高等院校精品课程建设教材

高等数学

——及其思想方法与实验

GAODENG SHUXUE

JIQI SIXIANG FANGFA YU SHIYAN

吴炯圻 陈跃辉 唐振松 编著

（下册）

厦门大学出版社

XIAMEN UNIVERSITY PRESS

高等院校精品课程建设教

高等数学

——及其思想方法与实验

（下册）

吴炯圻 陈跃辉 唐振松 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学——及其思想方法与实验/吴炯圻等编著. —厦门:厦门大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-5615-2850-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.吴…　Ⅲ.高等学校　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 127493 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门昕嘉莹印刷有限公司印刷
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
开本:787×960　1/16　印张:41.25　插页:4
字数:715 千字　印数:0001～4000 册
定价:48.00 元(上、下册)

内容简介

本书以数学思想方法为指导，阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用，分为上、下两册。上册（1－6 章）包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程；下册（7－11 章）包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。各章均附有数学实验和思想方法选讲各一节，书末附有各章习题的参考答案。此外，上册书末还附有几种常用曲线、积分表、Mathematica 的使用简介。

本书适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生，也可供其他专业的师生教学参考。

前　言

本套《高等数学》教材是福建省教育厅高校精品课程立项建设的一个成果，是我校长期开设这门课程的经验总结，凝聚了校内、外许多老师多年辛勤劳动的心血。

全书以数学思想方法为指导，阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用，分为上下两册。上册(1—6章)包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程；下册(7—11章)包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。各章均附有数学实验和思想方法选讲各一节，书末还附有几种常用曲线、积分表、Mathematica的使用简介与各章习题的参考答案。

本书适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生(少课时的专业对教材中附上星号*的章节可以选用或不用)，也可供其他专业的师生教学参考。

本书的特点是：

1. 顺应现代教育思想的潮流和教育观念的变革，适合素质教育的推进，突出数学思想方法的作用。在讲授数学的内容时，重视概念引入的背景和应用意识的培养，重视提出问题和解决问题的思路的启发，重视数学思想的渗透与基本数学方法的训练；此外，每章最后一节都结合该章的数学知识有系统地讲解数学思想方法，旨在帮助读者进一步加深对数学原理及其思想方法的理解、适当了解相关的数学历史事件和当今的发展信息，开阔视野、增加学习兴趣。

2. 在教学内容上，在保证达到“高等数学课程教学大纲”要求的前提下，努力吸收当前一些教材改革中的成功举措，融合多所高校先进的教学经验；注意文理渗透，体现微积分基本思想方法在理、工、经、管等领域中的应用。为了加强应用意识和创新能力的培养，每章附有一节数学实验，用于指导读者通过上机实验，验证公式、建立数学模型、学习计算方法。

3. 继承传统教材结构严谨、逻辑清晰的优点，做到突出重点、抓住关键；尽可能保证理论完整、推理严密，又力求通俗易懂、便于自学；同时还注意考虑到各类读者对这一课程的不同需要。

本书由吴炯圻教授(2003年福建省高等学校教学名师奖获得者)、系副主任

陈跃辉副教授、高等数学教研室主任唐振松副教授编著。具体地，各章的数学实验和思想方法选讲分别由陈跃辉和吴炯圻编写；第2、3、4、5和9章的编写主要由唐振松负责；第10、11章主要由陈跃辉负责；第1、6、7、8章及全书的文字统一处理工作主要由吴炯圻负责。

我校副校长李进金教授(2007年福建省高等学校教学名师奖获得者)对《高等数学》课程建设和本教材的编写非常关心和支持；王桂芳教授、邱宜坪教授和许多同事对本书的早期版本提出了宝贵的意见与建议；李克典教授对本书下册的修改稿提出了许多重要的意见与建议。谨此向他们表示衷心的感谢。

本书较多地参考了李进金教授主编的《高等数学》教材，也参考了国内多部优秀的同类教材。除了在书末列出这些参考文献之外，我们在此向这些文献的作者们致以诚挚的谢意。

同时，我们向支持本书编写、试用和出版的各单位有关领导和广大师生致谢。

限于编著者的学识、水平和能力，书中可能仍有不足与错漏之处，欢迎使用本书的老师和读者不吝指正。

编著者

于漳州师范学院数学与信息科学系

2007.5.1

目　录

第七章

空间解析几何

类似于平面解析几何，空间解析几何的基本思想是：通过建立坐标系，把空间的点与有序的三元实数组建立一一对应，使空间的图形与方程建立对应，从而用代数的方法来研究空间中的几何问题. 根据多元微积分学的需要，本章主要的任务是介绍空间中的平面、直线、曲面与曲线及其重要性质. 在许多情形下，特别是研究平面与直线时，采用向量这一重要的工具有许多优越性. 因此，本章也简要地介绍了向量的概念及其运算.

§7.1　向量及其线性运算

§7.1.1　空间直角坐标系

在空间取定一点 O，取三条两两相互垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，使得它们都以 O 为原点并具有相同的长度单位. 这三条数轴分别称为 **x 轴**（横轴），**y 轴**（纵轴）和 **z 轴**（竖轴），统称为坐标轴（见图 7-1-1）. 通常把 x 轴和 y 轴放置在水平面上，使 z 轴成为铅垂线，并使它们的正方向符合右手规则，即若用右手握住 z 轴，大拇指指向 z 轴正向，则其余四指弯曲的方向就是从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 至 y 轴正向的方向（如图 7-1-2）. 这样，就构成了空间的一个直角坐标系，称为**直角坐标系 $Oxyz$**，点 O 称为**坐标原点**.

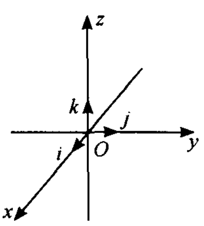


图 7-1-1

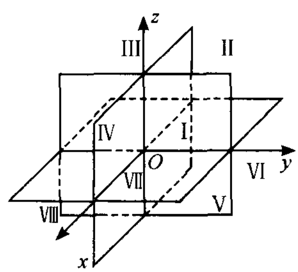


图 7-1-2

三条坐标轴中的任意两条都确定了一个平面，这样形成的三个平面统称为**坐标面**，其中 x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 ***xOy* 面**，y 轴与 z 轴确定的坐标面称为 ***yOz* 面**，z 轴与 x 轴确定的坐标面称为 ***zOx* 面**. 三个坐标面把空间分为八个部分，每个部分称为一个**卦限**. 含有三个坐标轴的正半轴的卦限叫**第Ⅰ卦限**，在 xOy 面上方的其他三个卦限，按逆时针方向依次称为**第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限**. 在 xOy 面下方与第Ⅰ卦限邻接的卦限称为**第Ⅴ卦限**，其他卦限按逆时针方向依次称为**第Ⅵ、第Ⅶ、第Ⅷ卦限**，它们分别与第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限邻接(图 7-1-2).

于是，对为空间中任意一点 M，可过 M 作三个平面使之分别垂直于三条坐标轴. 设这三个平面与 x 轴，y 轴，z 轴的交点依次为 P,Q,R(见图 7-1-3)，而 P，Q,R 在 x 轴，y 轴，z 轴的坐标依次是 x,y,z. 那么，空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序组 (x,y,z)，称之为点 M 的**直角坐标**. 其中 x,y,z 依次称为点 M 的**横坐标、纵坐标和竖坐标**，或依次称为点 M 的**第一坐标、第二坐标和第三坐标**.

反之，对于给定的一个有序组 (x,y,z)，可以依次在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后过点 P,Q 和 R 各作一个平面分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴. 那么，这三个平面的交点 M 就是由有序组 (x,y,z) 确定的唯一的点，且 (x,y,z) 正好是点 M 的坐标. 这样一来，空间的点 M 与有序组 —M 的坐标 (x,y,z) 之间就建立了一一对应.

坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记作 $M(x,y,z)$. 于是空间中的两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 重合当且仅当它们的对应坐标相等，即 $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

坐标轴和坐标面上的点，其坐标有一定的特征. $M(x,y,z)$ 若在 x 轴上时，则 $y = z = 0$,；若在 y 轴上时，则 $x = z = 0$；若在 y 轴上时，则 $x = z = 0$；特别，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$. 若 $M(x,y,z)$ 在 xOy 面，yOz 面或 zOx 面上，则坐标依次为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

注意　(x,y,z) 是三元有序数组，因此空间也称为是三维的；类似地，平面称为二维的，直线称为一维的. 直角坐标系 $Oxyz$ 中融合了数轴 Ox，Oy，Oz，其中每一个单独使用时各是一个一维坐标系；还融合了坐标平面 xOy，yOz 和 zOx，其中每一个单独使用时各是一个平面(二维)坐标系. 空间中的一个点当落在这些数轴或坐标平面时，则关于不同维的坐标系的坐标不同. 例如，P,Q,R 在坐标轴 Ox，Oy，Oz 上的坐标分别为 x,y,z，而在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$. 也就是说，当 P,Q,R 看成一维坐标系中的点时，它的坐标只有一个，看成三维坐标系中的点时，有三个坐标并构成一个有序组.

§7.1.2　向量及其线性运算

1. 向量的概念

通过对数学和物理、力学中遇到的量进行观察发现，如质量、时间、面积、密度等一类量，它们完全由数值决定，称为**数量**；而如力、力矩、速度、加速度等另一类量，不仅有大小，而且有方向. 我们把既有大小，又有方向的量称为**向量**或**矢量**. 为了区别于数量，用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F},\cdots$ 或带箭头的字母 $\vec{a},\vec{r},\vec{v},\vec{F},\cdots$ 表示向量. 向量是解析几何的重要工具. 在学习空间解析几何的有关内容之前，我们将对向量的概念和一些基本的运算做简要的介绍.

如果把一条线段规定了起点(设为 A) 和终点(设为 B)，我们就得到一条有向线段$\overrightarrow{AB}$(图 7-1-3)，它代表了一个确定的向量 $\boldsymbol{a}$，这时，$\overrightarrow{AB}$ 段的长度代表向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，$\overrightarrow{AB}$ 的方向(从 A 到 B) 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 为了叙述和使用方便，今后把向量 $\boldsymbol{a}$ 和表示它的有向线段$\overrightarrow{AB}$ 不加区别，即有向线段$\overrightarrow{AB}$ 也说成向量$\overrightarrow{AB}$，而向量 $\boldsymbol{a}$ 也可看成有向线段.

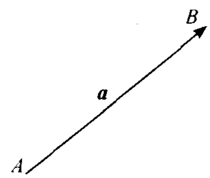


图 7-1-3

在数学研究中，我们只研究与始点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称为**向量**. 取定单位长度后，线段 AB 的长度称为向量$\overrightarrow{AB}$(或 a) 的**长度**或**模**，记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，并且方向相同，则说它们是**相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 根据这个定义，一个向量经过平行移动后得到的向量仍与原来的向量相等；经过平行移动后完全重合的向量相等.

模为 0 的向量，称为**零向量**. 零向量就是始点和终点重合的向量，所以零向量没有确定的方向. 我们约定零向量可以指向任何一个方向，因此零向量与任何向量平行；一切零向量都相等，记为 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$. 把一个向量的始点和终点互换即得原向量的负向量，故 $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. 由负向量的定义可知 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

2. 向量的加减运算

力学上关于力、速度、加速度合成的平行四边形法则告诉我们：当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行时，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC(见图 7-1-4)，那么，向量$\overrightarrow{AC}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的合成.

对平行四边形法则进行概括和推广，可得到如下**三角形法则**，并由此给出向量加法的定义：对任意两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任取点 A 作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以 B 为起点作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(见图 7-1-5)，则向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

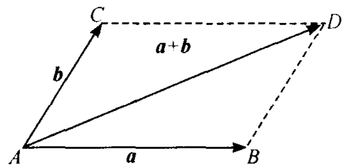


图 7-1-4

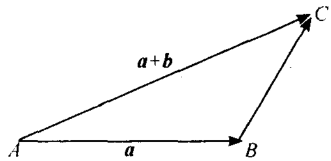


图 7-1-5

不难看出，三角形法则包括了平行四边形法则，其中向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的合成就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和．对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的情形，由三角形法则可推出，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向不变，长度等于两向量长度之和；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 异向时，若其中一个是另一个的负向量时，其和为零向量，否则，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中较长者的方向，长度等于较长者的长度与较短者的长度之差．

易证向量的加法具有以下运算性质：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量的加法满足交换律和结合律，故向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加可按照**多边形法则**进行：取定一点 A_0，依次作向量 $\overrightarrow{A_0A_1}$，$\overrightarrow{A_1A_2}$，$\cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$，使得 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}=\boldsymbol{a}_k$，$k=1,2,\cdots,n$，那么以 A_0 为起点，A_n 为终点的向量 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{A_0A_n}$ 就是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，记作

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

向量的减法定义为加法的逆运算：若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**（见图 7-1-6(a)），记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由三角形法则不难看出，把向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$，就得到向量 $\boldsymbol{c}$（见图 7-1-6(b)），即有如下结论：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

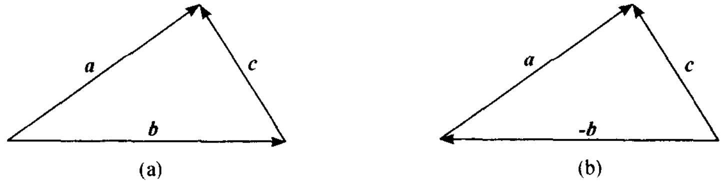


图 7-1-6

因为三角形两边之和大于第三边，所以如下所谓三角不等式成立：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中第一式的等号当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时成立，第二式的等号当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时成立.

例 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是方向互不相同的向量，试证明，依次将它们的终点与起点相连能构成一个三角形的充要条件是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性：依次将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的终点与起点相连接构成三角形 ABC（图 7-1-7），则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，因 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的起点和终点重合，由多边形法则知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

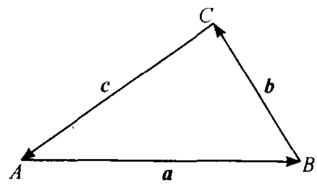


图 7-1-7

充分性：取向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 据题设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，可知 $\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，进而推出 $\boldsymbol{c}=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$，这说明向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点重合，故三个向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ 构成一个 $\triangle ABC$，即向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按题设方法相连接可构成一个三角形.

3. 向量的数乘

把一组向量表示成具有相同始点的有向线段时，如果它们位于同一直线（或同一平面）上，就称这一组向量**共线**（或**共面**）.

不难看出，若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则它们要么同向，要么反向，这时，记之为 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$. 又，一个向量的长度放大或缩小后，结果仍是位于同一直线上的向量. 通过对这种现象的观察，人们进一步归纳出了如下“数与向量相乘”的定义：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 数与向量相乘的运算称为**向量的数乘**.

易知，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$. 反之若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 特别当 $\lambda=\pm1$ 时，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 易知 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$. 当向量 $\boldsymbol{a}\neq0$ 时，则 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$，即任一非零向量除以它的模就得到了与原向量同方向的单位向量，这一过程称为**向量的单位化**.

向量的数乘具有以下运算性质：对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和任意实数 λ,μ 有

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加减运算和数乘运算统称为**向量的线性运算**. 向量的线性运算可用于描述向量共线和共面的特征. 我们有如下定理（这里略去证明）：

定理 1 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}$

$= \lambda \boldsymbol{a}$.

推论　向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 k,m，使得 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

定理 2　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则存在唯一的一对实数 k,m，使得 $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$.

推论　向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在三个不全为零的实数 k,l,m，使得 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

§7.1.3　用坐标表示向量的线性运算

把向量放在坐标系 $Oxyz$ 中来讨论，就可以建立相应的坐标，并把向量的运算用数的运算表示出来.

在直角坐标系 $Oxyz$ 中，以 O 为起点，分别取与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的正方向同方向的三个单位向量，记之为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$（图 7-1-8），称之为**坐标向量**或**基向量**.

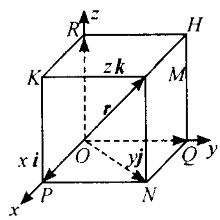


图 7-1-8

设 $\boldsymbol{r}$ 是一个向量. 由于向量可以平移，我们可以假定它的起点为 O，终点为 M，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$. 把向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 反过来，给定空间的一点 M，也确定了一个向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 这样就建立了点 M 与向量 $\boldsymbol{r}$ 之间的一一对应. 于是，把点 M 的坐标 (x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，并记作

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z). \tag{7.1.1}$$

设点 P,Q,R 分别在数轴 Ox,Oy,Oz 上且关于所在数轴的坐标分别为 x,y,z，则

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}.$$

根据向量的加法知，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{7.1.2}$$

这说明，任何向量都可以表示成坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合.（7.1.2）称为向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为向量 r 沿三个坐标轴方向的**分向量**. 为了突出向量的坐标分解，直角坐标系 $Oxyz$ 也称为**直角坐标系**$[\boldsymbol{O};\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$.

于是一个向量有两个等价的表达方式，即（7.1.1）的坐标表达式和（7.1.2）的分向量表达式，前一种方式是代数的；而后一种方式是几何的，借助于（7.1.2），我们可以把上一小节关于向量的运算的结论转化为坐标的表达方式.

利用向量的坐标可推出：两个向量相等当且仅当它们的对应坐标分别相等，即 $(x_1,y_1,z_1)=(x_2,y_2,z_2)$ 当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$ 同时成立.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，即

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$

根据向量加法的交换律和结合律可验证：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k};$$

而由向量数乘的运算性质，易验证对任何实数 λ 有，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda a_2)\boldsymbol{j}+(\lambda a_3)\boldsymbol{k}$.

把它们写成向量的坐标形式，就得到：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$;

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$;

(3) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$，$\lambda$ 为实数.

设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意两点，容易得出，向量

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

进一步，我们有如下定理：

定理 3 设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意两点，则在线段 AB 上使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}(\lambda\neq-1)$ 的点 M 的坐标是

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right). \tag{7.1.4}$$

证 如图 7-1-9，有 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，故 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{MB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$，得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

将 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标代入，即可得结论. 证毕.

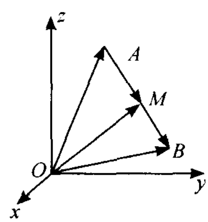


图 7-1-9

注 (7.1.4) 称为空间解析几何的**定比分点坐标公式**，它是平面上同名公式的推广. 特别当 $\lambda=1$ 时，从中得到如下线段中点 M 的坐标表达式：

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

定理 1′ 任一向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 共线（即 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$）的充要条件是它们的对应坐标成比例，即

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}. \tag{7.1.5}$$

说明 上面连等的比式当分母有一个为 0，如 $a_1=0$，$a_2,a_3\neq0$ 时，应理解为：$b_1=0$，$\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$；当分母有两个为 0，如 $a_1=a_2=0$，而 $a_3\neq0$ 时，应理解为：$b_1=0$，$b_2=0$.

证　据定理 1，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$ 时，存在唯一实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 即

$$(b_1,b_2,b_3)=\lambda(a_1,a_2,a_3),$$

从而 $b_1=\lambda a_1$，$b_2=\lambda a_2$，$b_3=\lambda a_3$，故有(7.1.5).

反之，若(7.1.5)成立，令 $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}=\lambda$ 时，得 $b_1=\lambda a_1$，$b_2=\lambda a_2$，$b_3=\lambda a_3$，从而 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，故 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

§7.1.4　向量的模，方向余弦，投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$（见图 7-1-8）. 把空间中任意两点 A，B 之间的距离记作 $|AB|$，根据勾股定理可知

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2},$$

而 $|OP|=|x|$，$|OQ|=|y|$，$|OR|=|z|$，所以有如下**向量 $\boldsymbol{r}$ 的模的坐标表达式**：

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

由于任意两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，故由 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 可推出 A，B 两点间的**距离公式**：

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2. 方向角与方向余弦

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 设 $\angle AOB=\varphi$，$0\leqslant\varphi<\pi$，称 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 当夹角 φ 为直角时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直（正交），记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

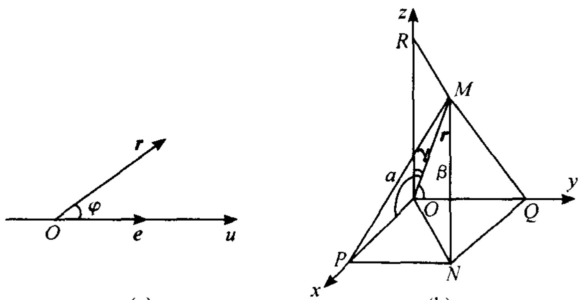
设 $\boldsymbol{e}$ 是确定数轴 Ou 的单位向量，则向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角 φ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 与数轴 Ou 的**夹角**，即 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}})$（图 7-1-10(a)）.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与直角坐标系的三个坐标轴正向的夹角 α，β，γ（图 7-1-10(b)）称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**. 设非零向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 由于 $MP\perp OP$，所以

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}. \tag{7.1.6}$$

因此，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|},\dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|},\dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r$.

那么，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是与向量 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$. 由于 $\boldsymbol{e}_r$ 刻画了向量 $\boldsymbol{r}$ 在



(a) (b)

图 7-1-10

坐标系中的方向,我们把它的坐标 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.显然

$$|\boldsymbol{e}_r| = \sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} = 1.$$

由上述讨论,我们得到了下面两个常用的等式:

(1)$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$;

(2)$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma.$

3. 向量的投影

设数轴 Ou 由定点 O 和单位向量 $\boldsymbol{e}$ 所确定.对任意向量 $\boldsymbol{r}$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,过点 M 作平面与 Ou 垂直,并与 Ou 交于点 M',称点 M' 为**点 M 在 Ou 轴上的投影**.设向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M'M}$,则模 $|\boldsymbol{b}|$ 恰是点 M 到 Ou 轴的距离.设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM'}$,称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 在 Ou 轴上的**分向量**.由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线,故存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$,称 λ 为 **$\boldsymbol{r}$ 在 Ou 轴上的投影**,记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$.由图 7-1-11 可看出 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{e}$,且向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定了 $\boldsymbol{r}$ 的一个分解:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}.$$

上式所给的分解称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的正交分解.

在直角坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,设 $\boldsymbol{r}$ 的坐标是 x,y,z,即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$(见图 7-1-12).根据向量坐标的定义可知

$$x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{r},\ y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{r},\ z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{r}.$$

易证,投影具有如下的性质:

设 Ou 是单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定的数轴,$\boldsymbol{r},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}$ 是任意向量,λ,μ 是任意实数,则

(i)$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}})$;

(ii)$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{w}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{v}$;

(iii)$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{w})=\lambda\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{w})$.

从投影定义知,投影 Prj_u 是从空间到 Ou 轴的一个映射,而其中性质(ii)和(iii)则说明投影映射是线性的,即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{w}+\mu\boldsymbol{v})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{w}+\mu\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{v}$.