数学素质培养丛书之一

公式树与归纳法

李铁木 著

地震出版社

数学素质培养丛书之一

公式树与归纳法

李铁木　著

地震出版社

1999

数学素质培养丛书之一

公式树与归纳法

李铁木　著

责任编辑：李小明

责任校对：张晓梅

北京出版社　出版

北京民族学院南路9号

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168　1/32　5.25印张　140千字

1999年1月第一版　1999年1月第一次印刷

印数：0001－3000

ISBN 7-5028-1589-9/G・126

(2032)　定价：8.00元

前　言

摆在我面前的这套《数学素质培养丛书》，令我感慨万千。它的作者李铁木同志，论年龄比我还要晚一代人，现在正是他著书立说的黄金年华，竟然故去了。他利用业余时间创作的数学专著《分析提纲与证明》上、下两册，已于80年代由宇航出版社出版，得到数学界的好评。而这套旨在提高年轻一代乃至全民族的数学素质的丛书，编删取舍，历时十年，竟成了作者的封笔之作。想到作者生前未能见到它的出版，我不禁为之怅然。想到作者将毕生业余时间，献身于丰富我国的数学教育理论工作，作为一个从事教育工作逾半个世纪的老人，我不能不感到由衷的激动。科教兴国，全面提高中华民族的文化素质，就需要一批像李铁木同志这样执著的学者和作者。

我翻阅了李铁木同志的手稿，无论他的选题，还是他的表述，都令我赞叹不已。具体而言，本丛书中的公式树、方法论等内容是他个人独创，而将数学与哲学、尤其与美学专题相连进行深入的探讨，使原本相伴生的数学与哲学在分道扬镳多年后又在作者笔下回归合一，这样的科普著作我以为意义重大。数学具有逻辑思维的科学性，数量计算的普遍性，和运用领域的广泛性，这是一门人人要学好的基本学科，凡事都要努力做到“心中有数”，定量和定性结合。在功利主义影响日增的今天，能够静下心来，就数学的通俗化这个少人问津、无利可图的题目著书立说，没有信念的支持和热情的驱使，是不可能有始有终地完成这项非常富于开拓意义的工作的。我相信读者从这套丛书中汲取到的不仅是一个数学工作者对于数学专题的心得、领悟和创见，而且还能感受

到一个淡泊名利、追求真知的灵魂的呐喊。

基于以上所感，我郑重地向各界朋友推荐这部《数学素质培养丛书》。

中国教育学会顾问　张健

一九九八年八月

人 物 表

学生甲：高中三年级学生
学生乙：大学数学系一年级学生
学生丙：大学数学系一年级学生
学生丁：大学数学系二年级学生
老　师：数学教员

目　　录

第一篇　公式树

第二篇　归 纳 法

第一篇　公 式 树

开场白

老　师　我们这个讲座的专题叫“公式树”。内容是，通过一个长长的例子，说明什么叫公式树以及与公式树有关的一些问题。

学生丙　在您讲解这个长长的例子之前，能否先简单地说明公式树的大致意思是什么？为什么起了公式树这一名称？

老　师　可以。公式指各种数学公式；树指大自然里的树。这两者怎能连在一起呢？我说能。从一个已知的数学公式出发，通过各种演绎的手段：最初等的有如代数四则运算，指定公式中的某一变量为特定的量或函数；较高等的有如微分、积分等运算，可以引出一系列新的公式。从这新的公式中再通过各种演绎的手段又能获得另一批新的公式，为弄清其来龙去脉，用一个直观的图形表示，这图形就会呈现出树的形状（见公式树图）。这个图是由很多的数学公式构成的，所以称之为公式树。举一个很简单的例子，如果我们具备基本的微积分学知识，用变量代换法（先令 $x=a+t$，最后把积分变量统一换成 x）容易证明

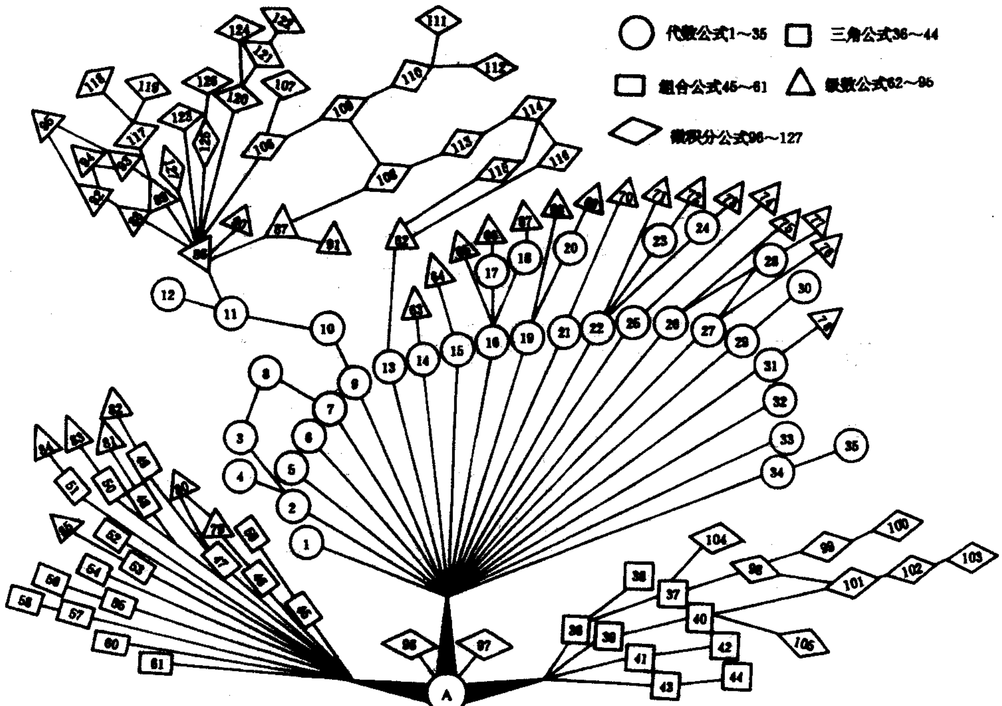
$$\int_{a-\lambda}^{a+\lambda} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\lambda}[f(a+x)+f(a-x)]\mathrm{d}x \qquad \text{(A)}$$

其中 $f(x)$是任意可积函数。

此式中若令 $a=0$，就得

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\lambda}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x \qquad \text{(B)}$$

如果 $f(x)$是偶函数，就有



公式树图

图中序号对应本书用括号数码编序的公式。如①对应式(1)，$\boxed{37}$对应式(37)等．余类推

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x \tag{C}$$

如果 $f(x)$是奇函数,就有

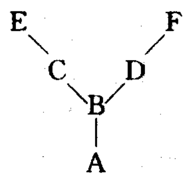
$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{D}$$

即我们已得到：一个可积的偶函数在对称区间上的积分等于半区间上的积分的二倍，奇函数在对称区间上的积分等于 0，在教科书中是以定理或作为定积分的重要性质来介绍的，于是进而知

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \cos^{n} x\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\lambda} \cos^{n} x\mathrm{d}x \tag{E}$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sin^{(2n-1)} x\mathrm{d}x \equiv 0 \tag{F}$$

这里 n 表示任何正整数。λ 可以取任意实数,具有奇偶性的函数 $f(x)$无限多,所以这一类的公式也就无限多。仅把上面六个公式的因果关系用一个图形表示,就是



这已是一个树的雏形了。

学生丙 有些理解了。

学生丁 与此类似地，如从某一定理导出几个新的定理，或几个推论，推论实际上也可称作定理，然后从新的定理中又能引伸出更多定理，更广泛一点说，各种知识之间也常常有些联系，那么是否也可以有“定理树”、“知识树”等提法呢？

老　师 我想当然可以。一部逻辑上十分严谨的数学书，应是在它的公理和定义的系统上由几个公式树和几个定理树的合成。至于偏重于介绍性的和应用性的书可以例外。

学生丁 那么,这里需要的主要逻辑推理方式是否就是分析,或演绎呢?

老　师　是这样，也不尽然。我们要讲的这个公式树中的100多个公式，绝大部分是由演绎而得的，但也有由归纳所得的。

学生甲　关于分析、综合、演绎、归纳等逻辑学名词，我们只粗知一点，不很清楚。能讲解这些逻辑学概念的确切含义吗?

老　师　不仅可以，而且是应该的。但我不是逻辑学家，所谈的未必全面，更难保证确切，只供大家参考。

分析与综合是人们思维活动中一个既对立又统一的、最基本的逻辑思维方法。分析，指把客观对象的整体化划为各个部分、方面、个体而加以具体的认识；综合，是指对各个部分、方面、个体的认识联结起来，形成对客观对象的统一的、整体的认识。所以，综合是以分析为基础的，分析又以综合为归宿。可见，分析与综合是互相渗透、互相转化的，既对立又统一的思维方法；是人们形成新的概念，获得新的知识，建立新的理论系统的最重要的逻辑思维方法。在数学的研究中也毫不例外。

与此相类似地，演绎和归纳也是人们常应用的一种互为相反过程的逻辑推理方法。从一般进而认识个别的推理过程叫演绎，从个别中认识一般的推理过程叫归纳。在公式树这一特定的场合，可说得更明白些：从一个普遍成立的公式派生出一系列具体公式的过程叫演绎，从一系列具体的公式中找到共同的规律而得出普遍的公式的过程叫归纳。所以，在一个公式树的形成过程中，大量地运用的是演绎，但也少不了归纳。特别是，人们认识客观事物总是从个别到一般，再从一般到个别，如此不断往复，不断加深认识的过程，那个赖以演绎的最初的公式，也是由归纳而得的。这就是说，归纳为演绎提供依据，演绎为归纳创造条件，两者相辅相成。

学生乙　公式树也好，定理树也好，提出这种概念对我们的学习与工作会有哪些方面的意义呢?

老　师　这也是我讲公式树这一题目是出自于什么愿望的问题。我想从下面三个方面谈谈个人的看法。

第一，如果说"一部数学著作应是几个公式树和几个定理树的合成"这一提法是不错的话，用公式树、定理树的观点处理我们已有的和正在学习的知识，将有助于把知识系统化，条理化，容易发现各种知识之间的内在联系以及直接的或间接的因果关系；

第二，有助于加强我们善于综合、归纳和分析、演绎的逻辑思维能力，有助于培养我们不满足于已知，力求发现新事物的探索精神，为将来的工作打下良好的基础；

第三，若我们真能从中有所发现，将对科学是一点贡献。

但实际效果能否与我的愿望相符，还要经受实践的考验的。

学生丁 能否举一些例子，说明在已有的公式上再做些工作，或把一个普遍成立的公式具体化，即通过公式演绎所得的结果也算是有价值的新结果的例子呢？

老 师 好，讲几个例子，讲几个已被人们公认的数学史上的例子，我想这足能说明问题。

大家都知道，中国古代数学的很多方面在当时世界上是遥遥领先的。如在对π的研究上，三国时期的数学家刘徽在公元263年创造了用圆的内接正多边形去逼近圆的计算方法，一直算到内接正96边形的边长，得出圆周率$\pi\approx3.14$。

到了公元460年，南朝著名数学家祖冲之仍用刘徽的计算方法(此法后人称为刘徽割圆术)，算到圆内接正12288(即6×2^{11})边形的边长，得出

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

由此得到$\pi\approx3.1415926$。为了计算12288边形的边长，需要进行12重根号运算，在当时的计算条件下，完成这一个繁难的计算，该付出艰巨的劳动！祖冲之是世界上第一次把圆周率计算出精确到小数点后第7位的人，他的纪录一直保持了1000多年。由于圆周率π是在数学、物理中经常用到的一个重要常数，刘徽、祖冲之的贡献对科学的发展的意义是显而易见的。是用同一个公式在增加计算的基础上得出有重大意义结果的例子，还不是公式的演绎。

在微积分学及分析数学发展过程中一些著名的例子。

1671 年，苏格兰数学家格列高利得出了下列无穷级数

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \qquad (G)$$

但他没注意到这一点：当 $x=1$ 时这个级数成为

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4} \qquad (H)$$

而级数(H)是 1674 年才被莱布尼兹所发现的，此式是 π 的形式上十分简单的无穷级数，所以很著名，后人称作莱布尼兹级数。

1712 年，英国数学家泰勒将牛顿、格列高利的有限差计算公式

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{c}\Delta f(a)+\frac{\frac{h}{c}\left(\frac{h}{c}-1\right)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a)+\cdots \qquad (I)$$

$$(\Delta f(a)=f(a+c)-f(a),(\Delta^2 f(a)=\Delta f(a+c)-\Delta f(a)\cdots)$$

再进一步具体化，发展成将函数展成幂级数的公式，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2!}+\cdots \qquad (J)$$

也就是在(I)式中命 $c=\Delta x\to 0$ 便得了(J)式(虽然，极限、无穷小等概念对 19 世纪以前的数学家们一直是很模糊的)。(J)式我们很熟悉，称此式为泰勒公式。

1742 年，英国数学家马克劳林给出

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2!}h^2+\cdots \qquad (K)$$

现称为马克劳林公式的重要公式。其实 (K) 式不过是 (J) 式的一个特例，即当 $a=0$ 时的结果。马克劳林也谦虚地声明他的公式是泰勒公式的一个特例，但这一公式是那样被人们重视，以致于人们一直宁愿把这一公式看作是独立结果而归功于马克劳林 (同时代的另一英国数学家斯特林也得到过这个结果)。

这些公式都是微积分学发展中的重要成果。当时人们未重视

对无穷级数收敛性这一关键问题，所以理论上还是不完善的。

1770 年，法国数学家拉格朗日对（J）式进一步研究后得出

$$\begin{cases} f(x+h)=f(x)=f'(x)h+f''(x)\dfrac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\dfrac{h^n}{n!}+R_n \\ R_n=f^{(n+1)}(x+\theta h)\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (0\leqslant\theta\leqslant 1) \end{cases} \tag{L}$$

这里，R_n 就是泰勒级数的余项，叫做拉格朗日形式的余项。拉格朗日在这里指出，在用泰勒公式时必须考虑余项的情况。虽然他仍没有研究收敛性这一问题，但若想到最初人们盲目地运用级数展开式的情况，（L）式对于（J）式是一个进步。

到了 19 世纪 20 年代，泰勒级数的收敛性问题才由当时第一流的法国大数学家柯西最后解决。他指出：当余项 $R_n\to 0$ 时泰勒级数收敛于导出这一级数的那个函数（当然，关于级数的收敛性还涉及到更多的理论，这里只有公式演绎是不够的）。

这种例子不胜枚举。欧拉在对级数的研究中得到公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+C_n \tag{M}$$

其中，C_n 是依赖于 n 的一个数。他发现当 n 很大时 C_n 随 n 的变化很小，从而算出 $C_n\approx 0.577218$ 这个结果。后人对(M)式只作了举手之劳的事情：从(M)式两端减去 $\ln n$，取极限就得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c \tag{N}$$

根据 c 是分析数学中又一个著名的常数，叫做 Euler 常数，大小为

$$c=0.5772156649015325\cdots$$

公式(N)是欧拉常数的最简明的极限公式，已成为经典公式常出现在分析数学中，而公式(M)已不被人们提起了。

多数人已学过特殊函数理论。伽玛函数的最常见的定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}x \quad (x>0) \tag{O}$$

这个函数具有递推性质，按这一性质可把函数的定义域扩充到$x<0$的地方，这些都能在普通的教科书上查到。积分（O）也叫欧拉第二积分，所以按（O）式定义伽玛函数叫做欧拉第二类型积分形式。其实，伽玛函数有多种经典的定义方式，其中著名的有：

高斯极限形式：

$$\Gamma(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{m!\ m^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \tag{P}$$

欧拉无限积形式：

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x} \tag{Q}$$

韦尔斯特拉斯无限积形式：

$$\Gamma(x)=\mathrm{e}^{-cx}\left[x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right]^{-1} \tag{R}$$

其中c为欧拉常数。从（O）式出发，运用无穷级数和无限积的知识，通过稍复杂的公式推导（这过程中要用到一些现成的结果），就可以一一得到后面几个伽玛函数的等价定义形式，而这些不同的定义形式在不同的场合都显出各自的优越性，因而它们在特殊函数理论中得到广泛的应用。

从更广大的角度上看，欧几里得写出具有划时代意义的重要著作《几何原本》，牛顿和莱布尼兹创立微积分学等等，他们的工作无不闪耀着对已有数学知识的归纳和演绎的思想的光芒。

公式演绎是在数学的研究中不可缺少的，从一般的公式中得到特定的公式，把已知的公式再向前引伸一步，这样做也会得到有价值的结果。如果这个人又善于从一系列的个别的结果中归纳出共性的东西，得出普遍性的结果，并能在归纳和演绎的过程中把更多的知识结合进去，那么将是一个很全面的研究者了。

学生甲 公式树的提法不难接受，可我目前还只具有最基本的一点微积分知识，下面的内容能否使我有些收获呢？

老 师 也会有收获的。像只有最基本的微积分知识的人，对上面所举的有些例子会感到陌生，但这不要紧，因为那些毕竟不