线性代数

朱开永　曹德欣　王升瑞　刘文斌　彭红军　编

中国矿业大学出版社

线 性 代 数

朱开永　曹德欣　王升瑞
刘文斌　彭红军　编

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/朱开永等编.—徐州:中国矿业大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-81107-474-1

Ⅰ.线… Ⅱ.朱… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第005396号

书　　名　线性代数
编　　者　朱开永　曹德欣　王升瑞　刘文斌　彭红军
责任编辑　朱明华　潘俊成
责任校对　周俊平
出版发行　中国矿业大学出版社
　　　　　　(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编221008)
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
排　　版　中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷　徐州中矿大科技印发有限公司
经　　销　新华书店
开　　本　850×1168 1/32　**印张** 9.75　**字数** 241千字
版次印次　2007年1月第1版　2007年1月第1次印刷
定　　价　15.00元

前　　言

为了进一步适应各类高等院校(包括民办高校、应用技术学院、高职、成人高校)对人才培养的实际需要,编者根据《线性代数》的教学大纲和基本要求,结合多年的教学实践经验,参考兄弟院校的有关教材编写了本教材.其内容包括线性代数的基本知识和基本理论:行列式、矩阵、矩阵的初等变换、线性方程组、向量组的线性相关性以及相似矩阵与二次型.全书分为四章,每章开头指出学习内容和学习要点,章后有自学指导,本章的基本要求、重点及学习中应注意的问题,最后配有自测题.

在编写本书的过程中,编者在适度注意本课程自身的系统性与逻辑性的同时,着重把握"以应用为主,以必需够用为度"的原则,取材少而精,对超出基本要求的内容一般不编入.侧重于学生完整全面地掌握基本概念、基本方法,强调学生基本运算能力的培养和提高,没有追求过于复杂的计算.文字叙述通俗易懂,深入浅出,注意到对学生自学能力的培养.

由于编者水平有限,书中难免有不足之处,欢迎批评指正.

编　者

2007 年 1 月

目　　录

第一章　行　列　式

在生产实践中，一些变量之间的关系可以直接地或近似地表示为线性函数，因此研究线性函数是非常重要的问题．线性代数主要是研究线性函数，在线性代数中线性方程组是一个基础部分，也是一个重要部分．研究线性方程组首先需要了解行列式这个重要工具．数学是从人类生产、生活的需要中产生的，行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的．它在数学本身或在其他科学分支上（如物理学，力学等）都有广泛的应用．

［学习要点］

1．行列式的定义、性质；

2．行列式的计算；

3．克莱姆法则．

§1.1　行列式的概念

首先我们考察用消元法求解二元一次方程组和三元一次方程组，从中引出二阶和三阶行列式的概念．然后把这些概念推广，得到高阶（n 阶）行列式的概念．

一、二阶行列式

考察两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 b_1，b_2 是常数项，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}是未知量的系数，可简单

记为 $a_{ij}(i,j=1,2)$. a_{ij} 有两个下标 i,j. a_{ij} 表明是第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数. 例如 a_{21} 就是第二个方程中第一个未知量 x_1 的系数.

现在采用消元法求解方程组(1),为了消去 x_2,用 a_{22} 乘第一个方程,a_{12} 乘第二个方程,即

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2 \end{cases}$$

然后相减,得到只含 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2 \tag{2}$$

为消去 x_1,用 a_{21} 乘第一个方程,a_{11} 乘第二个方程,即

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=a_{11}b_2 \end{cases}$$

然后相减,得到只含 x_2 的方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21} \tag{3}$$

由式(2)和式(3)可知,若

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0 \tag{4}$$

则方程组(1)有惟一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{5}$$

由式(5)给出的 x_1 与 x_2 的表达式,分母都是 D,它只依赖于方程组(1)的四个系数. 为了便于记住 D 的表达式,我们引进二阶行列式的概念.

定义 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{6}$$

称为**二阶行列式**.

它含有两行,两列. 横写的叫做**行**,竖写的叫做**列**. 行列式中的

数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，i 表示 a_{ij} 所在的**行数**，j 表示 a_{ij} 所在的**列数**. a_{ij} 表示位于行列式第 i 行第 j 列的元素，如 a_{12} 表示位于第 1 行第 2 列的元素.

二阶行列式表示一个数，此数为 2! 项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线(又称为行列式的主对角线)上两个元素的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线上两个元素的乘积，取负号. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5-(-2)\times 3=11$$

其中 $a_{11}=1, a_{12}=-2, a_{21}=3, a_{22}=5$. 又如

$$\begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)-a\cdot a=-b^2$$

其中 $a_{11}=a+b, a_{12}=a, a_{21}=a, a_{22}=a-b$

根据定义，我们容易得知(5)式中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果我们记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

那么方程组(1)式的惟一解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{8}$$

其中 D 是由方程组(1)的系数确定的二阶行列式，与右端常数项无关，故称 D 为方程组(1)的系数行列式.

D_1 是把 D 中第一列(x_1 的系数)a_{11}, a_{21} 换成了常数项 b_1, b_2，

D_2 是把 D 的第二列(x_2 的系数)a_{12},a_{22} 换成了常数项 b_1,b_2. 这样求解二元一次方程组就归结为求三个二阶行列式的值. 象这样用行列式来表示解的形式简便容易记忆.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2=7\\ x_1-3x_2=-2\end{cases}.$$

解 这里 $$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-19,D_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-11.$$

因此,所给方程组的惟一解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}.$$

二、三阶行列式

对于含有三个未知量 x_1,x_2,x_3 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{9}$$

也可以用消元法求解. 为了求得 x_1,需要消去 x_3 和 x_2. 消元过程可以分两步进行:

第一步从(9)式的前两个方程和后两个方程中消去 x_3,得到含有 x_1 和 x_2 的线性方程;第二步再消去 x_2,由第一步(第一个方程乘 a_{23},减去第二个方程乘 a_{13};第二个方程乘 a_{33},减去第三个方程乘 a_{23}),得到

$$\begin{cases}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_2=b_1a_{23}-a_{13}b_2\\ (a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})x_1+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_2=b_2a_{33}-a_{23}b_3\end{cases}$$

再由第二步[第一个方程乘($a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$)减去第三个方程

乘$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$]整理得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{23}+b_3a_{12}a_{23}-ba_{22}a_{13}$$

若 x_1 的系数不为零，于是得到

$$x_1=\frac{D_1}{D}$$

其中

$$\begin{aligned} D=&\ a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33} \\ &+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13} \\ =&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ D_1=&\ b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{33} \\ &+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13} \\ =&\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

同理可以得到

$$x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \tag{11}$$

与解二元线性方程组一样，称 D 为(9)式的系数行列式，D_1，D_2，D_3 分别是用常数项来替换 D 中的第一列(x_1 的系数)，第二列(x_2 的系数)，第三列(x_3 的系数)得到的.

我们把形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

的表示式称为**三阶行列式**.根据二阶行列式的定义,系数行列式 D 可写成如下形式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

这样我们便可以用二阶行列式来定义三阶行列式了.

定义 2 三阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

按第一行的展开式

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

按第一列的展开式

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{12}$$

说明 三阶行列式表示一个数,它是由三个二阶行列式来表示的.若把三个二阶行列式展开就得到的三阶行列式是由 $3\cdot 2=3!$ 项的代数和组成.

例 2 利用三阶行列式的定义可以计算出三阶行列式的值. 如

$$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\-2&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&1\\3&5\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}$$

$$=2\times12+4\times(-1)-2\times(-5)=30$$

例 3 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\3x_1+2x_2-5x_3=1\\x_1+3x_2-2x_3=4\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}2&-5\\3&-2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1&1\\3&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&1\\2&-5\end{vmatrix}$$

$$=2\times11-3\times(-1)+3=28,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21,$$

因此方程组的惟一解

$$x_1=\frac{13}{28},x_2=\frac{47}{28},x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

三、n 阶行列式

比较两个未知量和三个未知量的线性方程组解的表达式可以看出，当方程的个数＝未知数的个数时，虽然方程组所含未知量的个数不同，但当引进二阶和三阶行列式后，只要系数行列式 $D\neq 0$，它们的解可以表示成相同的形式，即都可以表示成两个行列式之商. 这样我们自然会问，对于更多个未知量（如 n 个未知量）的线性方程组来说，是否也有类似的结果呢？下面我们首先定义 n 阶行列式.

仿照用二阶行列式来定义三阶行列式的方法. 我们可以利用三阶行列式来定义四阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

在定义了四阶行列式之后，同样可用递推式定义五阶，六阶，…，n 阶行列式，在 $n-1$ 阶行列式已经定义的情况下，n 阶行列式可以定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

说明

1. n 阶行列式是由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的表构成，横写的称为行，坚写的称为列. a_{ij} 表示位于行列式第 i 行第 j 列的元素.

2. n 阶行列式表示一个数，它是由 n 个 $n-1$ 阶行列式表示.

3. (13)式右端的书写规律是：$n-1$ 阶行列式前面的系数是 n 阶行列式的第一列元素 $a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}$，其符号是正号与负号相间. 第一个 $n-1$ 阶行列式是原 n 阶行列式中划去 a_{11} 所在的行(第一行)和所在的列(第一列)后剩下的行列式，……，第 i 个 $n-1$ 阶行列式是原 n 阶行列式中划去 a_{i1} 所在的行(第 i 行)和所在的列(第一列)后剩下的行列式，$i=1,2,\cdots n$.

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}=abcd.$

说明 此行列式 D 的特点是主对角线(即自左上角到右下角的那条对角线)的元素不完全为零,其他元素均为零.

习 题 1.1

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

2. 用行列式解线性方程组

(1) $\begin{cases} ax_1-2bx_2=c \\ 3ax_1-5bx_2=2c \end{cases}$ $(a,b\neq 0)$.

(2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=8 \\ x_1-2x_2-3x_3=-1 \end{cases}$.

§1.2 行列式的性质

根据行列式的定义可以计算行列式，但是这样对计算高阶行列式是很困难了. 如计算五阶行列式就要计算五个四阶行列式，即要计算 20 个三阶行列式，计算量是很大的. 所以一般不采用行列式的定义计算行列式. 为了解决行列式的计算问题，就要先讨论行列式的性质，利用这些性质简化行列式的计算.

一、三阶行列式的性质

性质 1 将行列式的行与列依次互换，行列式值不变.

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证 只要把上式左右两边的三阶行列式按(12)式展开，然后进行比较即得证(学生自己完成).

若上述等式左端的行列式记为 D，则右边的行列式记为 D^{T}，则称行列式 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**.

例如 设
$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

则 D 的转置行列式就是
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

利用定义 2 可以算出 $D=D^{\mathrm{T}}=60$.