21世纪高职高专规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

赵白云 沈伟利 李万军 主编

吉林人民出版社

21 世纪高职高专规划教材

高 等 数 学

主　　编　赵白云　沈伟利　李万军

编写人员　（按姓氏笔画）
王建明　李万军　刘秋霞
沈伟利　赵白云　赵　辉
秦素平　宿金勇　薛庆平

吉林人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/赵白云　沈伟利　李万军主编.
—长春：吉林人民出版社，2006.9
ISBN 7-206-05107-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.赵…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 113891 号

高 等 数 学

主　　编：赵白云　沈伟利　李万军
责任编辑：于二辉　　　　　封面设计：陈连辉
吉林人民出版社出版 发行（长春市人民大街 7548 号　邮政编码：130022）
印　刷：长春盛达印刷厂
开　本：787mm×1092mm　　1/16
印　张：14.5　　　　　字　数：352.6 千字
标准书号：ISBN 7-206-05107-3
版　次：2006 年 9 月第 1 版　　　印　次：2006 年 9 月第 1 次印刷
印　数：1-5 000 册　　　　　定　价：20.00 元

前　　言

随着教育改革的深入和高等教育规模的扩大,高等教育层次越来越丰富．高职高专层次的教育,已由原来单一的统招形式扩展为统招、对口、3+2等多种形式．招生形式的丰富既为求学者带来机遇,为社会培养多种层次的人才,又为高等教育、高等院校提出了挑战．不同层次的教育有不同的生源、不同的文化基础．任何一个层次的教育都必须根据学生的文化基础、培养目标制定合适的培养计划、选择合适的教材．作者根据近几年从事高职高专教学的经验,编纂了这套高职高专数学教材．本教材为专科高职、专科对口、专科3+2层次数学用书,也适合统招非数学专业高专教学施用．

本教材主要内容有三大部分:函数、微积分、线性代数．

本教材特点:

1．起点低．教材从集合、函数讲起,对几种重要基本初等函数的性质、几何形态作了较为详细的描述,为微积分打下必要的基础．

2．难度小．教材从高职高专、特别是高职、对口、3+2学生的基础出发,根据数学教学目标,以够用为度,浅显易懂．

3．涵盖面广．教材中涵盖了微积分、线性代数两大学科．

本书由宿金勇负责总策划和全书制表制图工作,赵白云、沈伟利、李万军担任主编,赵白云、沈伟利负责制定具体计划和统稿．具体编写分工:沈伟利第一章前六节;李万军第一章后四节;赵辉第二章前五节;薛庆平第二章第六节和第三章前四节;王建明第三章后五节和第四章第一节;刘秋霞第四章后五节;秦素平第五章;赵白云第六章．

尽管作者在编写过程中付出了艰辛的劳动,但由于水平和时间所限,疏漏之处在所难免,恳请同行、专家及读者批评指正,在此表示深切谢意.

作　者

2006.6.10

目　录

第一章　函　　数

§1.1　集　　合

一、集合的概念

引例　考察下列几组对象

(1) 某校的全体学生；

(2) 某校教室的所有桌子；

(3) 所有的等腰三角形；

(4)1,2,3,4,5；

(5) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的解；

(6) 直线 $y=2x$ 上的所有点.

它们分别是由一些人、物、图形、数和点组成的整体，且每个整体中的对象都是确定的.

一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集. 集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 例如，(4) 是由 1,2,3,4,5 这五个数集在一起组成的集合，其中的每个数都是组成这个集合的对象，都叫做这个集合的元素，这些元素都是指定的、确定的. (6) 是由直线 $y=2x$ 上的所有点组成的集合，其中每个点都是这个集合的元素，它们都是确定的. 也就是说，我们能够明确指出哪些点是集合的元素，哪些点不是集合的元素. 如点(1,2) 与点$\left(-\frac{1}{2},-1\right)$都是直线 $y=2x$ 上的点，也都是这个集合的元素；而点(1,1) 与点(0,1) 都不是直线 $y=2x$ 上的点，也都不是这个集合的元素.

你能举出一些集合的例子吗?"全体年轻人" 能否组成一个集合?

集合中的元素是确定的，也是无序的. 如 1,2,3,4,5 这五个数组成的集合与 5,1,3,2,4 组成的集合都是小于 6 的所有正整数组成的集合，是同一个集合. 也就是说，集合中的元素可以按任何顺序排列，但集合不变.

集合中的元素又是互异的.这就是说,集合中的元素不能重复出现,任何两个相同的对象归入同一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

尽管集合中的元素可以是各种各样具体的或抽象的事物,但我们主要研究数的集合(简称数集)和点的集合(简称点集).

通常,用大写的拉丁字母作为集合的记号,如 $A,B,C\cdots$.用小写的拉丁字母作为元素的记号,如 $a,b,c,\cdots$.如果元素 a 是集合 A 的元素就记作"$a \in A$",读作"a 属于 A";如果 a 不是集合 A 的元素,就记作"$a \notin A$"(或 $a \overline{\in} A$),读作"a 不属于 A".

含有无限多个元素的集合称为无限集.如引例中的(3),(6)都是无限集.含有有限个元素的集合称为有限集.如引例中的(1)、(2)、(4)、(5)都是有限集.特别地,只含一个元素的集合称为单元素集.如方程 $x-5=0$ 的解组成的集合(简称解集)就是一个单元素集.不含任何元素的集合称为空集,记作 Φ.如方程 $x^2+1=0$ 在实数集内无解,它在实数集中的解集就是空集 Φ.

几个常用数集及其专用记号:

全体正整数组成的集合称为正整数集,记为 N_+ 或 N^*;

全体自然数组成的集合称为自然数集,记为 N;

全体整数的集合称为整数集,记为 Z;

全体有理数的集合称为有理数集,记为 Q;

全体实数的集合称为实数集,记为 R.

例如,用"$\in$"或"$\notin$"填空

-2 ____ N, -1 ____ Q, $-\frac{1}{2}$ ____ R, $\sqrt{2}$ ____ R

$-\sqrt{2}$ ____ Q, 1 ____ Z, 3 ____ N_+, $\frac{1}{2}$ ____ N

为 $-2 \underline{\ \notin\ } N$, $-1 \underline{\ \in\ } Q$, $-\frac{1}{2} \underline{\ \in\ } R$,

$\sqrt{2} \underline{\ \in\ } R$, $-\sqrt{2} \underline{\ \notin\ } Q$, $1 \underline{\ \in\ } Z$,

$3 \underline{\ \in\ } N_+$, $\frac{1}{2} \underline{\ \notin\ } N$.

二、集合的表示方法

集合一般有以下三种表示方法:列举法、描述法和图示法.

1.列举法:

定义 1.1.1 把集合中的元素一一列举出来,彼此用逗号隔开,写在一个大括号内,这种表示集合的方法称为列举法.

例如,小于6的正整数的集合可表示为$\{1,2,3,4,5\}$,也可表示为$\{2,3,1,5,4\}$,但不能表示为$\{2,3,1,3,5,4\}$.方程 $x^2-3x+2=0$ 的解的集合可表示为$\{1,2\}$.

【例 1】 绝对值小于3的整数的集合,可表示为:

$$\{-2,-1,0,1,2\}$$

一般地,列举法常用于表示元素个数较少的集合.当元素的个数很多或无限多时,可以在

列举出有代表性的元素后，用省略号表示那些被省略的元素.

【例 2】　不超过 100 的自然数组成的集合，可以表示为：

$$\{0,1,2,3,\cdots,99,100\}$$

2. 描述法

定义 1.1.2　把集合中元素的共同属性描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法称为描述法.

例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集可表示为

$$\{x \mid x^2-3x+2=0\} \text{ 或 } \{x \mid x=1 \text{ 或 } x=2\}$$

直线 $y=2x$ 上的所有点组成的点集可表示为

$$\{(x,y) \mid y=2x\}$$

描述法的另一种表达形式是把集合中元素的共同属性直接写在大括号内.

例如，由 1,2,3,4,5 组成的数集可表示为

{小于 6 的正整数}

方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集可表示为

{方程 $x^2-3x+2=0$ 的解}

直线 $y=2x$ 上的所有点组成的点集可表示为

{直线 $y=2x$ 上的点}

我们学校的全体同学组成的集合可表示为

{我们学校的学生}

所有等腰三角形组成的集合可表示为：

{等腰三角形}

3. 图示法

有时，为了形象地表示集合，我们还可以画一条封闭的曲线，用它的内部表示一个集合. 如图 1.1.1 表示一个非空集合 A.

三、集合的关系

先观察两个集合 A,B

$A=\{2,6,10\}, B=\{2,4,6,8,10\}$

其中集合 A 中的每个元素也都是集合 B 的元素.

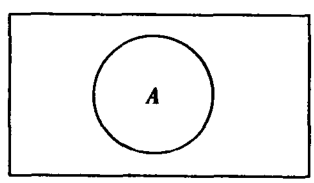

图1.1.1

定义 1.1.3　设 A、B 是两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作：

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

对于任何一个集合 A，由于它的任何一个元素都属于 A 本身，所以 $A \subseteq A$，即任何一个集合都是它本身的子集.

我们规定，空集是任何集合 A 的子集，即

$$\Phi \subseteq A$$

当 A 不是 B 的子集时,记作

$$A \nsubseteq B \text{ 或 } B \nsupseteq A$$

读作"A 不包含于 B"或"B 不包含 A".

定义 1.1.4 设 A、B 是两个集合,如果 A 是 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称集合 A 是集合 B 的真子集.记作:

$$A \subsetneqq B \text{ 或 } B \supsetneqq A$$

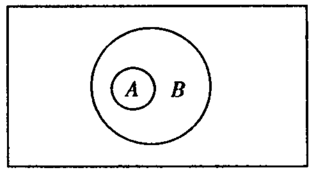

图1.1.2

读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".

例如,$Q \subseteq Q$,$Q \subseteq R$,但 $Q \subsetneqq R$.

显然,空集是任何非空集合的真子集.

当 A 是 B 的真子集时,可用图 1.1.2 表示.

【例 3】 写出集合 $A = \{0,1,2\}$ 的所有子集,并指出其中哪些是真子集.

解 A 的所有子集为:Φ,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$,$\{0,1,2\}$.其中 A 的真子集为:Φ,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$.

定义 1.1.5 设 A,B 是两个集合,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等.记作:$A = B$,读作"A 等于 B".

由集合相等的定义知道,两个集合相等就表示这两个集合的元素完全相同.

例如,集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ 与集合 $B = \{-1,1\}$ 是相等的.

四、集合的运算

观察集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$,$B = \{1,3,5,7,9\}$,$C = \{1,3,5\}$.

容易看出,集合 C 是 A 与 B 的所有公共元素组成的集合.

定义 1.1.6 设 A、B 是两个集合,由 A 和 B 的所有公共元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A \cap B$,读作"A 交 B".即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

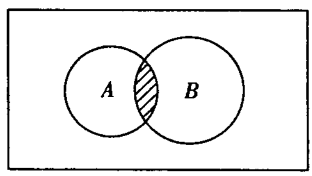

图1.1.3

如图 1.1.3 中的阴影部分表示 A 与 B 的交集 $A \cap B$.图 1.1.4 中 A 与 B 的交集为 Φ.

【例 4】 集合 $A = \{12\text{ 的正约数}\}$,$B = \{18\text{ 的正约数}\}$,用列举法写出 A 与 B 的交集 $A \cap B$.

解 因为 $A = \{1,2,3,4,6,12\}$

$B = \{1,2,3,6,9,18\}$

所以 $A \cap B = \{1,2,3,6\}$

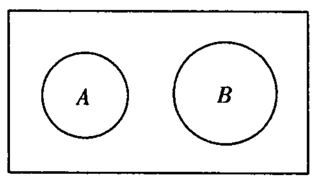

图1.1.4

【例 5】 设 $A = \{x \mid x \geqslant -3\}$,$B = \{x \mid x < 2\}$,求 $A \cap B$

解 $A \cap B = \{x \mid x \geqslant -3\} \cap \{x \mid x < 2\} = \{x \mid -3 \leqslant x < 2\}$

【例 6】 设 $A = \{(x,y) \mid x - 2y = 1\}$,$B = \{(x,y) \mid 2x - y = 2\}$,求 $A \cap B$

解　$A \cap B = \{(x,y) \mid x - 2y = 1\} \cap \{(x,y) \mid 2x - y = 2\}$

$$= \{(x,y) \mid \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}\} = \{(1,0)\}$$

观察集合 $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. 可知集合 C 是由 A 的元素和 B 的元素全部合并到一起组成的集合.

定义 1.1.7　设 A、B 是两个集合,把属于 A 和属于 B 的所有元素合并在一起组成的集合叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,读作"A 并 B". 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

【例 7】　设 $A = \{\text{有理数}\}$, $B = \{\text{无理数}\}$,求 $A \cup B$.

解　$A \cup B = \{\text{有理数}\} \cup \{\text{无理数}\} = \{\text{实数}\}$.

【例 8】　设 $A = \{x \mid -2 < x < 3\}$, $B = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$,求 $A \cup B$.

解　$A \cup B = \{x \mid -2 < x < 3\} \cup \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$

$$= \{x \mid -2 < x \leqslant 5\}$$

定义 1.1.8　设 S 是一个集合,A 是 S 的一个子集(即 $A \subseteq S$),由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记作 $C_S A$,即

$$C_S A = \{x \mid x \in S, \text{且 } x \notin A\}$$

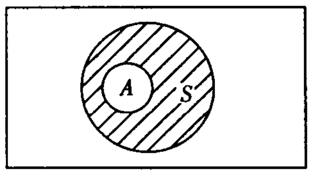

图1.1.5

如图 1.1.5 中的阴影部分表示 A 在 S 中的补集.

例如,$S = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3,5\}$,则 $C_S A = \{2,4\}$.

如果集合 S 中含有我们要研究的各个集合的元素,这个集合 S 就可以看作一个全集,全集通常用 U 表示.

例如,在实数范围内讨论问题时,可以把实数集 R 看作全集 U,那么有理数集 Q 的补集 $C_U Q$ 是全体无理数的集合.

练习题

1. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

(1) 若 $A = \{x \mid x^2 = x\}$,则 -1 ____ A, 0 ____ A;

(2) 若 $B = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$,则 3 ____ B, 0 ____ B;

(3) 若 $C = \{x \mid 1 < x < 10\}$,则 $-\frac{1}{2}$ ____ C, $\sqrt{2}$ ____ C;

(4) 若 $D = \{x \in N \mid -3 < x < 2\}$,则 1.5 ____ D, -1 ____ D.

2. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 18 的正约数;

(2) 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解;

(3) 小于 10 的质数;

(4) 不超过 6 的自然数;

(5) 大于 7 的所有自然数;

(6) 不等式 $5x - 7 < 2$ 的解集;

(7) 所有偶数组成的集合;

(8) 由 3 和 7 的所有公倍数组成的集合.

3.写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集,并指出其中哪些是它的真子集.

4.用适当的符号($\in$, $\notin$, $=$, $\supsetneqq$, $\subsetneqq$)填空.

(1)0 ____ $\{0\}$,0 ____ Φ;

(2)-1 ____ $\{-1,0,1\}$,-2 ____ $\{-1,0,1\}$;

(3)$\{-1\}$ ____ $\{-1,0,1\}$,Φ ____ $\{-1,0,1\}$;

(4)$\{-1,1\}$ ____ $\{1,-1\}$;

(5)2 ____ $\{x \mid x \leqslant 10\}$,$2$ ____ $\{x \mid x < -10\}$;

(6)$\{2\}$ ____ $\{x \mid x \leqslant 10\}$,$\Phi$ ____ $\{x \mid x < -10\}$.

5.(1) 解方程$\frac{1}{2}x - 1 = 5 + \frac{x}{3}$,并把结果用集合表示;

(2) 解不等式$\frac{2}{3}x + 2 < 3x - 1$,并把结果用集合表示.

6.用适当的集合填空.

(1)

$\cap$	Φ	A	B
Φ	____	____	____
A	____	____	$\underline{A \cap B}$
B	____	____	____

(2)

$\cup$	Φ	A	B
Φ	____	____	____
A	____	____	____
B	$\underline{B}$	____	____

(3)

$\cap$	Φ	A	C_UA
Φ	____	____	____
A	____	____	____
C_UA	____	____	____

(4)

$\cup$	Φ	A	C_UA
Φ	____	____	____
A	____	____	____
C_UA	____	____	____

7.设$A = \{3,4,6,8\}$,$B = \{2,5,6,7\}$求$A \cap B$,$A \cup B$.

8.设$A = \{x \mid x > -2\}$,$B = \{x \mid x \leqslant 3\}$,求$A \cap B$,$A \cup B$.

9.设$A = \{$锐角三角形$\}$,$B = \{$钝角三角形$\}$,求$A \cap B$,$A \cup B$.

10.设$A = \{(x,y) \mid 3x + 2y = 1\}$,$B = \{(x,y) \mid x - y = 2\}$求$A \cap B$.

11.设$U = Z$,$A = \{x \mid x = 2k, k \in Z\}$,$B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in Z\}$
求C_UA,C_UB.

12.设$U = \{x \in N \mid 0 < x \leqslant 10\}$,$A = \{1,2,4,5,6,9\}$,$B = \{4,6,7,8,10\}$,$C = \{3,5,7\}$.求$A \cap B$,$A \cup B$,$(C_UA) \cap (C_UB)$,$(C_UA) \cup (C_UB)$,$(A \cap B) \cup C$,$(A \cup B) \cup C$.

§1.2　绝对值和不等式

一、绝对值不等式的解法

绝对值符号里面含有未知数的不等式,称为绝对值不等式.

如,$|2x|>1$,$|x-1|\leqslant 1$ 等.可由实数绝对值的意义求解绝对值不等式.

实数绝对值的意义　$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$

定理 1.2.1　设 $a>0$,则

(1) $|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$

(2) $|x|\geqslant a \Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$

证明:(1) 由实数绝对值的意义

$$|x|=\begin{cases} x, x\geqslant 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

可把绝对值不等式 $|x|\leqslant a$ 化为下面两个不等式组

$$(\text{i})\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\leqslant a \end{cases} \text{或}(\text{ii})\begin{cases} x<0 \\ -x\leqslant a \end{cases}$$

因为(i)等价于 $0\leqslant x\leqslant a$,(ii)等价于 $-a\leqslant x<0$

所以 $|x|\leqslant a$ 等价于 $-a\leqslant x\leqslant a$,解集为$\{x\mid -a\leqslant x\leqslant a\}$.

在数轴上表示为图 1.2.1

类似可以证明(2).

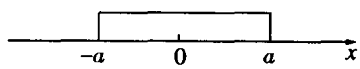

图1.2.1

【例 1】　解不等式 $|3x-5|\leqslant 7$

解　由 $|3x-5|\leqslant 7$,得

$$-7\leqslant 3x-5\leqslant 7$$

不等式的各边都加 5,得

$$-2\leqslant 3x\leqslant 12$$

不等式各边都除以 3,得

$$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 4$$

所以,原不等式的解集为$\{x\mid -\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 4\}$

【例 2】　解不等式 $|5x-2|\geqslant 3$

解　由 $|5x-2|\geqslant 3$,得

$$5x-2\geqslant 3 \text{ 或 } 5x-2\leqslant -3$$

分别解得

$$x \geqslant 1 \text{ 或 } x \leqslant -\frac{1}{5}$$

所以,原不等式的解集为$\{x \mid x \geqslant 1 \text{ 或 } x \leqslant -\frac{1}{5}\}$

二、一元二次不等式的解法

定义 1.2.1 含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的不等式,称为一元二次不等式.

一元二次不等式的一般形式为

$$ax^2 + bx + c > 0(a \neq 0) \text{ 或 } ax^2 + bx + c < 0(a \neq 0)$$

如果一元二次不等式一般形式中的二次三项式

$$ax^2 + bx + c(a \neq 0)$$

能分解因式,那么解一元二次不等式就可以转化为解两个一元一次不等式组.

【例 3】 解不等式 $x^2 + x - 6 > 0$

解 因为 $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

所以原不等式可化为$(x - 2)(x + 3) > 0$

因为两因式的积大于零,两因式符号必须相同,

所以原不等式可以化为下面两个不等式组

$$(\text{i})\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \text{或}(\text{ii})\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases}$$

因为(i)等价于 $x > 2$,(ii)等价于 $x < -3$

所以原不等式的解集为

$$\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < -3\}$$

【例 4】 解不等式 $2x^2 - x - 3 < 0$

解 因为 $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$ 所以原不等式可化为$(x + 1)(2x - 3) < 0$

因为两因式的积小于零,两因式符号必须相反.

所以原不等式可化为下面两个不等式组

$$(\text{i})\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases} \text{或}(\text{ii})\begin{cases} x + 1 < 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

因为(i)同解于 $-1 < x < \frac{3}{2}$,(ii)的解集为 Φ

所以原不等式的解集为

$$\{x \mid -1 < x < \frac{3}{2}\} \cup \Phi = \{x \mid -1 < x < \frac{3}{2}\}$$

【例 5】 解分式不等式

$$\frac{x + 5}{x - 3} < 0$$

解 因为$\frac{x + 5}{x - 3} < 0$

所以,分子与分母符号必相反

故,原不等式可化为

$$(\text{i})\begin{cases}x+5>0\\x-3<0\end{cases}\quad 或(\text{ii})\begin{cases}x+5<0\\x-3>0\end{cases}$$

因为(i)的解为 $-5<x<3$,(ii)的解集为 Φ

所以,原不等式的解集为

$$\{x \mid -5<x<3\}\cup\Phi=\{x \mid -5<x<3\}$$

一般,经常用抛物线来解一元二次不等式.

设 $a>0$,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\triangle=b^2-4ac$,其解按照 $\triangle>0$,$\triangle=0$,$\triangle<0$ 分为三种情况.相应地,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的相关位置也分为三种情

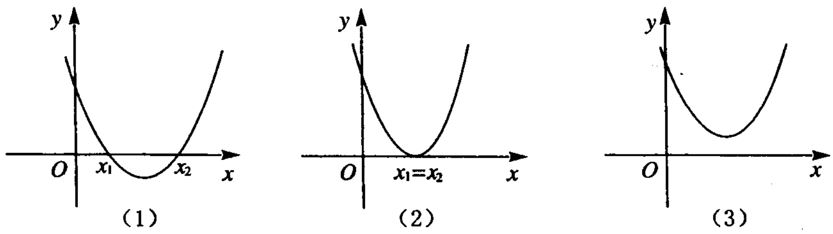

图1.2.2

况(图1.2.2).下面分三种情况讨论一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 与 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

(1)如果 $\triangle>0$,此时抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 与 x 轴有两个交点(图1.2.2—(1)),即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2(设 $x_1<x_2$).那么

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x \mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$.

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x \mid x_1<x<x_2\}$.

(2)如果 $\triangle=0$,此时抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 与 x 轴只有一个交点(图1.2.2—(2),即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.那么

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x \mid x\neq-\dfrac{b}{2a}\}$.

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集 Φ.

(3)如果 $\triangle<0$,此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点(图1.2.2—(3)),即方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根.那么,不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 R;不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 Φ.

对于二次项系数是负数(即 $a<0$)的一元二次不等式,可以先把二次项系数化成正数,再求解.

【例6】 解不等式 $2x^2-3x-2>0$

解　因为 $\triangle=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25>0$

故方程 $2x^2-3x-2=0$ 有两个不同的解

$$x_1=-\frac{1}{2},x_2=2$$

所以,原不等式的解集为 $\{x \mid x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $x>2\}$

【例7】 解不等式 $-3x^2+6x>2$

解　整理原不等式可得

$$3x^2-6x+2<0$$

因为 $\triangle=(-6)^2-4\times3\times2=12>0$

方程 $3x^2-6x+2=0$ 有两个不同的解

$x_1=1-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以,原不等式的解集为

$$\{x \mid 1-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\frac{\sqrt{3}}{3}\}$$

【例 8】　解不等式 $-x^2+2x-3>0$

解　原不等式可化为

$$x^2-2x+3<0$$

因为 $\triangle=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$

所以,方程 $x^2-2x+3=0$ 无实数解,所以不等式 $x^2-2x+3<0$ 的解集是 ϕ.

从而,原不等式的解集是 ϕ.

三、区间

1.有限区间

定义 1.2.2　设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,规定:

(1) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数的集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 叫做闭区间,记作 $[a,b]$;

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数的集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 叫做开区间,记作 (a,b);

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的所有实数的集合 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 叫做左开区间,记作 $(a,b]$;

(4) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有实数的集合 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 叫做右开区间,记作 $[a,b)$.

左开区间和右开区间统称为半开半闭区间.无论哪一种区间,a,b 都叫区间的端点.在数轴上,上述四种区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示,端点间的距离 $b-a$ 叫做区间的长,用实心点表示包括在区间内的端点,用空心点表示不包括在区间内的端点如图 1.2.3

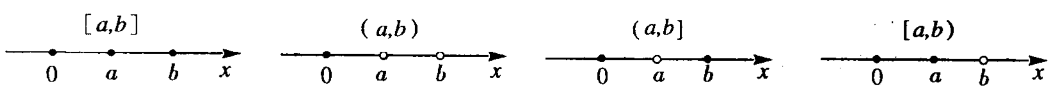

图1.2.3

2.无限区间

定义 1.2.3　符号"∞"读作"无穷大","$-\infty$"读作"负无穷大","$+\infty$"读作"正无穷大".我们把满足 $x\geqslant a, x>a, x\leqslant b, x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为区间 $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,$

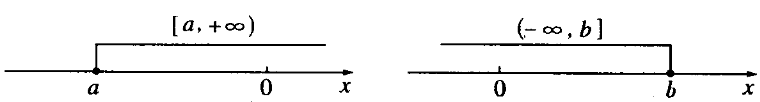

图1.2.4