21世纪 高等学校本科数学规划教材

高等数学学习辅导

（理工类）下册

Advanced Mathematics Guidance

東北大學出版社
Northeastern University Press

013-42/10
:2
2007

21世纪高等学校本科数学规划教材

高等数学学习辅导

Advanced Mathematics Guidance

（理 工 类）

下 册

东北大学出版社

·沈 阳·

© 付连魁　赵更生　王天宝 2007

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导（理工类）下册/ 付连魁，赵更生，王天宝主编．—沈阳：东北大学出版社，2007.8

ISBN 978-7-81102-379-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①付…　②赵…　③王…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 129831 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：184mm×260mm

印　　张：10.75

字　　数：323 千字

出版时间：2007 年 8 月第 1 版

印刷时间：2007 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：刘乃义　刘宗玉　　　　责任校对：文　浩

封面设计：唐敏智　　　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-379-4　　　　定　价：20.00 元

前　　言

大学数学是高等院校理工、经管等各类学生必修的基础课，又是“考研”的统考科目，所以一直深受学生们的重视。作为多年工作在大学数学教学第一线的教师，我们深知学生们对数学课的重视程度，以及对一本好的数学辅导书的渴求。对于刚刚走入大学校门的新生来说，一是对大学自主学习的学习方式不太适应，二是大学数学概念的抽象和运算的繁杂，往往使他们感到力不从心。正是出于这些考虑，我们以东北大学出版社出版的“21 世纪高等学校本科数学规划教材”为蓝本，编写出与其配套的学习辅导书。但同时这套数学辅导书又是从各自体系、内容出发，相对独立，因此也可以供使用其他教材的学生使用。编写这套数学辅导书的目的是让学生熟悉自主学习思路，尽快完成学习方法和思维方式的转变，对所学课程的学习进行全面指导，力求取得“用时少，成绩好”之效果。

本书为“21 世纪高等学校本科数学规划教材”中《高等数学（理工类）下册》的辅导书，全书共五章，每章均有内容精要、归类解析、习题详解、同步测试四部分，具体是：

1．内容精要　包括主要定义、主要结论和结论补充三项，结论补充给出了作者由多年教学经验总结出的行之有效的计算公式。

2．归类解析　是将所涉及的内容，尤其是重点内容进行系统归类，然后，通过相当数量的例题演示向学生介绍解题方法和运算技巧。

3．习题详解　对教材中出现的所有习题均给出详细解答，有些题还给出多种解法，意在学生遇有疑难之时助一臂之力，起到课下辅导的作用。

4．同步测试　每章都安排同步测试题一套，用时 2 小时。同步测试的目的在于巩固所学知识，并找出差距。

由于作者水平有限，书中可能存在疏漏与不足，还望同仁及读者不吝赐教。如果本书能在节省学生们的宝贵时间、提高学习效率等方面有一定作用的话，我们将深感欣慰。

作　者

2007 年 2 月

《高等数学学习辅导（理工类）下册》编写人员

主　　　编：付连魁　赵更生　王天宝

副　主　编：费罗曼　艾艺红　佟　毅

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

王学理　张　欣　常海龙

喻建华　薛　危

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第七章　多元函数微分法及其应用

一、内容精要

(一) 主要定义

1. 二元函数的极限

设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的附近有定义(点 P_0 可除外)，点 P_0 的任一个邻域内都有使 z 有定义的点$P(x, y)$异于 P_0，当点 P 以任意方式趋近于P_0时，函数 $f(x, y)$相应地趋于一个确定的常数 A，则称 A 为$f(x, y)$当$(x, y)\to(x_0, y_0)$时的极限，记作

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A.$$

2. 二元函数在一点连续

设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某邻域内有定义，如果有

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

则称函数 $z=f(x, y)$在点 P_0 处连续.

3. 偏导数

设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x, y_0)-f(x_0, y_0)}{x-x_0}$$

存在，则称此极限为 $z=f(x, y)$在点 P_0 处对 x 的偏导数；称极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad 或 \quad \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0, y)-f(x_0, y_0)}{y-y_0}$$

为 $f(x, y)$ 在点 P_0 处对 y 的偏导数. 分别记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$f_x(x_0, y_0)$ 与 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$f_y(x_0, y_0)$等.

4. 全微分

如果函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$处的全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

其中 A，B 不依赖于 Δx，Δy，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微. 此时表达式 $A\Delta x+B\Delta y$ 叫做函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处的全微分，记作 dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y \quad 或 \quad dz=A dx+B dy.$$

可以证明

$$dz=f_x(x_0, y_0)dx+f_y(x_0, y_0)dy.$$

5. 方向导数

设 $z=f(x, y)$在包含 $P(x, y)$，$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$的邻域内有定义，$\boldsymbol{l}=(\Delta x, \Delta y)$，

则 $f(x, y)$在 $P(x, y)$处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\rho},$$

其中
$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

类似地可以定义空间上的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z)}{\rho},$$

其中
$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$

6. 梯度(gradient)

设函数 $z=f(x, y)$在点 $P(x, y)$的某邻域内有连续的一阶偏导数，则向量 $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 称为$z=f(x, y)$在点 $P(x, y)$处的梯度，记作 $\mathbf{grad}f(x, y)$，即

$$\mathbf{grad}f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

注　$\mathbf{grad}f(x, y, z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$

(二) 主要结论

1. 可微与可偏导的关系

函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$处可微，则必可偏导，即$f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$存在，反之不真．特别地，即使 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$存在，函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处也不一定连续，当然也不一定可微．

2. 多元复合函数求导法则

(1) 如果 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$在点(x, y)处有偏导数，$z=f(u, v)$在点(u, v)处有连续偏导数，则 $z=f(u(x, y), v(x, y))$在点 $P(x, y)$处也有关于 x 或y 的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

在相应的条件下，还有下列求导公式．

(2) 若 $z=f(u, v, w)$，$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$，$w=w(x, y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

(3) 若 $z=f(u, x, y)$，$u=u(x, y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(4) 若 $z=f(u, v, w)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$，$w=w(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

3. 隐函数的求导公式

(1) 设 $y=y(x)$是由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的隐函数，且二元函数 $F(x, y)$有连续的

偏导数，$F_y(x, y)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

(2) 设 $z=z(x, y)$是由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的隐函数，三元函数 $F(x, y, z)$有连续的偏导数，且 $F_z(x, y, z)\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

(3) 方向导数的计算公式

函数 $z=f(x, y)$(或 $u=f(x, y, z)$)在其可微点处沿任何方向 l 的方向导数都存在，且有下列计算公式

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\quad\left(\text{空间为}\quad \frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right).$$

其中 α，β 为 l 与 x 轴和 y 轴正向的夹角(α，β，γ 为方向 l 的方向角).

(三) 结论补充

1. 若$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial x}$在点$P_0(x_0, y_0)$处连续，则 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$处微分存在.

2. 若在点 $P_0(x_0, y_0)$处$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$连续，则二者相等.

3. 若 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某邻域内连续，且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$. 记 $u(x, y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$，则

$u(P_0)>0$，$f_{xx}(P_0)<0$ 时，取极大值；

$u(P_0)>0$，$f_{xx}(P_0)>0$ 时，取极小值；

$u(P_0)<0$ 时，不取极值；

$u(P_0)=0$ 时，不能断定.

4. 可微函数 $z=f(x, y)$在可微函数 $\varphi(x, y)=0$ 条件下取极值的必要条件是

$$\begin{cases} f_x(x, y)+\lambda\varphi_x(x, y)=0,\\ f_y(x, y)+\lambda\varphi_y(x, y)=0,\\ \varphi(x, y)=0.\end{cases}$$

5. 曲线$\begin{cases} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t)\end{cases}$在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)},$$

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

6. 曲面 $F(x, y, z)=0$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程和法线方程分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}.$$

7. 全微分的几何意义

注　切平面　$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$，

记 $$\Delta x = x - x_0,\quad \Delta y = y - y_0,$$
则全微分 $$dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

8. 由两空间曲面决定的空间曲线 Γ: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 的切向量为

$$\boldsymbol{T} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}.$$

9. 记 $\boldsymbol{e} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j}$，$\alpha$，$\beta$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向角，则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \mathbf{grad} f \cdot \boldsymbol{e}.$$

10. 设 u，v 都是 x，y，z 的函数，u，v 具有各连续偏导数，f 可导，则有

(1) $\mathbf{grad}(u + Cv) = \mathbf{grad}u + C\mathbf{grad}v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv) = v\mathbf{grad}u + u\mathbf{grad}v$;

(3) $\mathbf{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(v\mathbf{grad}u - u\mathbf{grad}v) \quad (v \neq 0)$;

(4) $\mathbf{grad}f(u) = f'(u)\mathbf{grad}u$.

二、归类解析

(一) 求偏导数

1. 极限与偏导数

【例 7-1】 求极限 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{\sqrt{x^2y+4}-2}{x^2y}$.

【解】 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限，应该将分子有理化.

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\sqrt{x^2y+4}-2}{x^2y} = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y}{x^2y(\sqrt{x^2y+4}+2)} = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1}{\sqrt{x^2y+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

【例 7-2】 求极限 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{\sin x^2y}{xy}$.

【解】 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{\sin x^2y}{xy} = \lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{\sin x^2y}{x^2y} \cdot x = 1 \times 0 = 0$.

【例 7-3】 设 $z = \tan(3x - y) + y^{2x}$，求 z 的偏导数.

【解】 $z_x = \sec^2(3x - y) \cdot 3 + y^{2x}\ln y \cdot 2 = 3\sec^2(3x - y) + 2y^{2x}\ln y$,

$z_y = \sec^2(3x - y) \cdot (-1) + 2xy^{2x-1} = -\sec^2(3x - y) + 2xy^{2x-1}$.

【例 7-4】 设 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 讨论

(1) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?

(2) 偏导数 $f_x(0, 0)$，$f_y(0, 0)$ 是否存在?

【解】 (1) 因为 $0\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，由夹逼准则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

(2) 由偏导数定义，有

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0,$$

类似得 $f_y(0,0)=0$，故 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$均存在.

2. 复合函数求偏导数

【例 7-5】 设 $z=\ln(x^2+y^2)$，$x=u+v$，$y=u-v$，求$\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot1+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot1=\frac{2u}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot1+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot(-1)=\frac{2v}{u^2+v^2}.$$

【例 7-6】 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot3=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\frac{-x}{y^2}+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$=\frac{-2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

【例 7-7】 设 $f(u,v,w)$有连续偏导数，$z=f(x+y,x^2+y^2,x^2y^2)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 该函数是由 $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(x,y)=x+y$，$v=\psi(x,y)=x^2+y^2$，$w=\omega(x,y)=x^2y^2$ 复合而成的. 由复合函数求导法，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'+2xf_2'+2xy^2f_3',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=f_1'+2yf_2'+2x^2yf_3'.$$

【例 7-8】 设 $f(u,v)$，$g(s,t)$均有连续偏导数，$z=f(3x+y^2,g(xy,x^2))$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot3+f_2'(g_1'\cdot y+g_2'\cdot2x)=3f_1'+f_2'(yg_1'+2xg_2'),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot2y+f_2'(g_1'\cdot x+g_2'\cdot0)=2yf_1'+xf_2'g_1'.$$

【例 7-9】 设 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)$，其中 $f(u)$，$g(u)$可导，求 z_x，z_y.

【解】 $$z_x=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x^2}+g'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right),$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$z_y=xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+g'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y^2}=f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right).$$

【例 7-10】 设 $u=f(x,y)$所有的二阶偏导数连续，而 $x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2}$，证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad 及 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

【证】 $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$，两式平方后相加，得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

二阶偏导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

要注意，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$仍然是$x$和$y$的函数，求它们对$s$的偏导数时也要按复合函数求偏导数公式来处理. 从而当$\frac{\partial u}{\partial x}$对$s$求偏导数时，应有$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$这两项出现，$\frac{\partial u}{\partial y}$对$s$求偏导数时也有$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$这两项出现. $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$对$t$求偏导时情形类似.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\end{aligned}$$

两式相加，得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

【例 7-11】 设 f 有二阶连续偏导数，$z=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1'-\frac{y}{x^2}f_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{x}f_2'$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}f_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}''\right)+\frac{2}{x^3}f_2'-\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{y}f_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}''\right)\\&=\frac{1}{y^2}f_{11}''+\frac{y^2}{x^4}f_{22}''-\frac{2}{x^2}f_{12}''+\frac{2}{x^3}f_2',\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f_1'-\frac{x}{y^2}\left(\frac{-x}{y^2}f_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)+\frac{1}{x}\left(-\frac{x}{y^2}f_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)$$

$$=\frac{x^2}{y^4}f_{11}''+\frac{1}{x^2}f_{22}''-\frac{2}{y^2}f_{12}''+\frac{2x}{y^3}f_1'.$$

【例 7-12】 设 $z=f(u, v)$，$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$均有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u u_x+f_v v_x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u u_y+f_v v_y$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}(f_u)\cdot u_x+u_{xx}f_u+\frac{\partial}{\partial x}(f_v)\cdot v_x+v_{xx}f_v\\&=(f_{uu}u_x+f_{uv}v_x)u_x+u_{xx}f_u+(f_{vu}u_x+f_{vv}v_x)v_x+v_{xx}f_v\\&=f_{uu}u_x^2+2f_{uv}u_xv_x+f_{vv}v_x^2+f_uu_{xx}+f_vv_{xx}.\end{aligned}$$

类似还可以得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{uu}u_xu_y+(u_xv_y+u_yv_x)f_{uv}+f_{vv}v_xv_y+f_uu_{xy}+f_vv_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{uu}u_y^2+2f_{uv}u_yv_y+f_{vv}v_y^2+f_uu_{yy}+f_vv_{yy}.$$

3. 隐函数求偏导数

【例 7-13】 设 $x+y^2+\sin z+xz=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 方程两端分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$1+\cos z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad 2y+\cos z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

整理后得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1+z}{x+\cos z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{x+\cos z}.$$

或者用公式求偏导数. 设 $F(x, y, z)=x+y^2+\sin z+xz$，则有

$$F_x=1+z,\quad F_y=2y,\quad F_z=x+\cos z,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1+z}{x+\cos z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{x+\cos z}.$$

也可以用求全微分的方法求偏导数. 方程两端求全微分，有

$$dx+2ydy+\cos z dz+zdx+xdz=0,$$

整理得

$$dz=-\frac{1+z}{x+\cos z}dx-\frac{2y}{x+\cos z}dy,$$

由全微分与偏导数的关系即可得到$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【例 7-14】 设 $x+2y+3z=xy^2z^3$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 设 $F(x, y, z)=x+2y+3z-xy^2z^3$，则

$$F_x=1-y^2z^3,\quad F_y=2-2xyz^3,\quad F_z=3-3xy^2z^2,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y^2z^3-1}{3(1-xy^2z^2)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2(xyz^3-1)}{3(1-xy^2z^2)}.$$

【例 7-15】 设 $F(x+2y+3z, x^2+y^2+z^2)=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 设

$$G(x, y, z)=F(x+2y+3z, x^2+y^2+z^2),$$

则

$$G_x=F_1'\cdot 1+F_2'\cdot 2x,\quad G_y=F_1'\cdot 2+F_2'\cdot 2y,\quad G_z=F_1'\cdot 3+F_2'\cdot 2z,$$

所以有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=-\frac{F_1'+2xF_2'}{3F_1'+2zF_2'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=-\frac{2F_1'+2yF_2'}{3F_1'+2zF_2'}.$$

【例 7-16】 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 方程两端分别对 x 和 y 求偏导数，有

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-4\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}.$$

继续求偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{(2-z)^2}=\frac{xy}{(2-z)^3}.$$

【例 7-17】 设$\begin{cases}2z=x^2+y^2,\\ x^2+2y^2+3z^2=20,\end{cases}$ 求$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

【解】 这是由两个方程确定的隐函数求导问题，因为共有三个变量，两个方程可以确定两个函数，故自变量只有一个，即 x 和 y 是 z 的函数. 两个方程两端对 z 求导数，得

$$\begin{cases}2=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z},\\ 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+6z=0,\end{cases}\quad \text{即为}\begin{cases}x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=1,\\ x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-3z,\end{cases}$$ 解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix}1 & y\\ -3z & 2y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & y\\ x & 2y\end{vmatrix}}=\frac{2y+3yz}{xy}=\frac{2+3z}{x},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix}x & 1\\ x & -3z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & y\\ x & 2y\end{vmatrix}}=-\frac{x+3xz}{xy}=-\frac{1+3z}{y}.$$

【例 7-18】 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程$F(x,y,t)=0$ 所确定的 x，y 的函数，其中 f，F 都具有一阶连续偏导数，试证 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{f_tF_y+F_t}.$$

【证】 这是由两个方程确定的隐函数求导问题，x 为自变量，y 和 t 是 x 的函数，两个方程两端对 x 求导数，得$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_x+f_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\ F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-f_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f_x,\\ F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-F_x.\end{cases}$ 解上面的方程组，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}f_x & -f_t\\ -F_x & F_t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -f_t\\ F_y & F_t\end{vmatrix}}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{f_tF_y+F_t}.$$

（二）几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

【例 7-19】　求曲线$\begin{cases} x=\int_0^t e^u \cos u\,du, \\ y=2\sin t+\cos t, \\ z=1+e^{3t} \end{cases}$在点$M_0(0,\ 1,\ 2)$处的切线方程与法平面方程.

【解】　点M_0处对应的参数值为$t_0=0$，切向量为

$$T=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))=(e^t\cos t,\ 2\cos t-\sin t,\ 3e^{3t})\big|_{t=0}=(1,\ 2,\ 3).$$

切线方程为
$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3};$$
法平面方程为
$$x+2(y-1)+3(z-2)=0,$$
即
$$x+2y+3z-8=0.$$

【例 7-20】　求曲线$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$在对应$t_0=\frac{\pi}{3}$点处的切线方程.

【解】　$t_0=\frac{\pi}{3}$对应的点为$M\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{\pi}{3}b\right)$，曲线在点$M_0$处的切向量为

$$T=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{a}{2},\ b\right),$$

故所求切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}=\frac{z-\frac{\pi}{3}b}{b}.$$

【例 7-21】　求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,\ 1,\ 1)$处的切线方程及法平面方程.

【解】　上面的两个方程两端对x求导，得

$$\begin{cases} 2x+2yy'+2zz'-3=0, \\ 2-3y'+5z'=0, \end{cases}$$

在点$(1,\ 1,\ 1)$处，有

$$\begin{cases} 2+2y'(1)+2z'(1)-3=0, \\ 2-3y'(1)+5z'(1)=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得$y'(1)=\frac{9}{16}$，$z'(1)=-\frac{1}{16}$. 故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{9}{16}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{16}}\quad 或\quad \frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0,$$

即
$$16x+9y-z-24=0.$$

2. 曲面的切平面和法线

【例 7-22】　在曲面$z=x^2+\frac{y^2}{4}$上求一点，使该点处的法线垂直于平面$2x+y+z+9=0$.

【解】　设所求点为$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则曲面在点M_0处的法向量为$n=\left(2x_0,\ \frac{y_0}{2},\ -1\right)$. 由题意知，$n$与平面$2x+y+z+9=0$的法向量$n_1=(2,\ 1,\ 1)$平行，则有

$$\frac{2x_0}{2}=\frac{\frac{y_0}{2}}{1}=\frac{-1}{1},$$

由此得 $x_0=-1$，$y_0=-2$，$z_0=2$，即所求的切点为$(-1,\ -2,\ 2)$. 所求的切平面方程为

$$2(x+1)+(y+2)+(z-2)=0,$$

即

$$2x+y+z+2=0.$$

【例 7-23】 证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$上任意一点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

【证】 设 $F(x,\ y,\ z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$为曲面上任意一点，则在点 M_0 处，$\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\ \frac{1}{\sqrt{y_0}},\ \frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$，切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

整理得

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a}\qquad(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}),$$

将其化为截距式方程为

$$\frac{x}{\sqrt{a}\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{a}\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{a}\sqrt{z_0}}=1.$$

该平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别是$\sqrt{a}\sqrt{x_0}$，$\sqrt{a}\sqrt{y_0}$，$\sqrt{a}\sqrt{z_0}$，故截距之和为

$$\sqrt{a}\sqrt{x_0}+\sqrt{a}\sqrt{y_0}+\sqrt{a}\sqrt{z_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

(三) 方向导数与梯度

【例 8-24】 有一山坡，其高度近似为 $z=5-x^2-2y^2$，一登山者在坡上$\left(-\frac{3}{2},\ -1,\ \frac{3}{4}\right)$处欲由最陡的道路向上攀登，试问他此时应向什么方向前进?

【解】 在梯度方向上，函数的方向导数最大，即函数值增加最快. 在曲面 $z=5-x^2-2y^2$ 上，梯度方向就是高度增加最快的方向，也就是最陡的方向. 在点$\left(-\frac{3}{2},\ -1\right)$处，梯度为

$$\left(f_x\left(-\frac{3}{2},\ -1\right),\ f_y\left(-\frac{3}{2},\ -1\right)\right)=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},$$

即在点$\left(-\frac{3}{2},\ -1,\ \frac{3}{4}\right)$处应沿 $3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ 方向向上攀登.

【例 7-25】 设函数 $z=3x^2+y^2+2x$，求

(1) 在点 $P(1,\ 1)$处沿从点 $P(1,\ 1)$到点 $Q(4,\ -3)$方向的方向导数;

(2) 在点 $P(1,\ 1)$处最大方向导数.

【解】 (1) 函数在点 $P(1,\ 1)$处的偏导数为 $f_x(1,\ 1)=8$，$f_y(1,\ 1)=2$，向量 $\overrightarrow{PQ}=(3,\ -4)$，$\overrightarrow{PQ}$的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{4}{5}$. 由于函数是可微分的，故所求的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_x(1,\ 1)\cos\alpha+f_y(1,\ 1)\cos\beta=8\times\frac{3}{5}-2\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5};$$

(2) 最大方向导数是梯度的模，故函数在点 $P(1, 1)$处最大方向导数为

$$|\mathbf{grad} f(1, 1)| = \sqrt{8^2+2^2} = 2\sqrt{17}.$$

【例 7-26】 求函数 $u = x^2+y^2+z^2$ 在点 $P(1, 1, 1)$处沿从点 $P(1, 1, 1)$到点 $Q(3, 0, -1)$方向的方向导数.

【解】 函数在点$(1, 1, 1)$处的梯度为$(2, 2, 2)$，向量 $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, -2)$，$\overrightarrow{PQ}$的方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$，$\cos\beta = -\frac{1}{3}$，$\cos\gamma = -\frac{2}{3}$，故所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,1)} = 2\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{-1}{3} + 2\cdot\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

(四) 极值与最值

【例 7-27】 求函数 $f(x, y) = x^2+y^2-2\ln x-2\ln y$ 的极值$(x>0, y>0)$.

【解】 由取极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x - \dfrac{2}{x} = 0, \\ f_y(x, y) = 2y - \dfrac{2}{y} = 0, \end{cases}$$

解上面的方程组，得驻点为$(1, 1)$. $f(x, y)$在点$(1, 1)$处的二阶偏导数为

$$A = f_{xx}(1, 1) = 4, \quad B = f_{xy}(1, 1) = 0, \quad C = f_{yy}(1, 1) = 4.$$

因为 $AC - B^2 = 4\times4-0 = 16>0$，且 $A>0$，所以函数在点$(1, 1)$处取极小值，极小值为 $f(1, 1) = 2$.

【例 7-28】 求函数 $f(x, y) = (x^2+y^2-2x)^2$ 在闭区域 D 上的最大值与最小值，其中区域 D 是$(x-1)^2+y^2\leqslant1$.

【解】 先求函数在开区域$(x-1)^2+y^2<1$ 内的极值点. 解方程组

$$\begin{cases} f_x = 4(x^2+y^2-2x)(x-1) = 0, \\ f_y = 4(x^2+y^2-2x)y = 0 \end{cases}$$

得 $f(x, y)$在区域 D 内的唯一驻点$(1, 0)$，容易判定该点是极大值点，极大值 $f(1, 0) = 1$. D 的边界为圆 $x^2+y^2 = 2x$，在该圆上，函数值均为 0. 因此，函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上的最大值为 $f(1, 0) = 1$，最小值为 0，圆周上的点均为最小值点.

【例 7-29】 求旋转抛物面 $z = x^2+y^2$ 到平面 $x+y-z = 1$ 的最短距离.

【解】 设 $M(x, y, z)$是曲面 $z = x^2+y^2$ 上的任一点，点 M 到平面 $x+y-z = 1$ 的距离为 $d = \frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{3}}$. 构造函数 $F = \frac{1}{3}(x+y-z-1)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$，得方程组

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{2}{3}(x+y-z-1)+2\lambda x = 0, \\ F_y = \dfrac{2}{3}(x+y-z-1)+2\lambda y = 0, \\ F_z = -\dfrac{2}{3}(x+y-z-1)-\lambda = 0, \\ x^2+y^2 = z. \end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com