即必有 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

证毕.

10.13 用集合的运算规律证明: $X \cup \overline{(X \cap Y)} \cup Y = U$.

证: 关于集合的运算规律我们在第二卷上册(第9~20页)已经讲过, 现在利用这些规律中的有关部分, 来证明所给的关系式.

$$\begin{aligned} \therefore X \cup \overline{(X \cap Y)} \cup Y &= X \cup (\bar{X} \cup \bar{Y}) \cup Y \quad (\text{摩根律}) \\ &= (X \cup \bar{X}) \cup (\bar{Y} \cup Y) \quad (\text{结合律}) \\ &= (U) \cup (U) \quad (\text{补集的性质, 见二卷上册第7页}) \\ &= U \quad (\text{根据并集的性质, 见上册第6页}), \end{aligned}$$

$$\therefore X \cup \overline{(X \cap Y)} \cup Y = U. \quad \text{证毕.}$$

二、关于习题 10.2 的讲解

这个习题在第二卷上册第34页, 是讲了实数集之后布置的, 自学者在做这个习题之前, 应先把第23~34页的课文与例题看懂, 然后再做这个习题; 做这个习题时, 如果还有困难, 可看下面的

讲解,但看懂之后,自己仍应独立、正确、认真地做一遍,以培养和锻炼自己的解题能力.

10.14 解下列不等式:

- (a) $|x| < 3$; (b) $x^2 \leq 16$; (c) $|x-2| < 5$;
 (d) $0 < (x-1)^2 \leq 9$; (e) $|x| > x$; (f) $\left| \frac{x}{1+x} \right| < \frac{x}{1+x}$;
 (g) $|x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2$;
 (h) $|ax - x_0| < \delta$ ($a > 0, \delta > 0, x_0$ 均为常数).

解:(a)利用上册25页公式[10.19],不等式 $|x| < 3$ 的解为:

$$-3 < x < 3.$$

(b)在不等式 $x^2 \leq 16$ 的两边开平方,得 $|x| \leq 4$;

再利用上册25页公式[10.18],由 $|x| \leq 4$,得 $-4 \leq x \leq 4$.

这就是不等式 $x^2 \leq 16$ 的解.

(c) $\because |x-2| < 5$ 与 $-5 < x-2 < 5$ (1)

等价(根据公式[10.19]),在(1)式的左、中、右同时加2,得:

$-3 < x < 7$,这就是不等式 $|x-2| < 5$ 的解.

(d) \because 不等式 $0 < (x-1)^2 \leq 9$ 等价于不等式组:

$$\begin{cases} (x-1)^2 \leq 9 \\ x \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |x-1| \leq 3 \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-1 \leq 3 \\ x \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

\therefore 不等式 $0 < (x-1)^2 \leq 9$ 的解为 $[-2, 1) \cup (1, 4]$.

(e) $|x| > x$. (2)

若 $x \geq 0$, 则 $|x| = x$ (根据绝对值的定义,见上册24页

[10.15]式), 于是不等式(2)可写成 $x > x$, 这不可能, 因为任何一个非负的实数都不可能“自己大于自己”.

若 $x < 0$, 则 $|x| = -x$ (根据绝对值的定义), 此时, (2)式等价于:

$$-x > x, \quad 2x < 0. \quad (3)$$

$\therefore 2 > 0$, \therefore 由(3)式得 $x < 0$, 这就是不等式 $|x| > x$ 的解.

$$(f) \quad \left| \frac{x}{1+x} \right| < \frac{x}{1+x}. \quad (4)$$

若 $\frac{x}{1+x} \geq 0$, 则 $\left| \frac{x}{1+x} \right| = \frac{x}{1+x}$ (根据绝对值的定义), 此时, (4) 式等价于 $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+x}$ (矛盾), 即 $\frac{x}{1+x} \geq 0$ 时, 不等式(4)无解.

若 $\frac{x}{1+x} < 0$, 则 $\left| \frac{x}{1+x} \right| = -\frac{x}{1+x}$ 此时, 不等式(4)等价于:

$$-\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+x}, \quad 2\frac{x}{1+x} > 0, \quad \frac{x}{1+x} > 0, \quad (5)$$

但前面已讲过, $\frac{x}{1+x} > 0$ 时, 不等式(4)无解.

即(f)中的不等式无解.

$$(g) \quad |x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2. \quad (6)$$

当 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ 时, $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ (根据定义), 此时, 不等式(6)等价于 $x^2 - 3x + 2 \geq x^2 - 3x + 2$ (矛盾).

即 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ 时, 不等式(6)无解.

当 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 时, $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$ (根据定义), 此时不等式(6)等价于 $-(x^2 - 3x + 2) > x^2 - 3x + 2$,

$$2(x^2 - 3x + 2) < 0. \quad (7)$$

$\therefore 2 > 0$, \therefore 由(7)式知, $x^2 - 3x + 2 < 0$,

$$(x-1)(x-2) < 0. \quad (8)$$

由(8)式, 得不等式组:

$$(三) \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 < 0; \end{cases} \quad (四) \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 > 0. \end{cases}$$

解不等式组(三), 得 $1 < x < 2$.

解不等式组(四), 得 $x < 1$ 且 $x > 2$ (矛盾), 即不等式组(四)无解, 因不等式(6)与不等式组(三)等价, 所以, 不等式组(三)的

解 $1 < x < 2$ 也是不等式(6)的解, 即

$|x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2$ 的解为 $1 < x < 2$.

(h) $|ax - x_0| < \delta$ ($a > 0$), $-\delta < ax - x_0 < \delta$,

$$x_0 - \delta < ax < x_0 + \delta, \quad \frac{x_0 - \delta}{a} < x < \frac{x_0 + \delta}{a}.$$

这就是不等式 $|ax - x_0| < \delta$ 的解.

10.15 求下列方程的实根:

(a) $|x| = x + 1$; (b) $|2x + 3| = x^2$;

(c) $|\sin x| = \sin x + 2$; (d) $|x| = -x$.

解: (a) 若 $x \geq 0$, 则 $|x| = x$ (根据绝对值的定义), 此时, 方程 (a) 等价于 $x = x + 1$ (矛盾), 即 $x \geq 0$ 时, 方程 (a) 无解; 若 $x < 0$, 则 $|x| = -x$, 此时, 方程 (a) 等价于:

$$-x = x + 1, \quad -2x = 1, \quad x = -\frac{1}{2},$$

这就是方程 (a) 的根.

(b) $|2x + 3| = x^2$.

若 $2x + 3 \geq 0$, 则 $|2x + 3| = 2x + 3$ (根据绝对值的定义), 此时方程 (b) 等价于:

$$\begin{aligned} 2x + 3 = x^2, \quad x^2 - 2x - 3 = 0, \quad (x + 1)(x - 3) = 0, \\ x + 1 = 0, \quad x - 3 = 0; \quad x = -1, x = 3. \end{aligned}$$

若 $2x + 3 < 0$, 则 $|2x + 3| = -(2x + 3)$, 此时, 方程 (b) 等价于 $-(2x + 3) = x^2$, $x^2 + 2x + 3 = 0$, (1)

因一元二次方程 (1) 的判别式 $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 < 0$, 所以方程 (1) 无实根, 即当 $2x + 3 < 0$ 时, 方程 (b) 无实根.

综上所述, 方程 (b) 的实根为 $x = -1$ 及 $x = 3$.

(c) $|\sin x| = \sin x + 2$.

若 $\sin x \geq 0$, 则 $|\sin x| = \sin x$, (根据绝对值的定义,) 此时, 方程 (c) 等价于 $\sin x = \sin x + 2$ (矛盾), 即 $\sin x \geq 0$ 时, 方程 (c) 无实根.

若 $\sin x < 0$, 则 $|\sin x| = -\sin x$, 此时, 方程(c)等价于
 $-\sin x = \sin x + 2, \quad 2\sin x = -2, \quad \sin x = -1,$

$$x = \text{Arcsin}(-1) = \left(\frac{3}{2} + 2n\right)\pi, n \text{ 为整数.}$$

这就是方程(c)的实根(无穷多个).

$$(d) |x| = -x.$$

若 $x \geq 0$, 则 $|x| = x$, 此时方程(d)等价于 $x = -x, 2x = 0,$
 $\therefore 2 \neq 0, \therefore x = 0.$ (2)

若 $x < 0$, 则 $|x| = -x$, 此时, 方程(d)等价于 $-x = -x$, 这是一个恒等式, 即当 $x < 0$ 时, 方程(e)恒成立.

综合以上两种情形下的结果, 知方程(e)的实根为 $x \leq 0$.

10.16 用区间表示满足下列不等式的所有 x 值的集合:

- (a) $|x| \leq 2;$ (b) $|x-2| \leq 1;$ (c) $|x| > 4;$
(d) $|x+1| > 3;$ (e) $|x-a| < \varepsilon (\varepsilon > 0, a \text{ 为常数}).$

解: 先用解 10.14 题的方法, 解所给 5 个不等式, 然后再用区间表示这些不等式的解, 也就是用区间表示满足这些不等式的所有 x 值的集合.

(a) $|x| \leq 2, \quad -2 \leq x \leq 2$, 即满足不等式 $|x| \leq 2$ 的所有 x 值的集合为区间 $[-2, 2]$.

(b) $|x-2| \leq 1, \quad -1 \leq x-2 \leq 1, \quad 1 \leq x \leq 3$, 即满足不等式 $|x-2| \leq 1$ 的所有 x 值的集合为区间 $[1, 3]$.

(c) $|x| > 4, \quad (x < -4) \cup (x > 4)$, 即满足不等式 $|x| > 4$ 的所有 x 值的集合为区间 $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

(d) $|x+1| > 3, \quad (x+1 < -3) \cup (x+1 > 3),$
 $(x < -4) \cup (x > 2)$, 即满足不等式 $|x+1| > 3$ 的所有 x 值的集合为区间 $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

(e) $|x-a| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < x-a < \varepsilon, \quad a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, 即满足不等式 $|x-a| < \varepsilon$ 的所有 x 值的集合为区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

10.17 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来:

$$(a) A = \{x \mid |x+3| < 2\}; \quad (b) B = \{x \mid 1 < |x-2| < 3\}.$$

解:(a) $\because |x+3| < 2, \quad -2 < x+3 < 2, \quad -5 < x < -1$

\therefore 点集 $A = \{x \mid |x+3| < 2\}$ 可用区间 $(-5, -1)$ 表示.

(如图2所示).

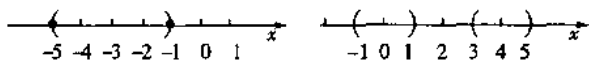


图2

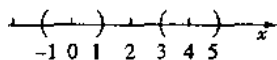


图3

(b) $\because 1 < |x-2| < 3$, 等价于

$$\begin{cases} |x-2| > 1 \\ |x-2| < 3, \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2 < -1) \cup (x-2) > 1 \\ -3 < x-2 < 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x < 1) \cup (x > 3) \\ -1 < x < 5, \end{cases} \quad (-1 < x < 1) \cup (3 < x < 5).$$

\therefore 点集 $B = \{x \mid 1 < |x-2| < 3\}$ 可用区间 $(-1, 1) \cup (3, 5)$ 表示(如图3所示).

10.18 下列不等式中,哪些是邻域,哪些不是,为什么?

$$(a) |x| \leq 3; \quad (b) |x+1| < 3;$$

$$(c) 0 < |x+1| < 3; \quad (d) |x-2| < \frac{1}{2}.$$

答:根据数轴上点的邻域的定义,(见二卷上册28页IV).

(a) $|x| \leq 3$ 不是邻域,因为邻域不包括端点,而不等式 $|x| \leq 3$ 却包括端点.

(c) $0 < |x+1| < 3$ 也不是邻域,因为邻域包括中心,而不等式 $0 < |x+1| < 3$ 却不包括中心 -1 .

(b) $|x+1| < 3$ 是点 -1 的3邻域.

(d) $|x-2| < \frac{1}{2}$ 是点2的 $\frac{1}{2}$ 邻域.