21世纪高等学校本科数学规划教材

概率论与数理统计

学习辅导

Probability and Mathematical Statistics Guidance

東北大學出版社
Northeastern University Press

021/266C

2007

21 世纪高等学校本科数学规划教材

概率论与数理统计
学习辅导

Probability and Mathematical Statistics Guidance

安徽建筑大学 藏书 图书馆

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

© 沈海龙　崔文善　刘春生 2007

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习辅导 / 沈海龙，崔文善，刘春生主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2007.8

ISBN 978-7-81102-381-7

Ⅰ.概…　Ⅱ.①沈…　②崔…　③刘…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料　②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 121968 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：184mm×260mm

印　　张：9.5

字　　数：243 千字

出版时间：2007 年 8 月第 1 版

印刷时间：2007 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：孟　颖　刘宗玉

责任校对：王　婷

封面设计：唐敏智

责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-381-7　　　　定　价：15.00 元

前　　言

大学数学是高等院校理工、经管等各类学生必修的基础课，又是“考研”的统考科目，所以一直深受学生们的重视。作为多年工作在大学数学教学第一线的教师，我们深知学生们对数学课的重视程度，以及对一本好的数学辅导书的渴求。对于刚刚走入大学校门的新生来说，一是对大学自主学习的学习方式不太适应，二是大学数学概念的抽象和运算的繁杂，往往使他们感到力不从心。正是出于这些考虑，我们以东北大学出版社出版的“21世纪高等学校本科数学规划教材”为蓝本，编写出与其配套的学习辅导书。但同时这套数学辅导书又是从各自体系、内容出发，相对独立，因此也可以供使用其他教材的学生使用。编写这套数学辅导书的目的是让学生熟悉自主学习思路，尽快完成学习方法和思维方式的转变，对所学课程的学习进行全面指导，力求取得“用时少，成绩好”之效果。

本书为“21世纪高等学校本科数学规划教材”中《概率论与数理统计》的辅导书，全书共八章，每章均有内容精要、归类解析、习题详解、同步测试四部分，具体是：

1. **内容精要**　包括主要定义、主要结论和结论补充三项，结论补充给出了作者由多年教学经验总结出的行之有效的计算公式。

2. **归类解析**　是将所涉及的内容，尤其是重点内容进行系统归类，然后，通过相当数量的例题演示向学生介绍解题方法和运算技巧。

3. **习题详解**　对教材中出现的所有习题均给出详细解答，有些题还给出多种解法，意在学生遇有疑难之时助一臂之力，起到课下辅导的作用。

4. **同步测试**　每章都安排同步测试题一套，用时2小时。同步测试的目的在于巩固所学知识，并找出差距。

由于作者水平有限，书中可能存在疏漏与不足，还望同仁及读者不吝赐教。如果本书能在节省学生们的宝贵时间、提高学习效率等方面有一定作用的话，我们将深感欣慰。

作　者

2007年2月

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　随机事件与概率

一、内容精要

(一) 主要定义

1. 随机试验　如果试验满足下列 3 个特性：

(1) 可在相同的条件下重复进行，

(2) 每次试验的结果不止一个，

(3) 试验之前不能确定哪一个结果会发生，但所有的结果是明确可知的，则称该试验为随机试验，简称试验，记为 E.

2. 样本空间　试验的所有可能结果构成的集合，称为样本空间. 用 Ω 表示. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

3. 随机事件　样本空间的子集，即试验的结果称为随机事件，简称事件.

4. 基本事件　由一个样本点组成的事件称为基本事件.

5. 必然事件　每次试验中一定发生的事件，称为必然事件，即是样本空间——Ω.

6. 不可能事件　每次试验中一定不发生的事件，称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

7. 概率的公理化　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，则称满足下列条件的事件集上的函数 $P(\cdot)$为概率：

(1) 对于任意事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2) 对于必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$；

(3) 设 A_1，A_2，…，A_n，…为两两互不相容的事件，即

$$A_iA_j=\varnothing\quad(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots),$$

则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

8. 条件概率　在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率，记为 $P(A|B)$，公式为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

9. 古典概型　若随机试验 E 满足下面条件：

(1) 试验的样本空间 Ω 的元素只有有限个；

(2) 样本空间中的每个元素，即基本事件发生的可能性相同，称此试验为古典概型.

10. 几何概型　如果随机试验 E 的样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域，且每个样本点的出现具有等可能性，称此试验为几何概型.

11. 伯努利(Bernoulli)概型　如果试验 E 的结果只有两个：A 与 $\overline{A}$，则称此试验为伯努利概型. 若将伯努利试验独立重复 n 次，则称之为 n 重伯努利概型，若 $P(A)=p$，则 n 次

试验中事件A发生k次的概率为

$$P(A\text{ 发生 }k\text{ 次})=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

12. 事件的独立性

(1) 设A，B是试验E的两个事件，若

$$P(B|A)=P(B)\quad\text{或 }P(A|B)=P(A),$$

称事件A与B是相互独立的．此时，有

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

(2) 设A_1，A_2，$\cdots$，A_n是$n(n>2)$个事件，若对于任意$k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件，积事件的概率等于各个事件概率的积，则称$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$是相互独立的．

(3) 若A，B相互独立，则A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$都相互独立．

(二) 主要结论

1. 事件的运算律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$．

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$．

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$．

(4) 德-摩尔根定律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

注 事件的运算律非常重要，务必娴熟．在今后的概率计算中，经常将一些事件用另一些事件的运算来表示．

2. 概率的性质

(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(2) $P(A-B)=P(A)-P(B)$，特别当$B\subset A$时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$，且$P(B)\leqslant P(A)$；

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$；

(4) 若A_1，A_2，$\cdots$，A_n两两互斥，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

3. 加法公式

对于任意事件A和B，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

若A与B是互不相容事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

4. 乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad(P(A)>0),$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad(P(B)>0),$$

一般地

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\quad(P(A_1\cdots A_{n-1})>0).$$

5. 全概率公式

若事件组 B_1，B_2，…，B_n 满足：B_1，B_2，…，B_n 两两互斥，$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$，$P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)，则对任一事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

6. 贝叶斯公式

在全概率公式的条件下，如果 $P(A)>0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}.$$

7. 对于古典概型，事件 A 的概率有下列计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件数}}.$$

8. 对于几何概型，事件 A 的概率有下列计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量(长度、面积、体积)}}{\Omega\text{ 的度量(长度、面积、体积)}}.$$

(三) 结论补充

1. 事件之间的 4 种关系(如表 1-1 所示)

表 1-1

关　系	符　号	概率论	集合论
包含	$A\subseteq B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立	$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生	A 与 B 无公共元素

注：(1) 在一次试验中，基本事件都是两两互斥的；

(2) 对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

2. 事件之间的 3 种运算(如表 1-2 所示)

表 1-2

运　算	符　号	概率论	集合论
事件的和(并)	$A\cup B$(或 $A+B$)	事件 A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生	A_1，A_2，…，A_n 的并集
事件的积(交)	$A\cap B$(或 AB)	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生	A_1，A_2，…，A_n 的交集
事件的差	$A-B$	事件 A 发生而 B 不发生	A 与 B 的差集

二、归类解析

(一) 与样本空间有关的命题

例 1-1 写出下列随机试验的样本空间及相应的事件：

(1) 同时掷三颗骰子，记录其出现的点数之和，$A=\{$点数之和为偶数$\}$；

(2) 相继掷硬币两次，$A=\{$第一次出现正面$\}$；

(3) 在"1，2，3，4"这 4 个数字中可重复地任取 2 个数字，$A=\{$一个数是另一个数的 2 倍$\}$.

解 (1) 样本空间 $\Omega=\{3, 4, 5, \cdots, 18\}$，事件 $A=\{4, 6, \cdots, 16, 18\}$.

(2) 样本空间 $\Omega=\{$(正面，反面)，(反面，正面)，(正面，正面)，(反面，反面)$\}$，

事件 $A=\{$(正面，反面)，(正面，正面)$\}$.

(3) 样本空间 $\Omega=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$，$A=\{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2)\}$.

(二) 与事件的关系和概率的性质有关的命题

例 1-2 对于任意二事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则必有[　　].

(A) $\overline{A}\cdot\overline{B}=\varnothing$；　　(B) $\overline{A}\cdot\overline{B}\neq\varnothing$；

(C) $P(A)P(B)=0$；　　(D) $P(A-B)=P(A)$.

解 因为 $P(AB)=0$，故

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A),$$

所以 D 项为正确答案.

下面分别举例说明 A，B，C 项不成立.

设 A 和 B 互不相容，若 $A\cup B\neq\Omega$，则

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A\cup B}\neq\varnothing,$$

从而 A 项不成立；

设 A 和 B 为对立事件，即 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A\cup B}=\overline{\Omega}=\varnothing,$$

从而 B 项不成立；

设 $AB=\varnothing$，但是 $P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，故 $P(AB)=0$；例如掷一均匀对称的硬币，设 $A=\{$掷出正面$\}$，$B=\{$掷出反面$\}$，则 $AB=\varnothing$，所以 $P(AB)=0$，然而 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，即

$$P(A)P(B)\neq 0,$$

因此 C 项也不成立.

例 1-3 设对于事件 A，B，C，有如下包含关系：$A\subset C$，$B\subset C$，则[　　].

(A) $P(C)=P(AB)$；　　(B) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$；

(C) $P(C)=P(A+B)$；　　(D) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解 由于 $A\subset C$，$B\subset C$，由概率的基本运算可知

$$P(C)\geqslant P(A)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1,$$

因此 D 项是正确答案.

例 1-4 甲乙两人下棋，甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4. 设 A 为甲胜，B 为乙胜，求甲胜乙输的概率.

解 甲胜与乙输是同一个事件，即 $A=\overline{B}$，所以

$$P(A\overline{B})=P(A)=0.6.$$

(三) 与古典概型和几何概型有关的命题

例 1-5 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则事件 A，B，C 全不发生的概率为多少?

解 $P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)].$$

因 $$ABC\subset AB,$$

所以 $$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0,$$

故 $$P(ABC)=0,$$

从而 $$P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})=1-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{16}\right)=\frac{3}{8}.$$

例 1-6 将 C，C，E，E，I，N，S 等 7 个字母随机地排成一行，恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率是多少?

解 将这 7 个字母排成一行，共有 P_7^7 种排法，这是样本空间含有的样本点. 而排成单词 SCIENCE 共有 $1\times2\times1\times2\times1\times1\times1=4$ 种排法，故所求概率为

$$p=\frac{4}{\mathrm{P}_7^7}=\frac{1}{1\ 260}.$$

注 *同类型的问题还有书、报及电话号码等的排列问题.*

例 1-7 在电话号码簿中任取一个电话号码，求后面 4 个数字全不相同的概率?（设后面 4 个数字中每一个数字都是等可能性地取自 0，1，2，…，9）.

解 本题与电话号码的位数无关.

电话号码的数字是允许重复的，因此由 0，1，…，9 所构成的 4 个数字的个数为 10^4，后"4 个数字全不相同"的个数为 P_{10}^4，故若令 A 表示所求的事件，则

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_{10}^4}{10^4}=0.504.$$

例 1-8 把 10 本书随意地放在书架上，求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

解 基本事件总数为 10!，将指定的 5 本书放在一起的基本事件个数为 6! ·5!（6! 是把 5 本书当作一个元素进行全排列的总数，而 5! 是 5 本书相互之间进行全排列的总数），故若令 A ="其中指定的 5 本书放在一起"，则

$$P(A)=\frac{6!\ 5!}{10!}=\frac{1}{42}.$$

(四) 条件概率与积事件概率的计算

例 1-9 某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4，问现在 20 岁

的这种动物活到25岁的概率是多少?

解 设$A=\{$活到20岁以上$\}$, $B=\{$活到25岁以上$\}$, 显然A, B之间有"先后"关系, 故所求概率为$P(B|A)$.

又因为 $$P(A)=0.8,\ P(B)=0.4,$$

且 $$B\subset A,\ AB=B,\ P(AB)=P(B)=0.4,$$

因此 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$$

例1-10 某厂的产品中有4%的废品,在100件合格品中有75件一等品, 试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率.

解 设$A=\{$任取的一件是合格品$\}$, $B=\{$任取的一件是一等品$\}$, 显然$B\subset A$, 于是
$$P(B)=P(AB)=P(A)P(B|A)=(1-4\%)\times 0.75=0.72.$$

注 *要注意积事件概率$P(AB)$与条件概率$P(B|A)$的区别. $P(AB)$表示A, B同时发生的概率, 而$P(B|A)$指在A发生的条件下B发生的条件概率, A与B在时间上一定有"先后"关系或逻辑上有"主从"关系.*

(五) 全概率公式与贝叶斯公式的命题

例1-11 设工厂A和工厂B的产品的次品率分别为1%和2%, 现从由A和B的产品分别占60%和40%的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该产品属于工厂A生产的概率是多少?

解 设$C=$"取到的产品是次品", $A=$"取到的产品是由A厂提供", $B=$"取到的产品是由B厂提供", 则A, B是样本空间S的一个划分, 且有
$$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.4,\quad P(C|A)=0.01,\quad P(C|B)=0.02.$$
由全概率公式有
$$\begin{aligned}P(C)&=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)\\&=0.01\times 0.6+0.02\times 0.4=0.014.\end{aligned}$$
由贝叶斯公式有
$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)\cdot P(C|A)}{P(C)}=\frac{0.6\times 0.01}{0.014}=\frac{3}{7}.$$

例1-12 设一人群中有37.5%的人血型为A型, 20.9%为B型, 33.7%为O型, 7.9%为AB型, 已知能允许输血的血型配对如下表, 现在人群中任选一人为输血者, 再选一个为受血者, 问输血能成功的概率是多少?

表1-3

受血者 \ 输血者	A	B	AB	O
A	√	×	×	√
B	×	√	×	√
AB	√	√	√	√
O	×	×	×	√

解 设$B_i(i=1,2,3,4)$表示"从人群中任选一人, 其血型分别为A, B, O, AB型", $C=$"受血者输血成功".

由题已知条件有

$$P(B_1)=0.375,\quad P(B_2)=0.209,\quad P(B_3)=0.337,\quad P(B_4)=0.079.$$

于是

$$\begin{aligned}P(C|B_1) &= P(B_1)+P(B_4) = 0.454,\\ P(C|B_2) &= P(B_2)+P(B_4) = 0.288,\\ P(C|B_3) &= P(B_4) = 0.079,\\ P(C|B_4) &= \sum_{i=1}^{4}P(B_i) = 1.\end{aligned}$$

由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(C) &= \sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(C|B_i)\\ &= 0.375\times0.454+0.209\times0.288+0.337\times0.079+0.079\times1 = 0.336\,1.\end{aligned}$$

注　全概率公式是计算复杂事件概率的一个有效公式. 解题的关键是恰当地选取样本空间的完备事件组. 由于对样本空间的划分不唯一，因此利用题目中的已知条件选择出相对应概率便于求解的完备事件组是较为困难的，初学者在此要多加练习.

三、习题详解

习题一

1. 写出随机试验的样本空间.

(1) 记录某班一次考试的平均分数(设以百分制记分)；

(2) 将一枚硬币抛掷3次；

(3) 生产产品直到有10件正品为止，记录生产产品的总件数.

解　(1) 设该班有 n 个人，每个人的分数的可能取值为0，1，2，…，100，n 个人分数之和的可能取值为0，1，2，…，$100n$，平均分数的可能取值为 $\frac{0}{n}$，$\frac{1}{n}$，…，$\frac{100n}{n}$，则样本空间为

$$S=\left\{\frac{k}{n}\middle|k=0,\ 1,\ \cdots,\ 100n\right\}.$$

(2) 将一枚硬币抛掷一次，出现正面设为T，出现反面设为H. 若将一枚硬币抛掷3次，样本空间中的每个样本点是一个3维数组，故样本空间为

$$S=\{(T,T,T),(T,T,H),(T,H,H),(H,H,H),(T,H,T),(H,T,T),(H,T,H),(H,H,T)\}.$$

(3) 样本空间 $S=\{10,\ 11,\ \cdots\}$，S 中含有可数无限多个样本点.

2. 化简事件.

(1) $(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})$；

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$；

(3) $(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\ \overline{B})$.

解　(1)　$(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})$

$=\{[(A\cup B)\overline{A}]\cup[(A\cup B)B]\}(A\cup\overline{B})$
$=\{[(A\overline{A})\cup(B\overline{A})]\cup B\}(A\cup\overline{B})$
$=\{[\varnothing\cup(B\overline{A})]\cup B\}(A\cup\overline{B})$
$=(B\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})$
$=B(A\cup\overline{B})$
$=AB\cup B\overline{B}=AB$;

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$
$=AB(\overline{A}\cup\overline{B})$
$=[(AB)\cdot\overline{A}]\cup[(AB)\cdot\overline{B}]$
$=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

注 本题第一个等号利用了(1)中的结果.

(3) $(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\ \overline{B})$
$=[(AB)\cup(A\overline{B})]\cup[(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\ \overline{B})]$
$=[A(B\cup\overline{B})]\cup[\overline{A}(B\cup\overline{B})]$
$=(A\cdot\Omega)\cup(\overline{A}\cdot\Omega)$
$=A\cup\overline{A}=\Omega$.

3. 设 A, B, C 为三事件，试表示事件.
(1) A 发生，B 与 C 不发生;
(2) A 与 B 均发生，而 C 不发生;
(3) A, B, C 中至少有 1 人发生;
(4) A, B, C 都发生;
(5) A, B, C 都不发生;
(6) A, B, C 中不多于一个发生;
(7) A, B, C 中不多于两个发生;
(8) A, B, C 中至少有两个发生.

解 此题关键词:“与”“而”“都”表示事件的“交”;“至少”表示事件的“并”;“不多于”表示“交”和“并”的联合运算.

(1) $A\overline{B}\ \overline{C}$;
(2) $AB\overline{C}$或$AB-C$;
(3) $A\cup B\cup C$;
(4) ABC;
(5) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$;
(6) A, B, C 中不多于一个发生为仅有一个发生或都不发生，即

$$A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}\ B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C\cup\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}.$$

A, B, C 中不多于一个发生，也表明$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$中至少有两个发生，即

$$\overline{A}\ \overline{B}\cup\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{C};$$

(7) A, B, C 中不多于两个发生，为仅有两个发生或仅有一个发生，或都不发生，即

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C\cup\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C},$$

而 ABC 表示 3 个事件均发生，其对立事件为不多于两个事件发生，因此又可表示为

$$\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C};$$

(8) A，B，C 中至少有两个发生，为 A，B，C 中仅有两个发生或都发生，即为

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC,$$

也可表示为

$$AB\cup BC\cup AC.$$

4. 设 A，B，C 为三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A，B，C 至少有一个发生的概率.

解 由于 $ABC\subset AB$，知

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0,$$

即

$$P(ABC)=0,$$

从而

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

5. 一批产品共有 N 个，其中 M 个是次品. 从中随机取出 n 个，求在如下三种抽取方式下所取出的 n 个产品中恰有 m 个次品的概率.

(1) 一次性抽取；

(2) 一个接一个有放回抽取；

(3) 一个接一个无放回抽取.

解 设所求事件为 A.

(1) 若采取一次性抽取，则从 N 个产品中随机取出 n 个共有 C_N^n 种取法，若要求 n 个产品中恰有 m 个次品，则这 m 个次品要从产品中的 M 个次品中抽取，剩余的 $n-m$ 个产品要从 $N-M$ 中抽取，即有 $C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$ 种取法，故有

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n};$$

(2) 一次接一次有放回抽取时，每次抽取的情况均和第一次是一样的，故它是一个 n 重伯努利试验，且一次抽到次品的概率是 $\frac{M}{N}$，一次抽到合格品的概率是 $1-\frac{M}{N}$，所以

$$P(A)=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m};$$

(3) 一次接一次无放回抽取的情况与一次性抽取是一样的，故

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

6. 某班级有 n 名学生，求至少有两位同学的生日在同一天的概率(设一年按 365 天计算).

解 设 $A=$“至少有两位同学的生日在同一天”，则

$$\overline{A}=\text{“}n\text{ 名学生的生日各不相同”}.$$

于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{365}^n}{365^n}.$$

7. 将 n 只球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中，求每个盒子中至多有一只球的概率(设盒子的容量不限).

解　将 n 只球随机地放入 N 个盒子中，由于盒子的容量不限，共有 N^n 种放法．若要求每个盒子中至多有一只球，则共有 P_N^n 种放法，设 A =“每个盒子中至多有一只球”，则

$$P(A)=\frac{P_N^n}{N^n}.$$

8．将 3 个球随机地放入 4 个杯中，求杯中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率．

解　设 A_i =“杯中球的最大个数为 i”　$(i=1,\ 2,\ 3)$．

将 3 个球放入 4 个杯中，共有 4^3 种放法，若杯中球的最大个数为 1，则有 P_4^3 种放法，所以

$$P(A_1)=\frac{P_4^3}{4^3}=\frac{6}{16};$$

若杯中球的最大个数为 3，相当于将 3 个球一起放在 4 个杯中的一个，共有 P_4^1 种放法，所以

$$P(A_3)=\frac{P_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

于是

$$P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=1-\frac{P_4^3}{4^3}-\frac{P_4^1}{4^3}=\frac{9}{16}.$$

9．一个袋子中装有 5 个红球、3 个白球、2 个黑球，从中任取 3 个球，求其中恰有一个红球、一个白球及一个黑球的概率．

解　设所求事件为 A．袋子中共有 10 个球，从中任取 3 个，共有 C_{10}^3种取法．则

$$P(A)=\frac{C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1}{C_{10}^3}.$$

10．将 13 个分别写有 A，A，A，C，E，H，I，I，M，M，N，T，T 的卡片随意地排成一行，求恰好排成单词“MATHEMATICIAN”的概率．

解　令 A =“排列结果为 MATHEMATICIAN”，将这 13 个卡片排成一行，共有 13! 种排法．排列结果为 MATHEMATICIAN，字母 A 的卡片有 3 张，字母 I 的卡片有 2 张，字母 M 的卡片有 2 张，字母 T 的卡片有 2 张，故事件 A 含有

$C_2^1\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_2^1\times C_1^1\times C_2^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1=2\times3\times2\times2\times2=48$

个样本点，则

$$P(A)=\frac{48}{13!}.$$

11．将一副 54 张扑克牌任意地等分给 6 个人，求双王及 4 个 A 集中在其中一人手中的概率．

解　将 54 张卡片等分给 6 个人，由于没有顺序问题，共有 $C_{54}^9\cdot C_{45}^9\cdot C_{36}^9\cdot C_{27}^9\cdot C_{18}^9\cdot C_9^9$种分法．若要使双王和 4 个 A 在同一个人手中，则首先在 6 个人中选一个人拥有此牌，共有 C_6^1 种可能．当选定此人后，除了双王和 4 个 A 外，还需要剩余的 48 张中选 3 张给此人．其余 5 个人将剩余的 45 张牌等分即可．

若设 B =“双王及 4 个 A 集中在某一个人手中”，则 B 含有

$$C_6^1\times C_{48}^3\times C_{45}^9\times C_{36}^9\times C_{27}^9\times C_{18}^9\times C_9^9$$

个样本点，故

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com