普通高等教育"十一五"国家级规划教材
西安交通大学 "十一五"规划教材

数学建模实验

（第2版）

周义仓 赫孝良 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

西安交通大学 "十一五"规划教材

数学建模实验

(第2版)

周义仓 赫孝良 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书的内容分为六部分：一、数学建模引论，介绍数学建模的概念和一般步骤；二、介绍Matlab和Mathematica软件包，为读者提供软件基础；三、简单的小型建模实验，从这些小问题入手来体会、学习应用数学的技巧；四、几个中等的建模问题，用微积分、概率论和计算机等知识去尝试解决一些实际问题；五、提高型建模问题；六、发挥性的建模问题。书中的一些问题来源于国内外的数学建模竞赛题，有一定的难度和实际意义。

本书可以作为高等院校数学建模课、数学建模实验课、数学模型课和数学建模竞赛培训的教材，也可供高校师生和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模实验/周义仓，赫孝良编著. —2版. —西安：
西安交通大学出版社，2007.8
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
ISBN 978-7-5605-2519-8

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①周... ②赫 Ⅲ. 数学模型-高等学校-
教材 Ⅳ. O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第128866号

书　　名	数学建模实验(第2版)
编　　著	周义仓　赫孝良
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路10号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	陕西丰源印务有限公司
字　　数	391千字
开　　本	727mm×960mm　1/16
印　　张	21.25
版　　次	2007年8月第2版　2007年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5605-2519-8/O·262
定　　价	26.00元

第 2 版前言

《数学建模实验》一书从 1999 年出版以来已经印刷多次，发行了 3 万多册。在这几年的教学过程中，我们收集了不少新例子，收到了许多读者的建议，自己也有不少的体会，所以对本书进行修订。

这次修订的指导思想是仍然保持原书的编写风格，不增加教材的难度，力求做到教师好用、学生好学，重点训练学生的创新能力，体现数学建模“没有最好、只有更好”的精神。在这一指导思想下，这次修订的主要变动有以下几个方面：

1. 删减了每一章后的讨论题。每章后精选的讨论题可作为课堂练习题和课后作业题，其中课堂练习题比较简单，可以在 15 分钟到半小时内完成，其它题供学生课后钻研完成。

2. 根据学生在学习数学建模过程中的困难，在第 1 章中增加了怎样有效地的进行数学建模教学的内容，特别给出了怎样写数学建模论文的建议。

3. 充实了 Matlab 和 Mathematica 的内容，特别是提供了几个编程和动画演示的范例，且在整个教材中加强了计算机的应用。

4. 删去或合并了几章具体建模实例的内容，增加了传染病模型，增加了一些不断深入的例子，引导学生逐步深入思考和体会，建立不断追求的数学建模精神。

5. 收集和整理了一些电子版的辅助材料，包括学生的优秀作业，一些问题的背景知识和部分动画演示。需要的读者可以发邮件索取(zhouyc@mail. xjtu. edu. cn)。

希望我们的这些改动能更利于教学，更有利于应用意识和创新能力的培养。我们也借此机会衷心感谢多年来关心和使用本书的读者。

作　者

2007 年 2 月

第 1 版序

人类社会正从工业经济时代进入知识经济时代。知识经济是以现代科学技术为核心、建立在知识和信息的生产、存储、使用和消费之上的经济。知识经济是以智力资源为第一生产力要素的经济，是以高科技产业为支柱产业的经济，知识创新和技术创新是知识经济的基本要求和内在动力。

数学是科学技术人才科学素质的重要组成部分，随着高科技与计算技术的发展和普及，数学的重要性日益突出，“高技术本质上是一种数学技术”已越来越为人们所共识。任何高新技术的进步或突破都往往与数学在某一方面的成就紧密相关，没有良好的数学素养已无法进行工程技术的创新。可见，在当今以知识和技术创新为特征的知识经济时代里，数学素养已成为有志者“攀登科技高峰的钥匙”，是竞争中“强者的翅膀”。

科学技术人才学习数学的主要目的在于应用数学。这就要求我们在学习数学的同时，不断提高自己应用数学的意识、兴趣和能力。而这方面正是以往数学教育的薄弱环节，也是建国以来历次教学改革中想要解决而未能突破的困难问题。近十余年在我国普遍兴起的数学建模教学和竞赛为解决这一困难问题打开了思路，开辟了途径。多年来的实践显示：数学建模是数学知识和应用能力共同提高的最佳结合点；是启迪创新意识和创新思维、锻炼创新能力、培养高层次人才的一条重要途径；也是激发学习欲望，培养主动探索、努力进取学风和团结协作精神的有力措施。全国工科数学教学指导委员会已建议开设以数学建模、算法设计和数据处理为主体的“数学实验”课，将其作为一门数学基础课逐步纳入教学计划，并积极鼓励在高年级开设数学建模选修课。

本书的作者从事数学建模课、数学建模实验课教学和培训、指导学生参加国内外大学生数学建模竞赛多年，在问题的选择、情景的创造、学习欲望的激发、学习过程的引导、应用意识的强化、自学和创新能力的培养、素质的提高等方面进行了成功的探索和实践，本书就是在作者多年来探索和实践的基础上编写的。本书的编写风格与以前的数学教材有较大区别，希望通过它的出版能促进更多不同风格、不同特色的教材的出现，不断探索教学改革的新思路、新方法以适应培养跨世纪人才的需要。

马知恩

1999.2

第 1 版前言

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和各种各样的应用问题紧密相关的。数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，而且在于它应用的广泛性。进入 20 世纪以来，随着科学技术的迅速发展和计算机的日益普及，人们对各种问题的要求越来越精确，使得数学的应用越来越广泛和深入。特别是在即将进入 21 世纪的知识经济时代，数学科学的地位会发生巨大的变化，它正在从国民经济和科技的后备走到了前沿。经济发展的全球化、计算机的迅猛发展、数学理论与方法的不断扩充使得数学已经成为当代高科技的一个重要组成部分和思想库，数学已经成为一种能够普遍实施的技术。培养学生应用数学的意识和能力已经成为数学教学的一个重要方面。

应用数学去解决各类实际问题时，建立数学模型是十分关键的一步，同时也是十分困难的一步。建立数学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程。要通过调查、收集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题。这就需要深厚扎实的数学基础，敏锐的洞察力和想象力，对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。数学建模是联系数学与实际问题的桥梁，是数学在各个领域广泛应用的媒介，是数学科学技术转化的主要途径。数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。

为了适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次科技人才，数学建模已经在大学教育中逐步开展。国内外越来越多的大学正在进行数学建模课程的教学和参加开放性的数学建模竞赛，将数学建模教学和竞赛作为高等院校的教学改革和培养高层次的科技人才的一个重要方面。

我国高校的数学建模教育开始于 20 世纪 80 年代初期，全国性的大学生数学建模竞赛开始于 1992 年。近年来数学建模教育发展非常迅速，已经出版了一批教材和参考书，1998 年已有 26 个省、市、区 400 所院校的 2 103 个代表队参加了全国大学生数学建模竞赛。现在许多院校正在将数学建模与教学改革相结合，努力探索更有效的数学建模教学法和培养面向 21 世纪的人才的新思路。

与我国高校的其它数学类课程相比，数学建模课程具有难度大、涉及面广、

形式灵活，对教师和学生要求高等特点，数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程。为了改变过去以教师为中心、以课堂讲授为主、以知识传授为主的传统教学模式，我们在应用数学专业、全校任选课和全校大学生数学建模竞赛培训班中进行了数学建模实验课程的尝试，在教学内容和教学方式上有较大的改革，取得了较好的教学效果。根据我们这几年教学实践的素材和经验修改编写了这本教材，以便和国内外同行交流，探讨数学建模教学、竞争和改革的新思路，使其更快地发展。

数学建模试验课程和这本教材的指导思想是：以实验室为基础、以学生为中心、以问题为主线、以培养能力为目标来组织教学工作。通过教学使学生了解利用数学理论和方法去分析和解决问题的全过程，提高他们分析问题和解决问题的能力；提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力，使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学去解决问题；提高他们尽量利用计算机软件及当代最新科技成果的意识，能将数学、计算机有机地结合起来去解决实际问题。

数学建模实验课应以学生为主，教师利用一些事先设计好的问题启发、引导学生主动查阅文献资料和学习新知识，鼓励学生积极开展讨论和辩论，培养学生主动探索、努力进取的学风，培养学生从事科研工作的初步能力，培养学生团结协作的精神，形成一个生动活泼的环境和气氛。教学过程的重点是创造一个环境去诱导学生的学习欲望、培养他们的自学能力，增强他们的应用意识和创新能力、提高他们的数学素质，强调的是获取新知识的能力，是解决问题的过程，而不是知识与结果。

本书的编写风格不同于以教师讲授为主的数学建模教材。为了更好地调动学生的积极性，每个实验包括实验目的、问题、要求、背景材料或相应知识介绍、参考答案和讨论题这几部分。建议使用该教材的教师先将问题提供给学生让他们自行钻研解决，学习相应的知识，给出初步解答，学生完成后再根据参考答案进行讨论和总结。

本书的内容分为六部分。第一部分是数学建模引论，介绍数学建模的概念和一般步骤；第二部分介绍 Matlab 和 Mathematica 两个通用数学软件包，为学生提供一些软件基础；第三部分是一些简单的小型建模实验，使学生从这些小问题入手体会、学习应用数学的技巧，以引起他们的兴趣；第四部分是几个中等的建模问题，训练学生用微积分、概率论和计算机等知识去尝试解决一些实际问题；第五部分是提高型建模问题，这需要学生在解决问题的过程中学习一些新知识，然后去解决一些较困难的问题；第六部分是发挥性的建模问题，引导学生寻找和发现实际问题去解决。本书中的一些问题来源于国内外历年来的数学建模竞赛题，有一定的难度和实际意义。

由于本书的宗旨是怎样应用数学理论与方法去解决实际问题，故不讲授高深、系统的数学知识，只介绍、引用一些实用的数学理论和方法，所以只要有理工科大学二年级的数学知识就可顺利阅读本书。本书各部分的内容都相对独立，不同的院校和读者可以根据需要自由地取舍。

由于数学建模实验是一个很新的课程，在内容选择、教材编写、教学方式方面国内外都没有较为定型的模式。加上作者水平与经验有限，书中的错误和不妥之处恳请读者批评指正。

编　者

1999 年 2 月

（注：为了保持竞赛题的原貌，部分国外例题中的非公制单位只给出了换算关系，未改为公制）

目　录

1　数学建模概论

世界上一切事物都是按照一定的客观规律运动、变化着，事物之间也彼此联系和制约着，无论是从浩瀚的宇宙到渺小的粒子，还是从自然科学到社会科学都是这样. 事物的变化规律和事物之间的联系，必然蕴含着一定的数量关系，所以数学是认识世界和改造世界的必不可少的重要工具，特别是在科学技术飞速发展的今天，这一点就显得更为重要. 本书的主题是数学建模，其核心是用数学去揭示事物发展变化的规律. 本章叙述什么是数学模型，它有什么作用，如何建立和应用数学模型.

1.1　数学与数学模型

1. 数学应用的广泛性

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学. 数学是理解世界的方法，是万物的度量. 数学是高度抽象的、非常严密的，数学的结论和方法是可以用在许多方面. 随着人类社会的进步及科技水平的提高，数学的应用不再限于物理、力学、电磁学等领域. 随着电子计算机的发展使得人口、经济、社会等领域都广泛深入地采用了数学的方法和工具，使得以前很多定性的东西也逐步定量化和精确化. 数学本身的发展，也提供了解决随机、确定、离散等问题的途径，使得数学在各个学科中的应用显得越来越重要.

许多学科的基本理论都是用数学式表示的. 如反映物体机械运动基本规律的牛顿三定律，就是用明确而紧凑的数学公式表示，反映电路理论基本规律的基尔霍夫定律也可用数学式表示，光沿着通过时间最少的路径前进，这一光学原理也可以用变分法来表示.

一个学科的内容能用数学来分析和表示，这是该学科精密化和科学化的一种表现. 利用数学这一工具可以深刻地认识客观现象的本质，预测未来，促进科学的发展. 有许多物理概念用语言叙述是很难说清楚的，但可以用数学表达式清晰而准确地展现它们. 例如，变速运动的瞬时速度、变力沿曲线所做的功，在没有引入微积分以前很难描述，有了微积分以后就可以用导数和积分非常容易地描述并解决这些问题.

在生产过程中，为了分析和改进生产中出现的问题，虽然可采用比较简单的

直接实验方法，但在很多情况下这种方法是行不通的，而只能通过模拟计算的方法进行. 如某设备正式投产后，往往不允许破坏正常生产过程进行实验，特别是实验中需施加任意输入或改变生产条件时，搞不好会发生故障甚至出现危险. 另外，直接实验往往需要花费较多的人力、财力和时间，从经济角度来看也是不合算的. 所以在很多情况下，人们一般先进行一些数学处理，然后在计算机上进行模拟计算来代替实验.

在科研和一些大型问题的研究中，由于系统的状态复杂，根本无法进行实验或不能进行实验. 如卫星回到地球的时候，在高度为 120 km 的大气层上空以 11 km/s 的速度极迅速地落到地面，若用风洞实验来模拟，必须有极庞大的设备，实际上是不可能的；又如我国的人口和生态的变化问题就不能靠实验来研究，只能靠数学的推理和计算来研究，以便提早采取相应的措施.

总而言之，当前科学技术的发展要求我们更好地应用数学这一工具为各方面服务，用数学方法来反映、描述或模拟各种各样的现象，揭示其内在规律，这就是我们下面要讲的数学模型.

2. 数学模型

(1) 模型　模型是实物、过程的表示形式，是人们认识事物的一种概念框架. 也就是用某种形式来近似地描述或模拟所研究的对象或过程. 模型可以分为具体模型和抽象模型两类，数学模型就是抽象模型的一种.

在现实生活中，人们总是自觉或不自觉地用各种各样的模型来描述一些事物或现象. 地图、地球仪、玩具火车、建筑模型、昆虫标本、恐龙化石、照片等都可以看作模型，它们都从某一方面反映了真实现象的特征或属性. 即根据我们的目的，从真实现象中选一部分我们所关心的特征进行描述，其它方面的特征可以不涉及. 如地球仪只反映了地球的大体形状、地表上水、陆地的比例、各个国家所处的地理位置等，对地球的构造及起源就不涉及. 一般的地图，只是大地的一种模型，它保持了各地区之间的距离和位置不变. 但一个较好的模型，应该在所关心的方面体现出真实对象的主要特征，否则就没有多少意义. 如一个城市的交通图，它就应该包含这个城市的主要公交路线，而其它方面的特征反映了多少，就不是主要问题. 如果这个交通图漏掉了几条主要的交通干线，那么它就不能作为这个城市交通路线的模型了.

在我们每一个人的头脑中也储存了不少模型. 如我们认识许多人，就是将这些人的长相、行为、品质、才能等主要特征经过头脑进行加工，作为一个个模型储存在大脑中. 当我们遇见一个人时，就是用这些模型进行比较，若与某一个模型相符，就是认识这个人，否则就是生人. 判断一件事情的好坏，不同的人给出的结果可能不一样，就是因为每个人的标准不一样，也即每个人头脑中的框架不一

样.有时听到某人说社会风气不好，某一个人够朋友，其实在讲这些话的时候，他的头脑中已经有了好的社会风气应该怎样、朋友应该怎样一类的概念框架.一个人的世界观也是一种模型，它是人们对待现实生活的态度，是对各种事物的认识方法，由于这个模型的不同，才使得世界上有了各种各样的人生.但必须注意，模型可以帮助我们认识事物，但它并非现实，如地图并非它所代表的国土，模型仅是真实对象的一种描述方法.

(2) 数学模型　数学模型是关于部分现实世界的，为一定目的而作的抽象、简化的数学结构.它用数学符号、公式、图表等刻划客观事物的本质属性与内在规律.数学模型是系统的某种特征的本质的数学表达式，数学模型是对所研究对象的数学模拟，是一种理想化和抽象化的方法，是科学研究中一种重要的方法.例如考虑两个物体之间的相互作用时，对于它们之间的相互吸引这种属性，可以用数学公式(万有引力公式 $F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$)来表示吸引力与其它因素之间的关系，这就是物质相互吸引的数学模型.又如一个线性弹簧，考查它的形变 x 与弹力 F 之间的关系，我们可以用数学公式(胡克定律) $F=-kx$ 来表示它们之间的规律，负号表示形变的方向与弹力方向相反.这个数学公式就是它的数学模型.

数学模型主要有解释、判断、预见三大功能.其中预见功能是数学模型最重要的功能，能否成功地利用数学模型所推导的规律与事实去预测未来，这是衡量一个模型价值与数学方法效力的最重要的标准.

下面我们分别举例来说明数学模型的这三大功能.

例 1　孟德尔遗传规律

奥地利人孟德尔选择了可以区分性状的一些豌豆的不同品种进行了杂交实验.他分别种下一批绿荚豌豆和黄荚豌豆，长成后进行异花授粉.结果发现，不论是绿荚植株的花粉传给黄荚植株，还是反过来，杂交的结果都一样：子代都是绿色豆荚，而没有黄色豆荚.这样一种绿色性状比黄色性状占优势的性质，孟德尔称它为“显性”性状，而称黄荚颜色为“隐性”性状.问题是这隐性性状会永远“隐”下去吗？为了回答这个问题，孟德尔再次将绿荚的下一代种子种下去，产生第三代果实.第三代植株中，有的结黄荚、有的结绿荚，即隐性性状又在第三代出现了.为了考察这样的性状在数量方面的关系，孟德尔数出 580 颗杂交种绿豆荚种子用来繁殖第三代.经过一年的精心栽培和统计，他发现其中有 152 颗结黄豆荚，428 颗结绿豆荚，未成熟豆的绿荚与黄荚的数量比约为3∶1.孟德尔在历时八年的豌豆实验中，还同时观察其它性状，也得到了类似的比例.在这些实验的基础之上，孟德尔得到了分离性定律和自由组合律，孟德尔遗传定律中“3∶1”这个分离比数，正如数学上的圆周率和黄金分割一样，金光闪闪地载入了生物科学

的史册.

孟德尔在统计实验的基础上，推测豌豆的遗传性状必包含某种物质因素，他称之为“遗传因子”. 他认为豌豆的每种特性(例如豆荚的颜色)由两个遗传因子决定：一个是显性因子 R(决定绿荚)，另一个是隐性因子 r(决定黄荚). 每个植株都产生精子和卵子，每个精子和卵子各得两个遗传因子中的一个；一个受精卵包含两个遗传因子，一个来自精子，另一个来自卵子. 当豌豆的两个品种杂交后，子一代表现绿荚是显性性状，表现黄荚为隐性性状，而子二代群体就会出现分离现象，可以用图 1-1 来说明. 从子二代的情况看，显性和隐性出现的比例为 3∶1.

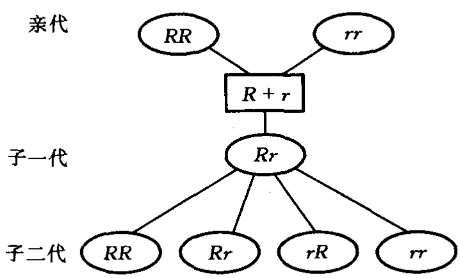

图 1-1　豌豆性状遗传示意图

精心的统计和慎密的分析使孟德尔发现了上述的遗传规律. 下面我们用概率论对此结果作出数学的解释. 设 R 与 r 分别表示两种不同性状的遗传因子，两种植株进行杂交，产生子一代 F_1. 对子一代 F_1 实行异花授粉产生子二代 F_2. 双亲同时独立地各以1/2的概率把 R 与 r 传给子二代. 用 P 表示概率，A 表示“F_2 是 RR 型”，B 表示“F_2 是 Rr 型”，C 表示“F_2 是 rr 型”，用 D_1 和 D_2 分别表示“花粉传给 F_2 的遗传因子是 R 型与 r 型”，用 E_1 和 E_2 分别表示“胚珠内卵子传给 F_2 遗传因子是 R 型与 r 型”. 于是得

$$P(A) = P(D_1E_1) = P(D_1)P(E_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(D_1E_2) + P(D_2E_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(D_2E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

因为绿豆荚是显性的，因此，RR 与 Rr 型个体的表现性状是相同的，于是出现绿豆荚的概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，出现黄豆荚的概率为 $\frac{1}{4}$，两者概率之比为 3∶1，用类似的数学方法也可以验证“自由组合定律”. 由此可见，孟德尔两个定律，实

际上是生物统计规律，只有用概率论的观点才能作出严格的解释. 孟德尔的成功在于他不仅着眼于质的区别，而且精心致力于量的统计. 选择了豌豆这类便于分离计数的植物进行实验，因而能在辛勤的探索中揭示出扑朔迷离的规律.

例 2 放射性废物的处理问题

有一段时间，美国原子能委员会(现为核管理委员会)是这样处理浓缩放射性废物的，他们把这些废物装入密封性能很好的圆桶中，然后扔到水深 300 ft[①] 的海里. 这种做法是否会造成放射性污染，很自然地引起了生态学家及社会各界的关注. 原子能委员会一再保证，圆桶非常坚固，决不会破漏，这种做法是绝对安全的. 然而一些工程师们却对此表示怀疑，他们认为圆桶在和海底相撞时有可能发生破裂. 而原子能委员会有些专家们仍然坚持自己的看法. 于是，双方展开了一场笔墨官司.

究竟谁的意见正确呢? 看来只能让事实说话了. 问题的关键在于，圆桶到底能承受多大速度的碰撞，圆桶和海底碰撞时的速度有多大?

工程师们进行了大量破坏性实验，发现圆桶在直线速度为 40 ft/s 的冲撞下会发生破裂，剩下的问题就是计算圆桶沉入 300 ft 深的海底时，其末速度究竟有多大了.

美国原子能委员会使用的是 55 加仑(1(美)加仑＝3.785411 升)的圆桶，装满放射性废物时的圆桶重量为 $W=527.436$ 磅(1 磅＝0.45259237 千克)，而在海水中受到的浮力 $B=470.327$ 磅. 此外，下沉时圆桶还要受到海水的阻力，阻力

$$D = Cv$$

其中 C 为常数. 工程师们做了大量实验，测得 $C=0.08$

现在，取一个垂直向下的坐标，并以海平面为坐标原点($y=0$). 于是，根据牛顿第二定律，圆桶下沉时应满足微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = W - B - D \tag{1.1}$$

注意到 $m=\frac{W}{g}$, $D=Cv$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v$, (1.1)可改写成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{Cg}{W}v = \frac{g}{W}(W - B) \tag{1.2}$$

(1.2)式是一阶线性方程，且满足初值条件 $v(0)=0$，其解为

$$v(t) = \frac{W-B}{C}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{Cg}{W}t}\right) \tag{1.3}$$

由已知数据和(1.3)式容易计算出圆桶的极限速度

① 1ft＝0.3048m