国际奥赛金牌教练＋
国家奥赛命题研究专家
联袂编写

科学技术文献出版社

JINPAI AOSAI CONGSHU
金牌奥赛丛书

金牌奥赛高级教程

高二数学

·修订版·

JINPAI AOSAI CONGSHU

金牌奥赛高级教程 高一数学 ·修订版·

金牌奥赛高级教程 高二数学 ·修订版·

金牌奥赛高级教程 高一物理 ·修订版·

金牌奥赛高级教程 高二物理 ·修订版·

金牌奥赛高级教程 高一化学 ·修订版·

金牌奥赛高级教程 高二化学 ·修订版·

金牌奥赛高级教程 高中生物 ·修订版·

ISBN 978-7-5023-4781-9

定价：25.00元

封面设计 张宇澜

◉ 金牌奥赛

金牌奥赛高级教程

高二数学

（修订版）

总主编：耿立志　全国中学奥林匹克竞赛金牌教练
中科国际奥赛研究中心执行主任
国家首批骨干教师、全国特级教师

总审定：王永胜　中学奥林匹克竞赛研究专家
教育部新课程标准研制专家
重点大学教授、博士生导师

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥赛高级教程. 高二数学(修订版)/刘翠霞,石丽杰主编. -北京:科学技术文献出版社,2008.2

(金牌奥赛)

ISBN 978-7-5023-4781-9

Ⅰ. 金… Ⅱ. ①刘… ②石… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 093913 号

出　版　者　科学技术文献出版社
地　　　址　北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话　(010)51501739
图书发行部电话　(010)51501720,(010)51501722(传真)
邮购部电话　(010)51501729
网　　　址　http://www.stdph.com
E-mail: stdph@istic.ac.cn
策划编辑　科　文
责任编辑　白　明
责任校对　唐　炜
责任出版　王杰馨
发　行　者　科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者　富华印刷包装有限公司
版(印)次　2008 年 2 月第 2 版第 1 次印刷
开　　　本　787×1092　16 开
字　　　数　419 千
印　　　张　18.25
印　　　数　1～8000 册
定　　　价　25.00 元

(京)新登字 130 号

《金牌奥赛——高级教程》编委会

《金牌奥赛——高级教程》

前　言

为了满足广大师生对中学奥林匹克竞赛培训教材的迫切需求，充分体现国家新课程改革的精神，由著名奥赛研究专家耿立志老师精心策划、组织编著了《金牌奥赛——高级教程》丛书。高中部分包括数学、物理、化学、生物 4 个学科，共 7 个分册，涵盖高考和奥赛的全部重点内容。

本丛书特点是

权威性

丛书作者由来自全国奥赛名校的国际奥赛金牌教练；参加奥赛命题研究的全国重点大学知名教授、博士生导师；从事奥赛一线辅导的国家高级教练及主持高考命题研究的特级教师组成。

科学性

根据国家“十五规划”教育科研课题《研究性学习与奥林匹克竞赛的有效整合》的研究成果，参考全国奥林匹克竞赛规程，对最新考试内容进行标准解读与科学诠释，是全国第一部将奥赛与高考有效整合，并经实践证明既适合奥赛又适合高考的培优宝典。

高效性

丛书注重实战,特聘请来自教学一线的骨干教练执笔各分册的编写工作。关注全国奥赛动向,力求所选试题具有代表性、时代性和实用性。鼎力打造完全实战性丛书,迅速提升学生的竞赛成绩。

谨以此书,献给在求学路上奋力拼搏的莘莘学子们!

《金牌奥赛——高级教程》丛书编委会

2007年12月于清华园

目　录

第六章　不等式

目标菜单

【基础目标】

1. 理解不等式的性质及其应用.

2. 掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理,并会简单的应用.

3. 掌握用比较法、综合法、分析法证明简单的不等式.

4. 掌握某些简单不等式的解法.

5. 理解不等式$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

【拓展目标】

1. 弄清每一条不等式性质的条件和结论的相互依存关系,注意条件的加强和减弱给结论带来的变化.

2. 熟练掌握和用平均值不等式的方法和技巧,对应所满足的条件能够准确地把握并能应用.

3. 能够选择适当的方法证明不等式,并注意分析法和综合法的互相配合.

4. 能利用等价转化的,把分式不等式化为整式不等式并求解;把无理不等式、指数不等式、对数不等式化为代数不等式(或组)并求解.

5. 熟练掌握有关绝对值不等式的定理及其应用,能够利用不等式的知识,解决一些综合性问题.

备考链接

【高考点击】

1. 不等式的性质:

(1)对称性:$a>b\Leftrightarrow b<a$

(2)传递性:$a>b$ 且 $b>c\Rightarrow a>c$

(3)可加性：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+d$

$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$

(4)可乘性：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bc$，$\left.\begin{matrix} a>b \\ c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac<bd$，$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$

(5)乘方，开方性：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$；$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$　($n \in \mathrm{N}^*$)

2. 常用的基本不等式：

(1)若 a、$b \in \mathrm{R}$，则 $a^2 \geqslant 0$(当且仅当 $a=0$ 时，取"＝")，$(a-b)^2 \geqslant 0$(当且仅当 $a=b$ 时，取"＝")

(2)若 a、$b \in \mathrm{R}$，则 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时，取"＝")

(3)若 a、$b \in \mathrm{R}^+$，则 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时，取"＝")

(4)若 a、b、$c \in \mathrm{R}^+$，则 $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$（当且仅当 $a=b=c$ 时，取"＝")

(5)若 a、b、$c \in \mathrm{R}^+$，则 $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b$ 时，取"＝")

3. 常用的证明不等式的方法：

(1)比较法：作差：$a>b \Leftrightarrow a-b>0$，判断差的正负(或作商，$\frac{a}{b}>1$ 且 $b>0 \Rightarrow a>b$，判断商与 1 的大小).

(2)综合法：由因导果：$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$

(3)分析法：执果索因：$B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow B_n \Leftarrow A$

4. 几种常见简单不等式的解法：

(1)绝对值不等式：$|ax+b|<c \quad (c>0) \Leftrightarrow -c<ax+b<c$，

$|ax+b|>c \quad (c>0) \Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$.

(2)一元二次不等式：已知方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两根为 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，那么 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解为 $x>x_2$，或 $x<x_1$；$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解为 $x_1<x<x_2$.

(3)高次不等式的解法：数轴标根法.

(4)分式不等式的解法：$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x)>0$；$\frac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x)<0$

(5)无理不等式：

$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$，$\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases}$

$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} g(x)<0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$

(6)含绝对值不等式的解法：

等价法：$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$；

$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$

零点分段法：含有多个绝对值符号的不等式，可用“按零点分区间讨论”的方法.

(7)指数不等式的解法：$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)\ (a>1)$；$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$ $(0<a<1)$

(8)对数不等式的解法：$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)>g(x)\end{cases}\quad(a>1)$

$\log_a f(x)<\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)>g(x)\end{cases}\quad(1>a>0)$

5. 绝对值及绝对值不等式：

(1)$|a|\geqslant 0$（当且仅当 $a=0$ 时，取“=”）

(2)$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

(3)$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$

(4)$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$，$\|a|-|b\|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$

$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$，$\|a|-|b\|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$

【奥赛拓展】

1. 不等式的几个性质：

(1)乘方：$a>b\Leftrightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}\quad(n\in\mathbf{N}^*)$

(2)开方：$a>b\Leftrightarrow\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b}\quad(n\in\mathbf{N}^*)$

(3)倒数性质：$a>b>0$ 或 $0>a>b\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

(4)分数的性质：$a>b>0,m\in\mathbf{R}^+$，

则$\dfrac{b-m}{a-m}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m},\dfrac{a-m}{b-m}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+m}{b+m},(b-m>0)$

2. 排序不等式(又称排序原理)

设有两个有序数组 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 及 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$.

则 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$(同序和)$\geqslant a_1b_{j1}+a_2b_{j2}+\cdots+a_nb_{jn}$(乱序和)$\geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$(逆序和)

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列. 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号(对任一排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$)成立.

证明：不妨设在乱序和 S 中 $j_n\neq n$ 时(若 $j_n=n$，则考虑 j_{n-1})，且在和 S 中含有项 a_kb_n

$(k\neq n)$，则 $a_kb_n+a_nb_{j_n}\leqslant a_nb_{j_n}+a_nb_n$.　①

事实上，左－右$=(a_n-a_k)(b_n-b_{j_n})\geqslant 0$，

由此可知，当 $j_n\neq n$ 时，调换 $S=a_1b_{j1}+\cdots+a_kb_{jk}+\cdots+a_nb_{jn}(j_n\neq n)$ 中 b_n 与 j_n 位置(其余不动)，所得新和 $S_1\geqslant S$. 调整好 a_n 及 b_n 后，接着再仿上调整 a_{n-1} 与 b_{n-1}，又得 $S_2\geqslant S_1$. 如此至多经 $n-1$ 次调整得顺序和

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_{j1}+a_2b_{j2}+\cdots+a_nb_{jn}\quad ②$$

这就证得“顺序和不小于乱序和”. 显然，当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时②中等号成立. 反之，若它们不全相等，则必存在 j_n 及 k，使 $b_n>b_{j_n}$，$a_n>a_k$. 这时①中不等号成立. 因而对这个排列②中不等号成立.

类似地可证“乱序和不小于逆序和”.

3. 应用排序不等式可证明“平均不等式”：

设有 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均数和几何平均数分别是

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\text{和}G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

此外，还有调和平均数(在光学及电路分析中要用到)

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

和平方平均(在统计学及误差分析中用到)

$Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$这四个平均值有以下关系 $H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$.

其中等号成立的充分必要条件都是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

下面首先证明算术平均数－几何平均数不等式：$A_n\geqslant G_n$.

记 $x_1=\dfrac{a_1}{G},x_2=\dfrac{a_1a_2}{G},\cdots,x_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{G^n}=1$；

$y_1=\dfrac{1}{x_1},y_2=\dfrac{1}{x_2},\cdots,y_n=\dfrac{1}{x_n}$.

由于数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中对应的数互为倒数，由排序不等式得

$x_1y_1+x_2y_1+\cdots+x_ny_n$(逆序和)

$\leqslant x_1y_n+x_2y_1,+\cdots+x_ny_{n-1}$，

即　$n\leqslant\dfrac{a_1}{G_n}+\dfrac{a_2}{G_n}+\cdots+\dfrac{a_n}{G_n}$.

从而 $A_n\geqslant G_n$. 等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 或 $y_1=y_2=\cdots=y_n$ 时成立，而这两者都可得到 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

下面证明 $G_n\geqslant H_n$. 对 n 个正数$\dfrac{1}{a_1},\dfrac{1}{a_2},\cdots,\dfrac{1}{a_n}$应用 $G_n\leqslant A_n$，得

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\cdots\frac{1}{a_n}}.$$

即 $G_n \geqslant H_n$.(符号成立的条件是显然的).最后证明 $A_n \leqslant Q_n$,它等价于

$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \geqslant 0.$

而上式左边 $=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_2)^2+\cdots+(a_1-a_n)^2+(a_2-a_3)^3+\cdots+(a_2-a_n)^2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)^2 \geqslant 0$,于是不等式及等号成立的条件都是显然的了.从上述证明可见,$A_n \leqslant Q_n$ 对一切 $a_1,a_2,\cdots,a_n \in R$ 成立.

4. 应用算术平均数——几何平均数不等式,可用来证明下述重要不等式.

柯西(Cavchy)不等式:设 a_1、a_2、a_3,$\cdots$,a_n 是任意实数,则

$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$

等号当且仅当 $b_i=ka_i$(k 为常数,$i=1,2,\cdots,n$)时成立.

证明:不妨设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为 0,b_i 也不全为 0(因为 a_i 或 b_i 全为 0 时,不等式显然成立).记 $A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$,$B=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$.

且令 $x_i=\dfrac{a_i}{A}$,$y_i=\dfrac{b_i}{B}(i=1,2,\cdots,n)$,

则 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$.于是原不等式成为

$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \leqslant 1.$

即 $2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n) \leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.它等价于

$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2 \geqslant 0.$

其中等号成立的充要条件是 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$.从而原不等式成立,且等号成立的充要条件是 $b_i=ka_i\left(k=\dfrac{A}{B}\right)$.

5. 利用排序不等式还可证明下述重要不等式.

切比雪夫不等式:或 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,

则 $\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \geqslant \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$.

证明:由题设和排序不等式,有 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1$,

……

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}$.

将上述 n 个不等式叠加后,两边同除以 n^2,即得欲证的不等式.

6. 不等式的证明:

除[高考点击]中提到的三种基本方法以外,在高中数学竞赛中不等式的证明还常用到以下几种方法:

(1)放缩法:利用 $A>B,B>C \Rightarrow A>C$

欲证:$A>C$,只需证:$A>B_1>B_2>\cdots>B_n>C$,即可.

(2)数学归纳法:就是对于一些与自然数有关的不等式命题,利用数学归纳法证明.

(3)构造函数,利用函数的单调性证题:通常将要证明的不等式构造成相应的图形,函

数及数列等加以论证.

(4)运用重要不等式:排序不等式、平均不等式、柯西不等式.

(5)反证法.

另外在不等式的证明过程中,还常用到以下运算变换技巧:

① 配方;②判别式;③优化假设;④叠加或连乘;⑤换元等.

题型扫描

【基础示例】

例 1 (07 北京高考题)如果正数 a,b,c,d 满足 $a+b=cd=4$,那么

A. $ab\leqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值惟一

B. $ab\geqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值惟一

C. $ab\leqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不惟一

D. $ab\geqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不惟一

解析:$\because 4=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,$\therefore ab\leqslant 4$,当且仅当 $a=b$ 时取"="号.

$c+d\geqslant 2\sqrt{cd}=2\sqrt{4}=4$,$\therefore c+d\geqslant 4$,当且仅当 $c=d$ 时取"="号.

$\therefore ab\leqslant c+d$ 且等号成立时,当且仅当 $a=b$ 且 $c=d$ 取值惟一.

答案:A

例 2 (07 上海高考题)设 a、b 是非零实数.若 $a<b$,则不列不等式成立的是

A. $a^2<b^2$　　B. $ab^2<a^2b$

C. $\dfrac{a}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$　　D. $\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$

解析:由不等式的性质,将 $a<b$ 两边同时除以 a^2b^2,则有$\dfrac{a}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$.

答案:C

例 3 (07 重庆高考题)若 a 是 $1+2b$ 与 $1-2b$ 的等比中项,则$\dfrac{2ab}{|a|+2|b|}$的最大值为

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析:本题主要考查等比中项的概念及均值不等式的应用.

因 $a^2=(1-2b)\cdot(1+2b)=1-4b^2$,及 $a^2+4b^2=1$,$a^2+4b^2\geqslant 4|ab|$,$\therefore |ab|\leqslant\dfrac{1}{4}$,

$\dfrac{2ab}{|a|+2|b|}\leqslant\dfrac{2ab}{2\sqrt{2|ab|}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{|ab|}}{2}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,当且仅当$|a|=2|b|$即$|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$|b|=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$时等号成立.