线性代数

XIANXINGDAISHU

刘静 高丽◎主编

山东大学出版社

线性代数

主　编　刘　静　高　丽
副主编　蔡平胜　李树金

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘静，高丽主编．—济南：山东大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5607-3411-8

Ⅰ．线...
Ⅱ．①刘...②高...
Ⅲ．线性代数-高等学校-教材
Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 113432 号

山东大学出版社出版发行
（山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码：250100）
山 东 省 新 华 书 店 经 销
莱芜市圣龙印务有限责任公司印刷
787×980 毫米　1/16　14 印张　258 千字
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
定价：23.80 元

前　言

《线性代数》是大学最重要的数学基础课之一。其基本内容是矩阵理论。线性代数的知识，是学习数学和其他学科的重要基础，已广泛地应用到科学研究的各个领域。这门课程本身具有概念多、符号多、运算法则多且易混淆等特点，内容上纵横交错、互相渗透，对培养学生的抽象性思维和逻辑性思维能力、空间直观和想象能力具有重要的作用。编者根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求，结合多年从事线性代数和高等代数等课程教学的体会编写了这本书。

线性代数内容的一大特点就是抽象。抽象是初学者学习线性代数的一大障碍。鉴于此，在编写过程中，借鉴了许多优秀教材的思想和处理方法，不是从定义出发，而是从问题出发引入课程内容，引导学生通过分析问题，建立新的概念，解决问题，使学生能正确地理解概念，注重联系实际，理解概念的来龙去脉，体会到这些知识的原创性和实质，从而更好地培养学生的创新意识和能力。表达上尽可能由浅入深，从学生中学所熟悉的方程组入手，将中学数学对方程组的变形提高到方程组的同解变形，将加减消元法提高到线性方程组的初等变换，在方程组的初等变换过程中，略去未知量很自然地引入了矩阵及矩阵的初等变换，从而使学生感到入门并不困难，从而提高学生深入学习和掌握其基本理论和方法的信心。本书叙述通俗，问题明确，难点分散，突出了对学生学习能力和逻辑推理能力的培养。在书中安排了较多的例题，便于学生掌握解题的技巧和方法。每章后附有小结、主要题型和 A,B 两组习题(B 组主要是历年的考研题)，以帮助读者加深理解及巩固所学知识。

本书在章节的安排上，使得每章较集中地解决了一类问题。全书共分 7 章，覆盖了数学(一)的考试要求。教师可以根据不同专业和不同教学时数选择有关章节组织教学。

限于编者的水平，书中内容体系、结构可能会有一些不当甚至错误和疏漏之处，热情欢迎同行和读者不吝指正。

在本书的编写过程中，得到了山东师范大学李师正老师的大力支持，并在百忙之中审阅了书稿，在此仅表衷心的感谢。

编　者

2007 年 6 月

目　录

第一章 线性方程组

线性方程组是线性代数中最重要的内容之一，它的应用很广泛，很多线性系统的研究最后往往归结为线性方程组的求解问题，而且非线性系统有时也近似简化成线性系统处理，因此学好这个内容是非常重要的. 在科学和工程技术领域中遇到的线性方程组，一般是 $m\times n$ 线性方程组，研究这类方程组何时无解、何时有解的判断以及有解时解的求法是本章的主要内容.

§1 线性方程组的引入

【引例】 某化肥厂有甲、乙、丙、丁四种化肥，甲种化肥每千克含氮 70 克、磷 8 克、钾 2 克；乙种化肥每千克含氮 64 克、磷 10 克、钾 0.6 克；丙种化肥每千克含氮 70 克、磷 5 克、钾 1.4 克；丁种化肥每千克含氮 68 克、磷 7 克、钾 1.8 克. 若用这四种化肥适当混和，能否配制出总重量 23 千克且含磷 149 克、钾 30 克的化肥？如果能，有多少种配法？

分析 设甲、乙、丙、丁四种化肥各需要 x_1,x_2,x_3,x_4 千克，则根据题意得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=23 \\ 8x_1+10x_2+5x_3+7x_4=149 \\ 2x_1+0.6x_2+1.4x_3+1.8x_4=30 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

如果这个方程组有解，并且 x_1,x_2,x_3,x_4 取的值都是正数，那么用这四种化肥可以配制出 23 千克且含氮 149 克、钾 30 克的化肥. 此时，方程组(1.1.1)满足 $x_i>0(i=1,2,3,4)$ 的解的个数就是配方的个数.

方程组(1.1.1)的每个方程中，左端都是未知量 x_1,x_2,x_3,x_4 的一次齐次式，右端是常数，像这样的方程组称为线性方程组. 每个未知量前面的数称为系数，右端的项称为常数项.

定义 1.1 含 n 个未知量 s 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1.1.2}$$

称作 ***n* 元线性方程组**，其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是未知量，s 是方程的个数，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n)$ 称为系数，$b_i(i=1,2,\cdots,s)$ 称为常数项，常数项一般写在等号的右边. 方程组中未知量的个数 n 与方程的个数 s 不一定相等. 系数 a_{ij} 的第一个指标 i 表示它在第 i 个方程，第二个指标 j 表示它是 x_j 的系数.

常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,s)$ 不全为 0 时，我们称(1.1.2)为**非齐次线性方程组**；当常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,s)$ 全为 0 时，我们称(1.1.2)为**齐次线性方程组**.

对于线性方程组(1.1.2)，如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后，每个方程都变成恒等式，那么称 n 元有序数组 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是线性方程组(1.1.2)的一个**解**. 方程组(1.1.2)的所有解组成的集合称为这个方程组的**解集**. 解方程组实际上就是找出它的全部解，或者说，求出它的**解集合**. 如果两个方程组有相同的解集合，它们就称为**同解的**.

§2 高斯消元法

在中学代数里我们学过用加减消元法和代入消元法解二元、三元线性方程组. 下面就来介绍如何用消元法解 n 元线性方程组.

2.1 线性方程组的初等变换

先看一个例子.

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+3x_3=1 \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4 \\ 2x_1\qquad\quad +2x_3=6 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

分析 如果我们能设法消去未知量 x_1,x_2，剩下一个含 x_3 的一元一次方程，那么就能求出 x_3 的值，进而得到含 x_1,x_2 的方程组. 类似地，可以求出 x_2，x_1 的值. 所谓消去未知量 x_1，就是使 x_1 的系数变成 0. 我们将方程组的方程自上而下分别记为方程①，②，③. 以下我们用记号“③ · $\frac{1}{2}$”表示用 $\frac{1}{2}$ 乘第 3 个方

程；用记号“②＋①·(－3)”表示把方程组的第一个方程的(－3)倍加到第二个方程上；用记号(①,②)表示把方程组的第1、第2个方程互换位置.

解　原方程组

$$\xrightarrow[③+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-2)}\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\ \quad 4x_2-x_3=2\\ \quad x_2-x_3=5\end{cases}\xrightarrow{(②,③)}\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\ \quad x_2-x_3=5\\ \quad 4x_2-x_3=2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot(-4)}\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\ \quad x_2-x_3=5\\ \quad 3x_3=-18\end{cases}\xrightarrow{③\cdot\frac{1}{3}}\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\ \quad x_2-x_3=5\\ \quad x_3=-6\end{cases}\tag{1.2.2}$$

$$\xrightarrow[①+③\cdot(-3)]{②+③}\begin{cases}2x_1-x_2=19\\ \quad x_2=-1\\ \quad x_3=-6\end{cases}\xrightarrow{①+②}\begin{cases}2x_1=18\\ \quad x_2=-1\\ \quad x_3=-6\end{cases}$$

$$\xrightarrow{①\cdot\frac{1}{2}}\begin{cases}x_1=9\\ \quad x_2=-1\\ \quad x_3=-6\end{cases}\tag{1.2.3}$$

因此，(9，－1，－6)是线性方程组(1.2.1)的唯一的一个解.

由上例的求解过程不难看出，它实际上是反复对方程组进行了三种变换：

(1)用一个非零的数乘某一个方程；

(2)把一个方程的倍数加到另一个方程上；

(3)互换两个方程的位置.

定义 2.1　变换(1)，(2)，(3)称为**线性方程组的初等变换**.

像式(1.2.2)这样的方程组称为阶梯形方程组；像式(1.2.3)这样的方程组称为简化阶梯形方程组.

消元的过程就是反复施行初等变换的过程. 对方程组(1.2.1)施行初等变换先化为阶梯形方程组(1.2.2)，对阶梯形方程组(1.2.2)进一步施行初等变换，变成简化阶梯形方程组(1.2.3)，从而立即看出方程组的解. 而初等变换总是把方程组变成同解的方程组.

2.2　线性方程组的系数矩阵和增广矩阵

在上例的求解过程中，只是对方程组的系数和常数项进行了运算. 因此，为了书写简便，对于一个线性方程组可以只写出它的系数和常数项，并且把它们按照原来的次序排成一张表，这张表称为线性方程组的增广矩阵. 而只列出系数的表称为方程组的系数矩阵. 例如，线性方程组(1.2.1)的增广矩阵和系数矩阵

分别是：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

定义 2.2　由 $s\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 s 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

称为一个 $\boldsymbol{s\times n}$ **矩阵**. 其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n)$ 叫做矩阵(1.2.4)的第 i 行第 j 列的元素.

矩阵(1.2.4)也常记为 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{s\times n}$，还常用大写的英文字母 $A,B,\cdots$ 或 $A_{s\times n},B_{s\times n},\cdots$ 表示.

注　(1)元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，简记为 O，s 行 n 列的零矩阵可以记成 $O_{s\times n}$.

(2)如果一个矩阵的行数和列数相等，则称它为方阵. n 行 n 列的方阵也称为 n 阶方阵，这时，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的位置称为方阵的主对角线，并称这些元素为主对角线元素，另一条对角线相应地称为副对角线.

(3)主对角线元素全是 1，而其余元素全为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶单位矩阵，记为 E_n 或 E，即：

$$E_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(4)当 $n=1$ 时，矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times 1}$ 只有一列，即 $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}$ 称为列矩阵，也称为列向量；同样，当 $s=1$ 时，矩阵 $A=(a_{ij})_{1\times n}$ 只有一行，即 $A=(a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1n})$ 称为行矩阵，也称为行向量；当 $s=n=1$，A 成为仅有一个数的一阶方阵 (a_{11})，即为一个数.

本章只围绕线性方程组来研究矩阵，第三章再深入地研究矩阵的运算和其他性质.

2.3　矩阵的初等变换

利用线性方程组的增广矩阵，我们可以把引例中的求解过程按照下述格式来写.

解

$$\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow[③+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-2)}\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&4&-1&2\\0&1&-1&5\end{bmatrix}\xrightarrow{(②,③)}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&4&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{③+②\cdot(-4)}\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&3&-18\end{bmatrix}\xrightarrow{③\cdot\frac{1}{3}}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&1&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[①+③\cdot(-3)]{②+③}\begin{bmatrix}2&-1&0&19\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{①+②}$$

$$\begin{bmatrix}2&0&0&18\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{①\cdot\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&0&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{bmatrix}$$

以最后一个矩阵为增广矩阵的方程组是

$$\begin{cases}x_1 \qquad\qquad =9\\ \qquad x_2 \qquad =-1\\ \qquad\qquad x_3=-6\end{cases}$$

因此，原线性方程组的解为(9，−1，−6).

注　从上述求解过程看出，我们对线性方程组的增广矩阵施行了三种变换：

(1)用一个非零的数乘矩阵的某一行(kr_i)；

(2)把矩阵某一行的倍数加到另一行上(r_i+kr_j)；

(3)互换矩阵两行的位置($r_i\leftrightarrow r_j$).

定义 2.3　变换(1)，(2)，(3)称为**矩阵的初等行变换**.

一般来说，一个矩阵 A 经过初等行变换变成另一个矩阵 B，我们写成

$$A\rightarrow B$$

在上例的求解过程中，先把增广矩阵经过初等行变换化成了矩阵

$$\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&3&-18\end{bmatrix}$$

像这种矩阵称为**阶梯形矩阵**. 其特点是:

(1)没有一个非零行出现在零行之下(如果有零行的话);

(2)每个非零行的第一个非零元素(称为该行的首非零元素)总出现在上一行首非零元素的右边.

对阶梯形矩阵继续施行初等行变换,直至化成了矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

像这种矩阵称为**行最简形矩阵**. 其特点是:

(1)它是阶梯形矩阵;

(2)每个非零行的首非零元素是 1;

(3)包含首非零元素的列中其他元素都是 0.

在解线性方程组时,把它的增广矩阵经过一系列的初等行变换化为阶梯形矩阵,写出相应的阶梯形方程组,然后逐步回代求出方程组的解,这种求方程组的解的方法称为高斯消元法;或者,把增广矩阵经过一系列的初等行变换一直化为行最简形矩阵,写出它表示的简化阶梯形方程组,从而立即得出其解. 这种消元法称为高斯—约当消元法.

下面通过举例说明如何应用消元法求解一般的线性方程组.

【例 1.2.1】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解 把方程组的增广矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

最后这个阶梯形矩阵表示的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\ 0 = -2 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 无论取什么值都不能满足第三个方程 $0 = -2$,因此,原线性方程组

无解.

【例 1.2.2】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

解 把方程组的增广矩阵进行初等行变换化为行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后这个行最简形矩阵表示的线性方程组是$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$，从第一个方程看出，对于 x_2 每取一个值 c，可以求得 $x_1 = c+2$，从而得到原方程组的一个解 $(c+2, c, -1)$. 由于 c 可以取任意一个数，因此原方程组有无穷多个解. 我们可以用下述表达式来表示这无穷多个解$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$，这个表达式称为原线性方程组的**一般解**，其中 x_2 称为**自由未知量**.

最后我们指出，对于矩阵我们同样地可以定义**初等列变换**，即：

(1)用一个非零的数乘矩阵的某一列(kc_i)；

(2)把矩阵某一列的倍数加到另一列上($c_i + kc_j$)；

(3)互换矩阵两列的位置($c_i \leftrightarrow c_j$).

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

思考 从例 1.2.1、例 1.2.2 的求解过程，你能找出判别线性方程组是否有解的方法吗？方程组有解时，你能从它们的增广矩阵化成的阶梯形矩阵找出它们什么情况下有唯一解，什么情况下有无穷多个解吗？

§3　线性方程组的解的情况及其判别准则

上一节的引例、例 1.2.1、例 1.2.2 的线性方程组分别有唯一解、无解、有无穷多个解. 例 1.2.1 的阶梯形方程组出现了 $0=-2$ 这个方程，从而无解；引例和例 1.2.2 的阶梯形方程组中没有出现"$0=d$(其中 d 是非零数)"这样的方程，它们分别有唯一解和无穷多个解. 由此我们得到：

定理 1　把 n 元线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵，如果相应的阶梯形方程组中出现了"$0=d(d\neq 0)$"这样的方程，则原方程组无解；否则，方程组有解. 有解时，如果阶梯形矩阵非零行的行数 r 等于未知数的个数 n，则原方程组有唯一解；如果非零行的行数 $r<n$，则原方程组有无穷多个解.

证明　由于线性方程组与对它进行初等行变换后得到的阶梯形方程组同解，因此我们只要讨论阶梯形方程组的解有几种可能及其判别准则就可以了. 设线性方程组有 n 个未知量.

情形 1　阶梯形方程组中出现了形如"$0=d$(其中 d 是非零数)"的方程，由于这种方程无解，所以阶梯形方程组无解.

情形 2　阶梯形方程组中没有出现形如"$0=d$(其中 d 是非零数)"的方程，我们设阶梯形方程组的增广矩阵中，非零行的行数为 r.

情形 2.1　$r=n$，此时阶梯形方程组形如：

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{nn}x_n=d_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=0 \end{cases} \tag{1.3.1}$$

其中 $c_{11},c_{22},\cdots,c_{nn}$ 都不为零. 对于(1.3.1)增广矩阵施行初等行变换化成的最简形矩阵形如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n' \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而阶梯形方程组有唯一解：$(d_1', d_2', \cdots, d_n')$.

情形 2.2　$r<n$. 此时阶梯形方程组形如

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{1.3.2}$$

其中 $c_{11}, c_{2j_2}, \cdots, c_{rj_r}$ 都不为 0，此时方程组与下述方程组同解

$$\begin{cases} x_1 = c_{1k}'x_k + \cdots + c_{1l}'x_l + d_1' \\ x_{j_2} = c_{2k}'x_k + \cdots + c_{2l}'x_l + d_2' \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r} = c_{rk}'x_k + \cdots + c_{rl}'x_l + d_r' \end{cases} \tag{1.3.3}$$

其中 $x_k, \cdots, x_l$ 是 $n-r$ 个自由未知量，由于这 $n-r$ 个自由未知量可以取无穷多组值，因此方程组(1.3.2)可以有无穷多个解.(1.3.3)就是这无穷多个解的一般解.

思考　r 能否大于 n?

【例 1.3.1】　λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？有无穷多解时，求出其一般解.

解　对增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & (\lambda-1)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

由此可见：

(1)当$(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，原方程组有唯一解；

(2)当$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$，但$(\lambda-1)(\lambda+1)^2\neq 0$，即$\lambda=-2$时，原方程组无解；

(3)当$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$且$(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$，即$\lambda=1$时，原方程组有无穷多个解，此时

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & (\lambda-1)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此原方程组的一般解是 $x_1=1-x_2-x_3$，其中 x_2, x_3 是自由未知量.

思考　齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}\tag{1.3.4}$$

是否一定有解？

分析　(1)$(0,0,\cdots,0)$是齐次线性方程组(1.3.4)的一个解，这个解称为它的零解. 任何一个齐次线性方程组都有零解.

(2)如果一个齐次线性方程组除了零解外，还有其他的解，则称其他的解为它的非零解. 如果一个齐次线性方程组有非零解，则它有无穷多个解.

那么如何判断一个齐次线性方程组有非零解？

推论 1　n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是：它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中，非零行的行数 $r<n$.

推论 2　如果 n 元齐次线性方程组中方程的个数 $s<n$，那么它必有非零解.

【例 1.3.2】　判断齐次线性方程组