目　　次

第 6 章　向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题，平面解析几何的知识对学习一元函数微积分十分重要. 同样，空间解析几何对学习多元函数微积分也是必不可少的. 本章在建立空间直角坐标系的基础上，先讨论向量代数，然后用向量代数讨论空间的直线与平面，并介绍空间的曲面与曲线及空间解析几何的有关内容.

6.1　空间直角坐标系

6.1.1　空间直角坐标系

过空间一个定点 O 作三条互相垂直的数轴，他们都以 O 为原点，且有相同的长度单位，它们所构成的坐标系称为空间直角坐标系. O 为原点，这三条轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）. 习惯上，把 x 轴与 y 轴放在水平面上，z 轴放在铅垂线上，它们的正向符合右手法则，即当右手的四个手指从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 6-1 所示. 这样的坐标系就是本章使用的右手直角坐标系.

三个坐标轴两两确定一个平面，称为坐标面. 三个坐标面把整个空间划分为八个部分，每个部分称为卦限，共有八个卦限，按照象限的顺序（逆时针）；xOy 平面上方的四个卦限依次记为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限，xOy 平面下方的四个卦限依次记为 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限.

在空间建立了直角坐标系后，空间中任意一点就可以用它的三个坐标来表示. 设 M 为空间任一点，过 M 点作三个分别与 x 轴，y 轴，z 轴垂直的平面，分别交 x,y,z 轴于 A,B,C 三点（图 6-2），若 A,B,C 三点在坐标轴上的坐标是 x_0,y_0,z_0，则空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 x_0,y_0,z_0. 反之，任给一有序数组 x_0,y_0,z_0，我们可以在 x 轴，y 轴，z 轴上取坐标为 x_0,y_0,z_0 的点 A,B,C，并过 A,B,C 分别作与坐标轴垂直的平面，则它们相交于唯一的点 M. 这样，就建立了空间的点 M 与有序数组 x_0,y_0,z_0 之间的一一对应关系，这组数 x_0,y_0,z_0 称为点 M 的坐标，记为 $M(x_0,y_0,z_0)$. x_0,y_0,z_0 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

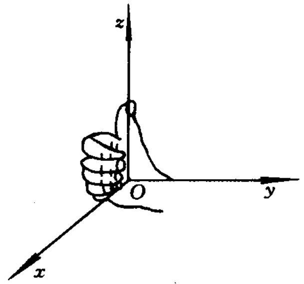

图 6-1

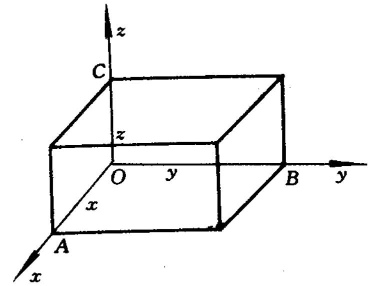

图 6-2

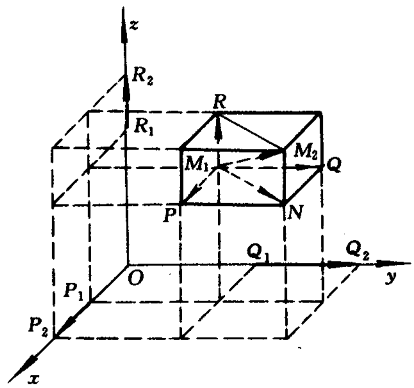

图 6-3

6.1.2　空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,为了求它们之间的距离 d,我们过 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6-3).

由勾股定理得

$$d^2 = |M_1M_2|^2$$
$$= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

由于 $|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$,

$|PN| = |\theta_1\theta_2| = |y_2 - y_1|$,

$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$,

所以 $d = |M_1M_2|$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是**空间两点间的距离公式**.

特殊地,空间任一点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 6.1.1　证明以三点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解　因为

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98},$$

显然 $|AB|=|AC|$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

又因为 $|BC|^2=|AC|^2+|AB|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 6.1.2 求点 $M(1,2,4)$ 到各坐标轴的距离.

解 从点 M 向各坐标轴作垂线，垂足依次为 $A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,4)$. 因此，M 到三个坐标轴的距离依次为

$$d_x=|MA|=\sqrt{0^2+2^2+4^2}=\sqrt{20},$$

$$d_y=|MB|=\sqrt{1^2+0^2+4^2}=\sqrt{17},$$

$$d_z=|MC|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}.$$

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限.

$A(1,-2,-3)$，$B(2,3,-4)$，$C(-4,-5,6)$，$D(5,-6,7)$，$E(-1,-2,-3)$，$F(-2,1,-3)$.

2. 指出下列各点所在的位置.

$A(3,4,0)$，$B(0,2,3)$，$C(0,3,0)$，$D(0,0,-1)$.

3. 试写出点 (a,b,c) 关于 xOy 面，关于 y 轴及关于原点对称点的坐标.

4. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

5. 在 yOz 上求一点，使该点与点 $A(3,0,4)$ 和 $B(3,4,0)$ 的距离相等，且与原点的距离为 $3\sqrt{2}$.

6. 试证明以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6.2 向量及其线性运算

6.2.1 向量的概念

在研究力学、物理学及其他一些实际问题时，我们经常遇到这样一类量，它既有大小又有方向，我们把这一类量叫做向量（或矢量），如力、速度、位移、力矩等.

在数学上通常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$，有时也用一个粗体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 或手写带箭头的字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等表示向量.

向量的大小称为向量的模，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫单

位向量，模为零的向量叫零向量.零向量的方向是任意的.与起点无关的向量称为自由向量，本章所研究的向量主要就是这种自由向量.若两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行，我们就说两个向量平行，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.两个向量只要大小相等且方向相同，我们便称这两个向量是相等的.

6.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6-4 所示.这种求向量和的方法称为**三角形法则**.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时可以以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6-5 所示，这种求向量和的方法称为**平行四边形法则**.

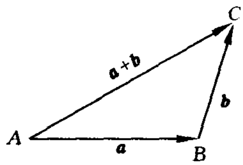

图 6-4

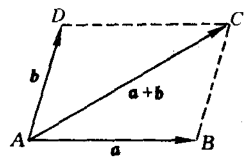

图 6-5

容易验证向量的加法满足以下运算定律：

(1) 交换律.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律.$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量的减法

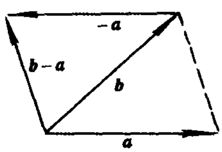

图 6-6

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且模相等的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即把 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相加，便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 6-6 所示.

由三角形两边之和大于第三边的原理，可以得到常用的三角不等式.

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

3. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘数是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

特别地，在 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即为零向量.$\lambda=1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$\lambda=-1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

可以证明向量与数的乘法满足以下运算定律：

(1) 结合律. $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a})$.

(2) 分配律. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，所以常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系，即有

定理 6.2.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是，存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

事实上，若 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$，取 $|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a} = (\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda=\mu$.

单位向量在向量代数中是一类非常重要的向量，与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 按照向量与数的乘积的规定，有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$ 或 $\boldsymbol{a}^{\circ} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例 6.2.1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线交点，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$.

解 如图 6-7 所示，由于平行四边形对角线互相平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2\overrightarrow{MA}$，于是 $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因为 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=2\overrightarrow{BM}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{MB}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

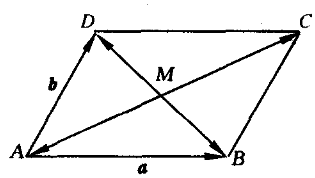

图 6-7

6.2.3 向量在轴上的投影和向量的坐标

在讨论向量的概念与运算时，是用几何方法引进的，这个方法比较直观，但计算不方便，下面来引进向量的坐标，把向量用数组表示出来. 使向量的运算可以化为数的运算.

1. 向量在轴上的投影

先引入两个向量夹角的概念.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，把它们的起点移到同一点，规定它们在 0 和 π 之间的夹角 θ 为这两个向量的夹角，记为 $\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

下面我们来定义向量在轴上的投影. 设有一向量 $\overrightarrow{AB}$ 及一轴 u，过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 分别作垂直于 u 轴的平面，与 u 轴分别交于点 A'，B'，则 A'，B' 点分别称为 A，B 点在轴 u 上的投影(图 6-8).

在 u 轴上有向线段$\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量$\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，记作$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$，$u$ 轴称为投影轴.

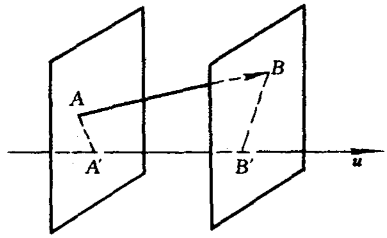

图 6-8

关于投影有以下几个性质.

性质 1 $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi$ （φ 为$\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴的夹角）.

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$.

性质 3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

2. 向量的坐标

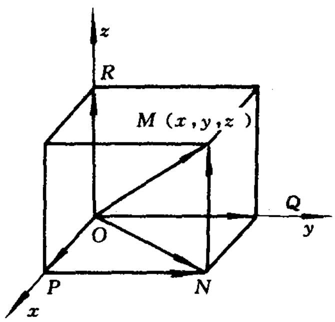

图 6-9

在空间直角坐标系中，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取与三个坐标轴正向一致的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称它们为基本单位向量.

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间的任一向量，把向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，使它的起点与原点重合，终点为 $M(x,y,z)$，即 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$，过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面，它们分别与 x 轴、y 轴、z 轴相交于 P，Q，R 三点（图 6-9），即为点 M 在三个坐标轴上的投影. 于是有

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}.$$

由向量加法有 $\quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$，

所以，$\quad \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

此式称为向量$\overrightarrow{OM}$ 按基本单位向量的分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为$\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，向量$\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影 x，y，z 称为向量$\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 记作$\overrightarrow{OM} = \{x,y,z\}$.

利用向量的坐标，可得向量的加、减、数乘运算如下：

设 $\boldsymbol{a} = \{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b} = \{b_x,b_y,b_z\}$，即 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}$$

$$= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件为

$$\{b_x,b_y,b_z\} = \lambda\{a_x,a_y,a_z\} \quad 或 \quad \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

例 6.2.2　已知两点 $A(0,1,-4)$，$B(2,3,0)$，试用坐标表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $-2\overrightarrow{AB}$.

解　$\overrightarrow{OA}=\{0,1,-4\}$，$\overrightarrow{OB}=\{2,3,0\}$，

所以　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{2,2,4\}$，　　$-2\overrightarrow{AB}=\{-4,-4,-8\}$.

例 6.2.3　设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解　因为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}=3(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})+4(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})+(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=14\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=14$，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

6.2.4　向量的模、方向余弦的坐标表达式

1. 向量的模

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，可以用它与三条坐标轴的夹角 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$ 来表示它的方向(图 6-10). 称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

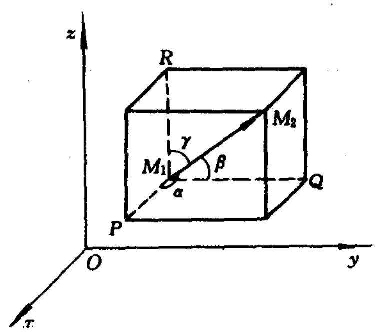

图 6-10

由图 6-10 可以看出向量 $\boldsymbol{a}$ 的模即为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的长，即长方体对角线的长度.

所以

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(M_1P)^2+(M_1Q)^2+(M_1R)^2},$$

因为　$$M_1P=a_x,M_1Q=a_y,M_1R=a_z,$$

故　$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

2. 方向余弦

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影，所以有

$$a_x=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,$$

$$a_z=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

因此，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

此式为用向量坐标表示方向余弦的公式.

由上式可得 $\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

即任一向量的方向余弦的平方和等于 1. 因此，与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x, a_y, a_z\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

例 6.2.4 已知向量的起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标和模.

解 $\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$，$\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$，于是

$$\overrightarrow{M_1, M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 6.2.5 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$，$M_2(3, 0, 2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦及方向角.

解 由于 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{3 - 4, 0 - \sqrt{2}, 2 - 1\} = \{-1, -\sqrt{2}, 1\}$，

故 $$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2.$$

从而，$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \frac{3}{4}\pi;$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

例 6.2.6 求平行于向量 $\boldsymbol{a} = \{6, 7, -6\}$ 的单位向量.

解 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = \sqrt{121} = 11$，与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \pm\dfrac{1}{11}\{6, 7, -6\}$. $\dfrac{1}{11}\{6, 7, -6\}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，$-\dfrac{1}{11}\{6, 7, -6\}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

习题 6-2

1. 已知两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(3,3,2)$.(1) 写出向量$\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示式;(2) 求 $|\overrightarrow{AB}|$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$. 求 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

3. 设点 M 的坐标为$(-1,1,-\sqrt{2})$,求$\overrightarrow{OM}$ 的单位向量和方向余弦、方向角.

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角都相等,求其方向余弦.

5. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.

6. 设 $\boldsymbol{a}=\{-2,1,2\}$,$\boldsymbol{b}=\{3,0,-4\}$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的角平分线的单位向量.

7. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$ 处,它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$,求该向量的起点 A 的坐标.

8. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

9. 设 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行 ,且 $|\boldsymbol{b}|=14$,求 $\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式.

6.3　数量积　向量积

6.3.1　两向量的数量积

由力学知识知道,一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,若以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle$. 以常力做功为实际背景,得到向量的数量积概念.

定义 6.3.1　两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积等于两个向量的模与它们夹角余弦的乘积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

由于 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$,
所以,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$;

当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

由数量积的定义可推得

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

这是因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2\quad(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0)$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这是因为,如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$,所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0.$$

反之,若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$,而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0,$$

则 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = 0$，所以 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

因此，数量积多用来研究两个向量的垂直问题.

(3) 数量积运算满足以下运算定律：

① 交换律. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

② 分配律. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.

③ 结合律. $\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{b})$.

(4) 数量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_xb_x\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + a_xb_y\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + a_xb_z\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} + a_yb_x\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} + a_yb_y\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} \\ &\quad + a_yb_z\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} + a_zb_x\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} + a_zb_y\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} + a_zb_z\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k},\end{aligned}$$

因为 $\qquad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0,$

所以 $\qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$

这就是数量积的坐标表示式.

(5) 两向量夹角余弦的坐标表示式

$$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充分必要条件又可表示为

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

例 6.3.1 已知三点 $M_1(3,1,1)$，$M_2(2,0,1)$，$M_3(1,0,0)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与向量 $\overrightarrow{M_2M_3}$ 的夹角 θ.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1,-1,0\}$，$\overrightarrow{M_2M_3} = \{-1,0,-1\}$.

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_2M_3}}{|\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot |\overrightarrow{M_2M_3}|} = \frac{1+0+0}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{2}\text{，所以 } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

例 6.3.2 已知 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}| = 1$，$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \frac{\pi}{6}$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 及向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}$

$$= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + |\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \sqrt{7},$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}$$

$$=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+|\boldsymbol{b}|^2}$$

$$=\sqrt{3-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=1,$$

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{3-1}{\sqrt{7}\cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

从而
$$\theta=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

6.3.2 两向量的向量积

定义 6.3.2 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个向量的向量积是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，它的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面垂直，且使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系.

由平面几何知识知道，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 刚好是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，这也是向量积模的几何意义，它也同样是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两边的三角形面积的 2 倍.

由向量积的定义可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

这是因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0$. 所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=0$，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 或 π，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 反之，如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，所以$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由于零向量可以看作是具有任意方向的，所以可以得到，两个向量平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 因此，向量积多用来研究两向量的平行问题.

(3) 向量积满足以下运算定律

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$(不满足交换律).

② 结合律. $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

③ 分配律分配律. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(4) 向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

则有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$$=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}$$

$$+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k},$$

因为 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$,

所以 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

由上式还可以得到两向量平行的充分必要条件为$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

例 6.3.3 已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-1,2\},\boldsymbol{b}=\{2,-2,-2\}$,求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\2&-2&-2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}.$$

例 6.3.4 已知三点 $A(1,0,3),B(0,0,2),C(3,2,1)$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 由向量积定义及几何意义知 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$,又$\overrightarrow{AB}=\{-1,0,-1\},\overrightarrow{AC}=\{2,2,-2\}$,

而 $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&0&-1\\2&2&-2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

故 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}.$$

例 6.3.5 设 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}_1=\{2,-1,3\}$ 和 $\boldsymbol{a}_2=\{1,3,-2\}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\{2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\}=-6$,求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解法 1 设 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$,由题意有

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}_1=0$, 即 $2x-y+3z=0$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}_2=0$, 即 $x+3y-2z=0$,

$\boldsymbol{a}\cdot\{2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\}=-6$, 即 $2x-y+z=-6$.

解方程组$\begin{cases}2x-y+3z=0,\\x+3y-2z=0,\\2x-y+z=-6,\end{cases}$

得 $x=-3,y=3,z=3$,即 $\boldsymbol{a}=\{-3,3,3\}$.

解法 2 由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 均垂直,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ 是平行的.

由于 $a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -7i + 7j + 7k$，

可设 $a = \lambda\{-7,7,7\} = \{-7\lambda,7\lambda,7\lambda\}$，又由于 $a \cdot \{2i - j + k\} = -6$，即 $\{-7\lambda,7\lambda,7\lambda\} \cdot \{2i - j + k\} = -6$，从而 $-14\lambda - 7\lambda + 7\lambda = -6$，

解得 $\lambda = \dfrac{3}{7}$，所以 $a = \{-3,3,3\}$.

从例 6.3.5 可以看出用数量积、向量积研究向量的位置关系是非常有效的，从不同角度考虑问题时得到的解题思路是不一样的，很好地理解这类问题，对下一步学习空间的平面与直线相关内容是十分重要的.

习题 6-3

1. 已知 $|a| = 3$，$|b| = 6$，a 与 b 的夹角 $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，求 $a \cdot b$.

2. 设 $|a| = 3$，$|b| = 5$，试确定常数 k，使 $a + kb$ 与 $a - kb$ 垂直.

3. 在 xOy 面上求一单位向量与已知向量 $a = \{-4,3,7\}$ 垂直.

4. 设 $a = 3i - j - 2k$，$b = i + 2j - k$，求(1) $a \cdot b$，(2) $a \times b$，(3) $(-2a) \cdot 3b$.

5. 设 $a = \{3,2,1\}$，$b = \left\{2,\dfrac{4}{3},k\right\}$，问 k 为何值时(1)a 垂直于 b，(2)a 平行于 b.

6. 求同时垂直于向量 $a = \{2,2,1\}$ 和 $b = \{4,5,3\}$ 的单位向量.

7. 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

8. 设 $a = \{2,3,4\}$，$b = \{3,-1,-1\}$，求以 a,b 为边的平行四边形面积.

9. 已知 $|a| = 1$，$|b| = \sqrt{2}$，$\langle a,b\rangle = \dfrac{\pi}{4}$，求(1) $|a+b|$，(2) $|a-b|$，(3) 向量 $a+b$ 与向量 $a-b$ 的夹角 θ.

10. 设 $a = \{3,1,2\}$，$b = \lambda\{k,3,6\}$ 且 $\lambda \neq 0$，求 λ,k 使 b 为与 a 垂直的单位向量.

11. 设 a,b,c 为单位向量，且满足 $a + b + c = 0$，求 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

12. 已知向量 $a = 2i - 3j + k$，$b = i - j + 3k$ 和 $c = i - 2j$，计算(1)$(a \cdot b)c - (a \cdot c)b$；(2)$(a + b) \times (b + c)$；(3)$(a \times b) \cdot c$.

6.4 平面及其方程

同平面解析几何一样，空间曲面和曲线也可以看作是满足一定条件的点的集合，在本节和下一节里将以向量为工具，在空间直角坐标系中讨论最简单的曲面——平面和最简单的曲线——直线.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com