

奥博丛书

解题研究

JIETI YANJIU

上海教育出版社





世纪出版

责任编辑 叶中豪
封面设计 RED PHOTO

奥博丛书之

高中奥林匹克数学系列

这是一套供青少年学生在数学智力竞赛活动中提高知识和能力的系列读物,旨在培养创造性思维,提高学习效率.

- | | |
|----------------------|-------------|
| 1. 《平面几何》 | 过伯祥 编著 |
| 2. 《不等式和最大值》 | 石世昌 编著 |
| 3. 《组合数学》 | 徐士英 编著 |
| 4. 《初等数论》 | 冯祖鸣 编著 |
| 5. 《解题研究》 | 单 樽 编著 |
| 6. 《我怎样解题》 | 单 樽 编著 |
| 7. 《中学数学竞赛导引》 | 常庚哲、严镇军等 编著 |
| 8. 《数学奥林匹克大集》 | 黄宣国 编著 |
| 9. 《奥林匹克数学方法选讲》 | 黄国勋 编著 |
| 10. 《解数学竞赛题的常用策略》 | 王连笑 编著 |
| 11. 《奥林匹克数学教育的理论与实践》 | 冯跃峰 编著 |
| 12. 《数学奥林匹克试题背景研究》 | 刘培杰 编著 |
| 13. 《奥林匹克数学概论》 | 朱华伟 编著 |
| 14. 《国际数学奥林匹克研究》 | 熊 斌、田廷彦 编著 |

高中数学联赛一试系列

浙江奥数网:
<http://www.zjaoshu.com>

杭州奥博文化传播有限公司
浙江省杭州市学院路83号221室
电话: 0571-8502 8528
传真: 0571-8502 8578
电邮: zjaoshu@zjaoshu.com
丛书策划: 徐 莹

- | | |
|----------------|--------|
| 1. 《解析几何》 | 虞金龙 编著 |
| 2. 《数列与数学归纳法》 | 蔡小雄 编著 |
| 3. 《集合与函数》 | 李惟峰 编著 |
| 4. 《三角函数》 | 张金良 编著 |
| 5. 《立体几何》 | 吴国建 编著 |
| 6. 《复数与向量》 | 吕峰波 编著 |
| 7. 《不等式》 | 郑日锋 编著 |
| 8. 《排列组合与概率统计》 | 许康华 编著 |

ISBN 978-7-5444-1031-1



9 787544 410311 >

易文网: www.e wen.com

定 价: 18.00元

奥博丛书

G634.6/28

2007

解题研究

JIETI YANJIU

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

解题研究 / 单樽著. —上海:上海教育出版社, 2007.4

(奥博丛书)

ISBN 978-7-5444-1031-1

I. 解... II. 单... III. 数学课—高中—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第031522号

奥博丛书

解 题 研 究

单 樽 著

上海世纪出版股份有限公司出版发行
上海教育出版社

易文网: www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海市北印刷集团有限公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 8.75 插页 2

2007年4月第1版 2007年4月第1次印刷

印数 1-4,100本

ISBN 978-7-5444-1031-1/O·0014 定价:18.00元

(如发生质量问题,读者可向工厂调换)

丛书序言

一本武功秘籍！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说：“欲速则不达。”不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫圇吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。“尽信书，则不如无书。”作者也有可能出错。“乾坤大挪移”第七层心法的一十九句就是“单凭空想而想错了的。”其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识；……。

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味(taste)，也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单 搏

2006年3月16日

作者的话

原先想用的书名是《怎样解题》，但波利亚的名著《怎样解题》早已风靡全球，再用同样的名字似乎不太妥当。

不过，我们相信波利亚先生（愿他在天之灵安息）决不会计较，即使我们触犯了书名的专利权，因为现在的这本书正是阐述他的思想。当然，这本《解题研究》也有自己的特色。

所谓自己的特色，即我们自己的解题经验与总结。“我们”，除了作者，还包括许许多多热爱解题的朋友、学生与教师。



我国著名数学传播、普及和数学竞赛的专家。1964年毕业于扬州师范学院数学系，在中学、大学任教四十多年。

1983年获理科博士学位（我国首批18名博士之一），1991年当选全国“优秀教师”，1991年7月起享受政府特殊津贴，

1992年评为国家有突出贡献的中青年专家。1995年评为省“优秀学科带头人”。

单樽教授曾任南京师范大学数学系主任，中国数学奥林匹克委员会委员、教练组组长，国家教委理科试验班专家组组长，南京数学学会理事长。

单樽教授主要从事数论与组合方面的研究，很多成果达到国际先进水平。

1989年作为中国数学奥林匹克代表队副领队、主教练，1990年作为领队，率队参赛IMO均获总分第一。为我国数学竞赛事业作出很大贡献。

目 录

第一章 与同学们谈解题	1
1. 解题的重要性	1
2. 解题必须实践	2
3. 信心与决心	2
4. 兴趣	3
5. 专心致志	5
6. 打好基础	6
7. 简单技巧	10
8. 应用题	12
9. 常规问题	15
10. 简单、自然	17
11. 一个实际例子	21
12. 字母的使用	22
13. 代数方法(一)	25
14. 代数方法(二)	27
15. 几何计算	29
16. 分析法	31
第二章 喜爱数学的同学	34
1. 做有质量的问题	34
2. 基本量	37
3. 从简单的做起	39
4. 寻找规律	42
5. 简单自然、直剖核心	45
6. 跟着感觉走	48

7. 思则有路	51
8. 要有好的想法(一)	54
9. 要有好的想法(二)	55
10. 从不同的角度看问题	59
11. 创造条件	61
12. 非智力因素	63
第三章 解题的基本知识	65
1. 问题是数学的心脏	65
2. 解题是数学的特点	67
3. 教会思考	70
4. 解题必须实践	72
5. 问题的种类	75
6. 解题的步骤	77
7. 弄清问题	79
8. 拟定计划	83
9. 实现计划	87
10. 总结(一)	90
11. 总结(二)	93
12. 12条解题要诀	96
第四章 修改解答	98
1. 笨拙的解答	98
2. 不要滥用反证法	101
3. 直接去做	103
4. 尽信,则不如无	105
5. 对照比较(一)	110
6. 对照比较(二)	116
7. 弄清实质	119
8. 文章病院	123
9. 自己的毛病	126
第五章 10道问题	130

1. 上下求索	130
2. 学思结合	132
3. 逐步逼近	134
4. 比赛日程	135
5. 双轨迹模式	138
6. 集成块与组合拳	140
7. 算两次	141
8. 平方数与平方式	144
9. 谋定而后动	147
10. 电阻问题	150
第六章 数学教师	152
1. 解题的重要性	152
2. 教师的素养	154
3. 教师的优势	156
4. 理解题意	157
5. 变更问题	160
6. 从何入手	164
7. 用不同的观点看问题	168
8. 拟定与实现计划	173
9. 技巧	176
10. 不必“为技巧而技巧”	180
11. 简单自然	183
12. 关于一题多解	190
13. 探索法	198
14. 慎于初战	202
15. 加阶梯	206
16. 非数学因素	209
第七章 谈谈命题	212
1. 关于题库	212
2. 处处留心	213

3. 旧瓶新酒	218
4. 源头活水	227
5. 可上可下	230
6. 苦心孤诣	235
7. 小心出错	239
8. 问题的背景	243
9. 不适当的问题	250
10. 小题大做	255
11. 一道试题的编制	258
第八章 波利亚及其解题理论	261
1. 波利亚的生平	261
2. 波利亚的教育论著(一)	263
3. 波利亚的教育论著(二)	265
4. 波利亚的教育论著(三)	268
5. 波利亚的教育论著(四)	269

第一章 与同学们谈解题

这一部分,与广大同学谈如何解题.所谈的是解题的基本内容,所举的例题也都是比较容易的.

1. 解题的重要性

我曾经问一些初中同学:

“你们觉得数学的特点是什么?”

回答是:

“数学有很多习题.”

回答完全正确.

物理、化学、生物也有一些习题,但数量远远少于数学,“花样”更不及数学那样变化万千.对于物理、化学、生物来说,培养动手做实验的能力,比培养解题能力更为重要.

数学的习题,不仅用来巩固所学的知识,而且可以培养你的能力,发展你的智慧.只有通过解题,你才能更多、更好地掌握数学的内容、意义和方法.

学数学的目的,不是别的,就是为了学会解题.

数学书中有不少公式、法则、定义、定理,这些都不需要死记硬背,而是要通过解题逐步地理解、掌握.所以善于学习数学的同学,都把主要精力花在解题上.

“数学尖子”就是解题能力强的同学.

希望这本书能提高你的解题能力,帮助你成为“数学尖子”.

2. 解题必须实践

怎样提高解题能力？

必须多做题。除此以外，没有别的办法。

这就像学骑自行车，你必须去骑才能学会如何骑。

开始，你可能需要别人扶着车子，推你，也可能会摔上几跤，但只要坚持骑，终究会学会的，而且还可以骑得很好，潇洒自如。

我国著名数学家华罗庚先生就曾在一次报告中说过，学习数学要做到熟练化。熟能生巧，进而出神入化。而要这样，就必须多练。

首先要做一定数量的基本题，打好基本功。在此基础上，再做一些较有技巧的问题。

没有一定的数量就不可能熟练。但更重要的是通过这一定数量的题，掌握基本的运算技能、基本的解题方法，做到纯熟自如。

要不断地提高自己的解题能力，决不要老是简单地重复，一遍又一遍地做那些已经掌握了了的习题。更重要的是习题的质量，要做一些有变化的、有技巧的题，掌握更多的新方法、新技巧。

所谓“数学尖子”，无非是多做了一些题，掌握了一些解题方法。只要努力去做题，你也能成为班上的“数学尖子”。

3. 信心与决心

应当对自己充满信心。

面对一道数学题，应当满怀信心：

“我能够解出来。”

“李雪花能解出来，我为什么解不出来？”

“江小毛能解出来，我更应该能解出来。”

你没有哪一点比别人差，甚至还有许多别人没有的优点。所以，不必气馁，至少应当努力“尝试”一下。

英国女诗人罗赛蒂(C. C. Rossetti, 1830—1894)有一首小诗“我

想试试”(I'll Try)写得很好：

那个说“我想试试”的小孩，
他将登上山巅，
那个说“我不成”的小孩，
在山下停步不前。
“我想试试”每天办成很多事，
“我不成”就真一事无成。
因此你务必说“我想试试”，
将“我不成”弃于埃尘。

当然，一次尝试未必就能完全成功，往往要一再尝试，反复多次，直至成功。应当知道：“自古成功在尝试”，“失败是成功之母”。无论谁都不免会遇到挫折，这是十分正常的，千万不要灰心丧气，曙光就在前头，或许胜利已经向你招手，只需要再努力一下。

决心也很重要。

不痛下决心，事情是办不好的。

如果你的家离学校不远，或者有班车直达，可能你不一定去学骑自行车，但如果你升入一所新学校，非骑自行车不可，那么你就会下决心去学骑车，而且一定能够学会。

很多事情都是“逼上梁山”的，如果明天就要交作业，周围又没有人能帮你做，那么你只好自己去解题。逼一逼，困难的题也就解出来了。

班上的“数学尖子”，由于没有比他更强的同学，别人遇上难题可以问他，他自己遇到难题只能自己去想，日久天长，他解难题的能力就越来越强，其实也是“逼”出来的。

项羽与秦兵决战，破釜沉舟。韩信攻打赵国，背水结阵。兵法上称为“置之死地而后生”，即没有其他选择，只能努力向前。

应当自觉地自己“逼”自己。下定决心，努力进取，就没有不能克服的困难。

4. 兴 趣

学习要有兴趣。

如果你对一件事有兴趣,那么你就会“乐此不疲”,比如你喜欢唱歌、打球或者下棋,那么你花很多时间唱歌、打球或者下棋,不但不会觉得累,反而觉得十分愉快。

如果你对数学有兴趣,那么你就会解很多数学题,越做越想做,根本不觉得是什么“负担”。

特别是一道困难的问题,冥思苦想,久久不能解决,突然灵机一动,想了出来,这时你一定觉得非常的快乐.而这种乐趣,是其他任何东西所不能代替的,只要你有过这种乐趣,你就会喜爱数学、喜爱解题。

我相信每一位数学家都有过上述体验,例子就不必举了.这里举一位现代人文科学的宗师胡适(1891—1962)作例子,看看他是怎么说的:

“我这时(注:胡适这时大约十四五岁)对于算学最感觉兴趣,常常在宿舍熄灯之后,起来演习数学问题.卧房里没有桌子,我想出一个法子来,把蜡烛放在帐子外床架上,我伏在被窝里,仰起头来,把石板放在枕头上做算题.因为下半年要跳过一班,所以我须要自己补习代数.我买了一部丁福保先生编的代数书,在一个夏天把初等代数习完了,下半年安然升班。”

兴趣生努力,努力生兴趣。

如果你原来对数学没有兴趣,那么可以逐步培养,逐步建立起兴趣来。

数学其实就是一种智力的游戏。

你可以先做一些有趣的智力题(也就是数学题)。

比如:四张扑克牌,点数分别为:

8,2,4,9

如何用它们进行四则运算(加减乘除),使得数为24(每种运算用的次数不限,但每个数只能用一次)?

再如:五只袜子两种颜色,那么其中至少有几只袜子同一种颜色?

这方面的书很多,如任宏硕的《奥林匹克金钥匙》(海南摄影美术出版社出版,内容很浅,小学三年级以下就可以读,但图文并茂,不仅有趣,而且有深刻的数学内容),单增数学科普著作选第一辑《趣题巧解》、《快乐的数学》等(江苏教育出版社出版)等,都可以读一读。

你可以将每一道数学题作为对你的智力的挑战,你应当有信心,战而胜之。

开始做的题不要难,不要好高骛远,应当做力所能及的,甚至做一些低年级的题,增强信心,增加兴趣(例如 24 点,就是学过除法后人人可做的游戏)。

小学的应用题,初中的平面几何题,竞赛中的一些动手做的问题,都有助于提高兴趣(后面我们将会说到一些例子)。

“学海无涯苦作舟”,这句话我很不赞成,其中的“苦”字应当改成“乐”字,只有有了兴趣,你才能在“学海”中自在地遨游。

· 5. 专 心 致 志

解题时必须全神贯注,全身心地投入。

“不专心致志则不得焉”。如果在做作业时,吃东西、看电视、听别人聊天,思想不集中,那么时间花得多,作业也做不好,久而久之,形成做事不专心的坏习惯,而坏习惯一旦形成后,不花大力气就很难改正。

做作业时,思想应当高度集中,心无旁骛,争取在尽量短的时间内,“三下五除二”,很快完成作业,然后再吃东西、看电视或从事其他活动。

“学习时学习,玩的时候玩”,结果学得好,玩得也痛快;“学习时玩,玩的时候又担心功课未做好”,结果学得不好,玩得也不痛快。

学习好的同学,并不一定花很多的时间学习,诀窍在于合理使用时间,提高学习效率;而要提高效率,就必须专心致志。

解数学题,必须全力以赴,即使是常规问题,也需要开动脑筋想一想有哪几条路可走? 有哪一个例题可以仿效(最好能想一想有没有更好的解法)? 选好解题路线之后,你应小心翼翼,在计算或推理中不可出错。有时“走错一步,满盘皆输”,所以切不可粗枝大叶,掉以轻心(细心也是一种需要从小培养的“习惯”)。

思想不集中,就容易出错,而且会一错再错,做错了推倒重来,显然比一次做好花的时间精力要多。应当力求一次做好,不要老是改来改去。

解题需要专心致志,反过来,解题也有助于培养做事专心致志的习惯.多解数学题,就不会粗心浮气,焦躁不安,这也是解题的一个功效.

6. 打好基础

“万丈高楼平地起”.要提高解题能力,首先要简单的基本题做好.

最基本的问题是四则运算.运算,一要准确,二要迅速.由于计算器的普遍使用,运算的准确迅速已经不再成为严重问题,更应当留心的是如何掌握运算规律,进行巧算.

例 1 计算 $8 \times 21 \times 25$.

解 $8 \times 21 \times 25 = 4200$.

这道题应当全用心算: $4 \times 25 = 100$,从而

$$8 \times 21 \times 25 = (2 \times 21) \times (4 \times 25) = 4200.$$

既然用心算,就没有必要再写出所谓过程.这种“过程”必须“消灭”,因为它是不该有的“废招”.废招过多,既浪费时间,也影响解题能力的提高.

说到“废招”,不由想到金庸的一本小说《连城诀》.其中“师祖梅念笙早瞧出三个徒儿心术不正,在传授之时故意引他们走上了剑术的歪路,而万震山与戚长发在教徒儿之时,或有意或无意的,引他们在歪路上走得更远”.于是徒弟们学的全是中看不中用的剑招,明明可以一剑直接刺去,却偏要转七个圈子.如果对方直接一刀挥来,早就头颅落地了.可见废招十分害人.

我们的老师当然不会故意教同学废招,但在初学阶段,也许会作一些分析式的讲解,例如合并同类项:

$$5x - 3x = (5 - 3)x = 2x.$$

开始这样讲,是为了说清道理,但中间一步应当心算,在熟练之后,必须省掉.可惜有的同学不懂这个道理,我就遇到一位高三学生,竟然还这样做:

$$15x - 3x + 2x$$