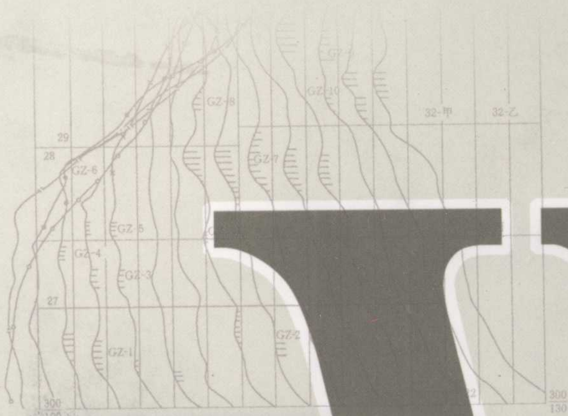
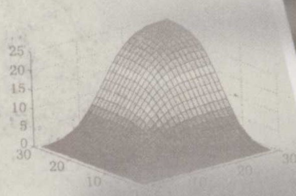
网函数插值理论及其应用

邱佩璋　陈启宏　著





$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)\\
&\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{1}{2}\left\{f\left(x_0,\frac{y_0+y_1}{2}\right)+f\left(x_1,\frac{y_0+y_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_0+x_1}{2},y_0\right)\right.\\
&\left.+f\left(\frac{x_0+x_1}{2},y_1\right)\right\}-\frac{1}{4}\{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_0)+f(x_0,y_1)\\
&+f(x_1,y_1)\}
\end{aligned}
\qquad (3.19)
$$

上海科学技术出版社

网函数插值理论及其应用

邱佩璋　陈启宏　著

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

网函数插值理论及其应用/邱佩璋，陈启宏著.—上海：上海科学技术出版社，2007.7
ISBN 978-7-5323-8974-2

Ⅰ.网… Ⅱ.①邱…②陈… Ⅲ.函数论-插值 Ⅳ.0174.42

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第082468号

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行
（上海钦州南路71号 邮政编码200235）
新华书店上海发行所经销
常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本787×1092 1/16 印张12.5
字数：174千字
2007年7月第1版 2007年7月第1次印刷
印数1—1500
定价：40.00元

内 容 提 要

本书介绍一种多变元函数的插值方法——网函数插值法。

第 1 篇以极其简单的方式介绍网函数插值法，揭示网函数插值法是多方向拟合一次误差调整的方法，其插值函数类是简单的高阶偏微分方程边值问题的解，有优美的 Coons 型结构以及明显的统计特征。同时，由过剩（不足）近似的概念出发引进二元似凸函数；第 2 篇引进高阶差分方程边值问题，把 Coons 型曲面拓广为分形曲面；第 3 篇象征性地介绍网函数插值法在一些方面的有效应用。例如，用于植物群落种群分布格局的研究表明：植物群落种群分布格局的结构有可能近似 Coons 型分形。书中一些有远景的研究尚待充分展开。

本书并不要求读者具有专门的数学知识，但如读者有过专门的数学训练则能更方便地阅读全书。

序　　言

本书介绍的网函数插值法，是一种多变元函数的插值法。介绍内容不求全面，着重于作者感兴趣的部分，其中包括作者和同事的一些研究结果。有的结果还未正式发表，是探索性质的。

网函数插值法这一名称，是作者从 William A. Cook 的一篇文章中引伸来的。Cook 原文中形象地称它为“节点网产生器”。对于一张曲面，用节点网产生器，可以从曲面边界上的节点来近似计算曲面的内节点，算法简单易行。我们将阐明，这一算法是单变元函数的 Lagrange 插值算法的极自然的推广。

网函数插值法易于掌握，便于用计算机自动划分网格。至于被计算的曲面块的划分，可以根据对曲面形态的事先估计而修改。

Cook 本人用网函数插值法，根据壳体在边界上的应变计算壳体的应力分布，计算结果与实验结果十分吻合。在我国，首先用这种算法进行了重力勘探区域场校正，计算结果得到钻孔试验证实。与常用的六点平均值法对比，网函数插值法显示了许多优点。网函数插值法还首先由我国生物数学工作者引入生物学界，用来研究植物群落种群分布的格局，对几何图形斑块和人工草地种群斑块进行计算机模拟。计算结果表明，网函数插值法比之生态学界经常使用的著名的邻接格子样方法，显示了许多优点。通过计算机仿真试验，表明网函数插值法用于图像恢复也是有效的。有趣的是，该算法用于海洋的合成孔径雷达影像，可以一定程度恢复被油膜覆盖住的图像。无疑，此方法可应用于广泛的科技领域，乃至社会、经济和金融领域。

由本书参考文献可见，作者与其合作者研究网函数插值法断断续续近 30 年，工作顺序和本书目录顺序远不相同。理论研究和实际应用是反复推进的。甚至于实际应用已取得令人喜悦的结果的时候，我们并不理解其深刻内涵。直到后来证明，网函数插值法可以用于分形几何，例如，可用于处处连续处处不可导的曲面，甚至有界而处处不连续的曲面，我们才认识到，此方法实际有效是自然的。物理、几何、分析相互印证，和谐有趣。

从本书可以看到，很有远景的研究尚待充分展开。例如，分形 CAD、高阶偏微分方程分形边值问题等。

本书以极其初等的方法介绍网函数插值法，并不假定读者具备专门的数学知识。与 Cook 的原文不同，本书将阐明这一方法的实质，回答应用中通常要遇到的一些理论问题，并提出改进和推广。与 S. A. Coons 的 Coons 曲面以及 W. J. Gordon 用分布格的研究不同，本书不仅方法初等，而且结果具体。其中有些概念和结果是我们试探性引入的。

本书汇集了多年来邱佩璋教授率其弟子们与相关高校和实际部门同仁精诚合作，在网函数插值理论与应用研究中取得的若干成果。作者感谢在本书正文和参考文献中提及的合作者，他们从不同角度做出了贡献。作者特别要感谢各自的家人数十年如一日始终不渝的全力支持。本书出版之际，我们深切缅怀先师吴新谋先生，书中无不见到他的影响。例如，用以研究网函数插值法的偏微分方程定解问题，其基本观点是吴先生一直十分强调与关注的。

本书作者及合作者的有关研究，曾得到国家自然科学基金、国防科工委军事预研基金的资助。

作者衷心感谢上海科学技术出版社编辑及排版人员为本书付出的辛勤劳动。

邱佩璋　陈启宏

目　　录

第2篇　Coons型分形曲面

第3篇　网函数插值法的应用

第 1 篇

网函数插值法

第 1 章 网函数插值的算法

在这一章只就极其简单的例子来阐明网函数插值的算法，有关定义和理论将在第 3 章介绍。在本章 §1.4，以面积加权平均构造网函数插值。

§1.1 最简单的例

在直角坐标 xOy 平面上，用 D 表示一个单位正方形，它的四条边平行于坐标轴，D 的中心点记作 Q。给定一个二变元三次多项式

$$f(x, y) = 4x^3 + 7x^2y + 3xy^2 + 5y \tag{1.1}$$

试用网函数插值算法从 $f(x, y)$ 在单位正方形 D 的边界上的值来计算它在 D 的中心点的值 $f(Q)$，并且看看计算的结果。

假设 D 的四个角点是 $P_1(0, 0)$，$P_2(1, 0)$，$P_3(1, 1)$ 和 $P_4(0, 1)$。从而 D 的中心点 Q 的坐标是 $(0.5, 0.5)$。过点 $Q(0.5, 0.5)$ 作单位正方形 D 的边的平行线，平行线与单位正方形 D 的四条边相交于四个点：$Q_1(0.5, 0)$，$Q_2(1, 0.5)$，$Q_3(0.5, 1)$ 和 $Q_4(0, 0.5)$（见图 1.1）。

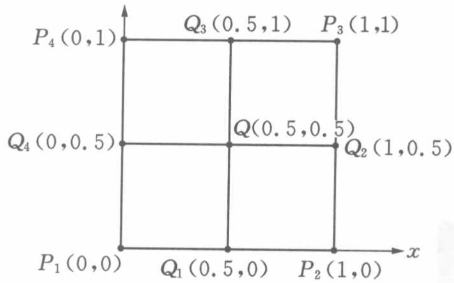


图 1.1

用网函数插值的算法计算值 $f(Q)$，采取以下五个步骤。

第一步：在单位正方形 D 的边上的八个点 P_i 和 Q_j 处，根据式(1.1)记录 f 的值如图 1.2。

$f(P_1) = f(0, 0) = 0$;　　$f(Q_1) = f(0.5, 0) = 0.5$;

$f(P_2) = f(1, 0) = 4$;　　$f(Q_2) = f(1, 0.5) = 10.75$;

$f(P_3) = f(1, 1) = 8.75$;　　$f(Q_3) = f(0.5, 1) = 8.75$;

$f(P_4) = f(0, 1) = 5$;　　$f(Q_4) = f(0, 0.5) = 2.5$;

$f(Q) = f(0.5, 0.5) = ?$

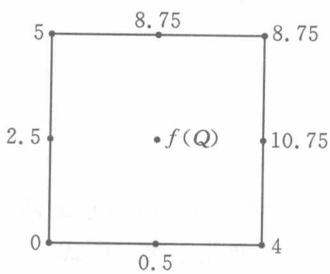


图 1.2　$f(x, y)$在 D 的边上八个点处的值

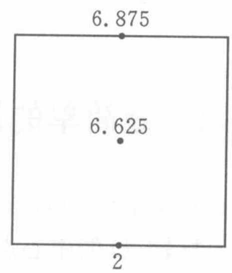


图 1.3　边值的横向平均值

第二步：在图 1.2 中，把左边和右边在同一行的一对数值相加的结果除以 2，这样算得的值记录在同一行的中间(如图 1.3)，其中，在中心点 Q 处记录的值用记号表示成 $F_1(Q)$。

$$F_1(Q_3) = 0.5\times(5+8.75) = 6.875;$$
$$F_1(Q) = 0.5\times(2.5+10.75) = 6.625;$$
$$F_1(Q_1) = 0.5\times(0+4) = 2$$

第三步：在图 1.2 中，把中间的一列上下一对数值相加的结果除以 2，这样算得的值记录在同一列的中间（如图 1.4），用记号表示成 $F_2(Q)$。

$$F_2(Q)=0.5\times(8.75+0.5)=4.625$$

图 1.4　边值的纵向平均值

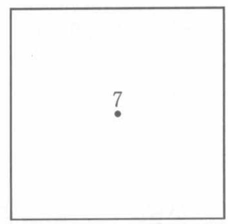


图 1.5　图 1.4 中边值的纵向平均值

第四步：在图 1.3 中，把一列的上下一对数值相加的结果除以 2，这样算得的值记录在同一列的中间（如图 1.5），用记号表示成 $F_3(Q)$。

$$F_3(Q)=7$$

第五步：从图 1.3 中单位正方形中心点 Q 处的值加上图 1.4 中 Q 处的值，再减去图 1.5 中 Q 处的值，计算结果用记号 $F(Q)$ 表示，即

$$\begin{aligned}F(Q)&=F_1(Q)+F_2(Q)-F_3(Q)\\&=6.625+4.625-7\\&=4.25\end{aligned}$$

这就是用网函数插值法算得 f 在 Q 点处的值。直接由式(1.1)算得 f 在 Q 点处的值

$$f(Q)=f(0.5,\ 0.5)=0.5+0.875+0.375-2.5=4.25$$

所以由网函数插值法算得的 f 在 Q 点的值 $F(Q)$ 是准确值。

事实上，由以上计算可见，为了计算 f 在 D 的中心处的值 $f(Q)$，只要知道函数 f 在 D 的边上的八个值就够了，并且无需求出函数 f 的具体表示式(1.1)。

§1.2　二变元三次多项式

以上用网函数插值法算得的值 $F(Q)$ 是 f 的准确值 $f(Q)$，就这一结

果来说，不仅不需要求出 f 的具体表示式，而且与 f 是怎样的二变元三次多项式无关。确切地说，我们要证明：对于任意一个二变元三次多项式 f，我们用上一节中的算法，根据 f 在单位正方形 D 的边界上的值计算得到的 f 在 D 的中心点 Q 的值，是准确值 $f(Q)$。

设二变元三次多项式

$$f(x,\ y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} \tag{1.2}$$

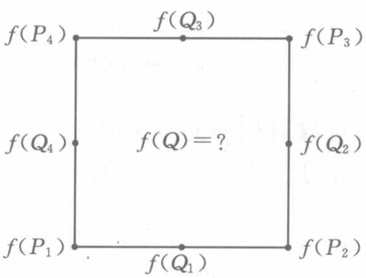


图 1.6

我们用网函数插值法计算它在正方形 D 的中点 Q 处的值 $f(Q)$。

第一步：在单位正方形 D 的边上八个点 P_i 和 Q_j 处，根据式(1.2)记录 f 的值(如图 1.6)。

在此，

$$f(P_1) = f(0,\ 0) = a_{00};$$

$$f(P_2) = f(0.5,\ 0) = 0.125 \cdot a_{30} + 0.25 \cdot a_{20} + 0.5 \cdot a_{10} + a_{00};$$

$$f(P_3) = f(1,\ 1) = a_{30} + a_{21} + a_{12} + a_{03} + a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{10} + a_{01} + a_{00};$$

$$f(P_4) = f(0,\ 1) = a_{03} + a_{02} + a_{01} + a_{00};$$

$$f(Q_1) = f(0.5,\ 0) = 0.125 \cdot a_{30} + 0.25 \cdot a_{20} + 0.5 \cdot a_{10} + a_{00};$$

$$f(Q_2) = f(1,\ 0.5) = a_{30} + 0.5 \cdot a_{21} + 0.25 \cdot a_{12} + 0.125 \cdot a_{03} + a_{20} + 0.5 \cdot a_{11} + 0.25 \cdot a_{02} + a_{10} + 0.5 \cdot a_{01} + a_{00};$$

$$f(Q_3) = f(0.5,\ 1) = 0.125 \cdot a_{30} + 0.25 \cdot a_{21} + 0.5 \cdot a_{12} + a_{03} + 0.25 \cdot a_{20} + 0.5 \cdot a_{11} + a_{02} + 0.5 \cdot a_{10} + a_{01} + a_{01} + a_{00};$$

$$f(Q_4) = f(0,\ 0.5) = 0.125 \cdot a_{03} + 0.25 \cdot a_{02} + 0.5 \cdot a_{01} + a_{00}$$

第二步：在图 1.6 中，把右边和左边在同一行的一对数值相加的结果除以 2。这样计算的值记录在同一行的中间(如图 1.7)，其中，在中心点 Q 处记录的值用记号表示成 $F_1(Q)$。.

$$F_1(Q_3) = 0.5 \cdot [f(P_4) + f(P_3)];$$

$$F_1(Q)=0.5\cdot[f(Q_4)+f(Q_2)];$$
$$F_1(Q_1)=0.5\cdot[f(P_1)+f(P_2)]$$

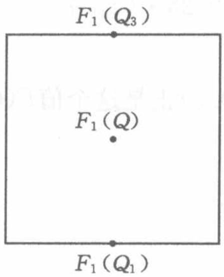


图 1.7

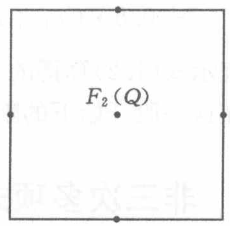


图 1.8

第三步：在图 1.6 中，把中间一列的上下一对数值相加的结果除以 2。这样算得的值记录在同一列的中间（如图 1.8），用记号表示成 $F_2(Q)$。

$$F_2(Q)=0.5\cdot[f(Q_3)+f(Q_1)]$$

第四步：在图 1.7 中，把一列的上下一对数值相加的结果除以 2。这样算得的值记录在同一列的中间（如图 1.9），用记号表示成 $F_3(Q)$。

$$F_3(Q)=0.5\cdot[F_1(Q_3)+F_1(Q_1)]$$

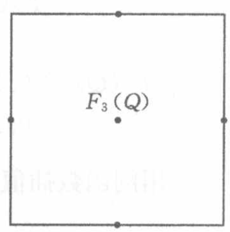


图 1.9

第五步：从图 1.7 中单位正方形中心点 Q 处的值加图 1.8 中 Q 处的值，再减去图 1.9 中 Q 处的值，用记号 $F(Q)$ 表示。$F(Q)$ 就是用网函数计算 f 在点 Q 处所得的值。确切地说，计算值

$$F(Q)=F_1(Q)+F_2(Q)-F_3(Q)$$

由图 1.7，图 1.8 和图 1.9 得

$$\begin{aligned}F(Q)&=0.5\cdot[f(Q_4)+f(Q_2)]+0.5\cdot[f(Q_3)+f(Q_1)]-0.5\cdot[F_1(Q_3)\\&\quad+F_1(Q_1)]\\&=0.5\cdot[f(Q_1)+f(Q_2)+f(Q_3)+f(Q_4)]-0.5\cdot[F_1(Q_3)\\&\quad+F_1(Q_1)]\\&=0.5\cdot[f(Q_1)+f(Q_2)+f(Q_3)+f(Q_4)]-0.25\cdot[f(P_1)\end{aligned}$$