21世纪高等院校教材

高等数学

（物理类）

上册

何柏庆 王晓华 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

高等数学

（物理类）

上册

何柏庆　王晓华　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材是根据物理类高等数学教学大纲(200学时)编写,分为上、下两册出版.本书为上册,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,微分学中值定理,微分学应用,不定积分,定积分和定积分的应用.本书总结了编者长期从事高等数学教学的经验,结构严谨、逻辑清晰、难点分散、例题丰富、通俗易懂.各章配有大量与工科相结合的例题和习题,便于教师教学和学生自学使用.

本书可供理工科大学物理类、电类专业的本科生使用,还可供从事高等数学教学的教师和科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:物理类.上册/何柏庆,王晓华编.—北京:科学出版社,2007
21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-019291-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①何… ②王… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第098159号

责任编辑:赵 靖 杨 然 / 责任校对:曾 茹
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年7月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年7月第一次印刷 印张:41 1/4
印数:1—4 000 字数:781 000

定价:48.00元(上、下册)

前　言

高等数学的内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何学、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数论、常微分方程，以及作为理论基础的极限论. 由于构成本课程的主体是一元及多元函数的微分学和积分学，所以有时也就把高等数学这门课程称为微积分学.

微积分学与中学里学过的初等数学有着本质的区别. 初等数学研究的对象基本上是常量（即固定不变的量）. 例如，算术中研究固定不变的量的运算法则；代数学中解方程，所要求的未知数也是固定不变的，只不过具体数值事先不知道；几何学中研究的是一些固定的、规则的几何图形. 而且初等数学所涉及的基本运算是常量之间的算术运算. 因此，初等数学基本上是常量数学.

微积分学是一门以变量（函数）作为主要研究对象，以极限方法作为基本研究手段的数学学科. 它有两个分支：用微观的观点，运用极限方法研究曲线的切线问题和各类变化率问题，进而就产生了微分学；用宏观的观点，运用极限方法研究曲边图形面积、曲面立体体积等这类涉及微量元素的无限积累的问题，进而就产生了积分学. 而微积分学的理论基础是极限论，它从方法论上突出表现了微积分学不同于初等数学的特点. 另外，以极限论为基础建立起来的无穷级数论，一直被认为是微积分学的一个不可缺少的部分，它的一个重要用处就是用来表示函数. 与一元函数微积分学同时成长起来的（常）微分方程，正是数学科学联系实际的主要途径之一. 总之，高等数学是变量数学. 在数学的历史上，自从出现了解析几何学并继而产生了微积分学之后，便开始了变量数学的研究. 正如恩格斯所指出的，“数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分学和积分学也就立刻成为必要的了……”

高等数学是大学工科院校的基础课，学好这门课相当重要. 特别是对刚从中学毕业的同学们，由于对大学数学的学习方法还不太入门，因此，我们在教材的编写上，对一些概念分析比较深入，逻辑推导比较细致，例题也配备得较多，尽量便于阅读，以利于培养自学能力，同时也可以打好坚实的数学基础.

本教材分上、下两册. 上册由何柏庆（第 1～4 章）和王晓华（第 5～7 章）编写；

下册由张国珉(第 8、9 章)、徐海燕(第 10 章)和肖瑞霞(第 11、12 章)编写. 各章都配备相当数量的习题,另有习题答案供参考. 在编写过程中,得到南京航空航天大学教材科和理学院领导及同仁们的帮助和指导,在此一并深表感谢.

本教材的书稿虽经小范围的多次试用和修改,但由于编者水平有限,不足之处期待得到读者的宝贵意见.

编　者

二〇〇七年四月

目　　录

第1章　函数　极限　连续

高等数学所研究的主要对象是函数，所用的主要方法是极限法. 极限与函数虽然在中学已经分别学过，但是，没有应用极限方法来研究函数. 一门科学，由于改变了研究方法，就能得到很大的进步和发展，这不仅在数学中如此，在其他科学中也是如此，这是值得注意的.

本章分为函数、极限和连续三节，是学习高等数学的基础.

1.1　函　　数

函数是高等数学主要的研究对象. 现在，我们学习高等数学，就要从函数入手. 由于在中学里已经学习过函数概念和一些简单函数的性质，在这里将帮助大家对原有知识进行复习，并根据本课程的需要作必要的补充和提高.

1.1.1　函数概念

现实世界中的万事万物，无一不在一定空间中运动变化着，在运动变化过程中都存在一定的数量关系，有的数值是变化的量，称为变量. 通常用后面几个英文字母 $x,y,z,\cdots$ 表示. 有的数值是不变的量，称为常量. 通常用前面几个英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 常量可以看作变量的特殊情形：即在所考察的变化过程中，始终只取同一数值的变量.

本课程不论变量和常量，它们的取值都是实数，超出实数范围都认为没有意义，不作研究. 因此，变量的每一个值都是一个实数，所有这些数所构成的数集，称为这个变量的变化域. 在许多情况下，变量的变化域可以用区间表示.

设 $a<b$，开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间：$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

无穷区间：$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$，

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$.

特别，开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$，其中，$\delta(>0)$ 为常数，称为以点 a 为中心、δ 为半径的邻域，或称点 a 的 δ 邻域，简称 a 的邻域，记作 $S(a,\delta)$. 有时还要讨论，在 a 的邻域内去掉心（点 a），即 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为

a 的去心邻域，记作 $S_0(a,\delta)$.

我们知道，在某一变化过程中，同一个问题，往往同时出现好几个变量，而这些变量又往往是相互联系、相互依赖的，高等数学不是孤立地研究每一个变量，而是着重研究变量之间确定的依赖关系，变量之间的这种确定的依赖关系，就叫做函数.

定义　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，x 的变化域为 X. 如果对于 X 中的每一个 x 的值，根据某一规律 f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数①，记作

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量 x 的变化域 X 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，因变量 y 的变化域称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记值域为

$$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}.$$

为了理解这个定义，我们说明以下几点.

首先，函数 $y=f(x)$ 中的"f"代表从自变量 x 到因变量 y 的对应关系，称为函数关系. $f(x)$ 是一个完整记号，切不可误以为 f 乘以 x，正如 $\sin x$ 不能看作 sin 乘以 x 一样.

当自变量 x 取一定值时，因变量 y 的相应值称为函数值. 函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例如，$y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $f(-3)=\dfrac{-3}{\sqrt{10}}$，$f(x^2)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$，$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

首先，特别指出：$f(x)$ 与 $f(x_0)$ 是两个完全不同概念，前者是函数关系式，后者是函数在某点的值，要严加区分.

其次，研究函数，还应了解函数在什么范围内有意义，因此要确定函数的定义域.

例如，圆面积 A 是圆半径 r 的函数 $A=\pi r^2$，显然圆半径 r 必须是正值，因此它的定义域是 $(0,+\infty)$. 又如，离地面高度为 h 的物体，在重力作用下的自由落体有函数关系式

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中，t 表示时间，s 表示路程. 显然落下的最大距离是 h，因此，这个函数的定义域

---

①　函数一词最早是德国哲学、数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646～1716)于 1694 年从拉丁文中引进的. 这里函数的定义是德国数学家狄利克雷(P. G. L. Dirichlet，1805～1859)给出的.

为$\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

但如果只是在数学上一般地研究某一由具体表达式规定的函数关系，函数的定义域则由该表达式本身确定.

例如，$y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$y=\log_a x$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

$y=\arcsin(3x+2)$的定义域应该从$|3x+2|\leqslant 1$ 解出来，得$-1\leqslant 3x+2\leqslant 1$，亦即有$-1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{3}$，故定义域为$\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$.

$y=\sqrt{\frac{5-x^2}{x-1}}$的定义域应该从 $x\neq 1$ 且$\frac{5-x^2}{x-1}\geqslant 0$ 解出来. 当 $x>1$ 时，要求 $5-x^2\geqslant 0$，得 $1<x\leqslant\sqrt{5}$；当 $x<1$ 时，要求 $5-x^2\leqslant 0$，得 $x\leqslant-\sqrt{5}$. 故定义域为$(-\infty,-\sqrt{5}]$，$(1,\sqrt{5}]$.

又由于 $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x-1}}$的定义域是空集，所以表达式 $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x-1}}$不能成为函数.

因此，函数的两要素：第一是函数关系，第二是定义域，缺一不可.

另外，两个函数相等应该是函数关系相同，它们的定义域也相同. 例如，$f(x)=x$，$g(x)=x(\sin^2 x+\cos^2 x)$这两个函数是相同的，故 $f(x)=g(x)$；而 $f(x)=x$，$g(x)=\frac{x^2}{x}$，它们不是同一个函数. 因为 $f(x)=x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)=\frac{x^2}{x}$的定义域为$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$. 由于两个函数定义域不同，所以这两个函数不是同一个函数.

今后常用函数 $y=f(x)$在 X 上有定义或者函数 $y=f(x)$定义在 X 上来表示存在定义域为 X 的函数 $y=f(x)$.

有一种很特殊而又很重要的函数，其定义域 X 是全体正整数 $1,2,\cdots,n,\cdots$，因而它的函数值就依次是 $y_1=f(1)$，$y_2=f(2)$，$\cdots$，$y_n=f(n)$，$\cdots$，这种定义在全体正整数上的函数，特别称之为数列或整标函数. 并记为$\{y_n\}$或

$$y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$$

例如，$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，即$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$2^1,2^2,2^3,\cdots,2^n,\cdots$，即$\{2^n\}$，$0,1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},\cdots,\frac{1+(-1)^n}{n},\cdots$，即$\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}$等都是数列的例子.

最后，表示函数关系的方法很多，常用的有三种：列表法、图示法和公式法.

所谓列表法，就是将自变量和因变量的对应数据列成表格，它们之间的函数关

系从表格上一目了然. 如三角函数表、对数函数表.

在很多生产部门中常采用图示法来表示函数关系. 例如，气象站用仪表记录下的气温曲线来表示气温随时间的变化关系；化工厂中用温度压力曲线来表示温度与压力之间的函数关系等.

公式法就是用算式表达函数关系的方法，这在高等数学中是最常见、最常用的方法，便于作理论研究.

以上三种表示法都各有优缺点. 如公式法，它所表示的形式比较简单而全面，研究起来也比较方便，但是，它不能把量与量之间的变化过程很明显地表示出来，使人一目了然，并且每一个函数值都要临时计算，不能立刻得到结果. 至于图示法虽然能把量与量之间的变化过程很明显地表示出来，但是，限于画图的技巧，缺乏足够的精确性. 列表法虽然可以从表上很快地查出函数的值，但不能查出函数的任何值. 所以每一种表示法都各有优缺点. 因此，在高等数学中，经常把函数的三种表示法结合起来应用，如研究函数 $y=f(x)$ 的变化过程时，为了使它明显起见，总把它的图形画出来. 所谓函数的图形是指，在直角坐标系中，满足方程 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 的轨迹.

有了函数图形的概念，于是，函数与几何图形就统一起来，这不仅使研究函数的人对于函数的变化状态可以从图形上一目了然，也使研究几何的人可用分析方法来研究几何图形.

以下给出本课程经常使用的函数.

例 1　中学数学里熟知的六类函数，即：

(Ⅰ) **常数函数**　$y=c$　(c 为常数)；

(Ⅱ) **幂函数**　$y=x^{\alpha}$　($\alpha\neq 0$ 为常数)；

(Ⅲ) **指数函数**　$y=a^{x}$　($0<a\neq 1$ 为常数)，特别取 $a=\mathrm{e}$(无理数 $\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$)有

$$y=\mathrm{e}^{x},$$

这是常用的指数函数；

(Ⅳ) **对数函数**　$y=\log_{a}x$　($0<a\neq 1$ 为常数)，特别取 $a=\mathrm{e}$ 有 $y=\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$ 称为自然对数函数；

(Ⅴ) **三角函数**　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$；

(Ⅵ) **反三角函数**　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

以上统称为**基本初等函数**.

注意，用公式法表示函数，而没有给出定义域时，我们约定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合，称为函数的自然定义域. 例如，$y=\log_{a}x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$；$y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$；$y=$

$\arcsin x$的定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；$y=\arctan x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

例 2　表达式

$$y=f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$

定义了$(-\infty,+\infty)$上的一个函数，这函数图形如图 1.1 所示.

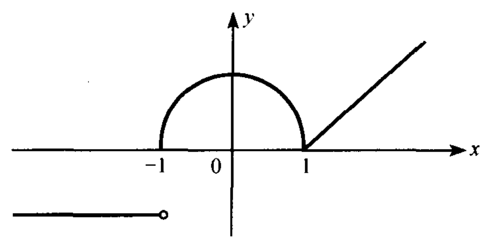

图 1.1

值得注意的是，在函数的定义中，并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示对应规律. 本例中，函数定义在$(-\infty,+\infty)$上，在各自的子区间内表达式不相同，所以称为分段函数，不是三个函数.

例 3　绝对值函数 $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 也是分段函数. 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，它的图形如图 1.2 所示.

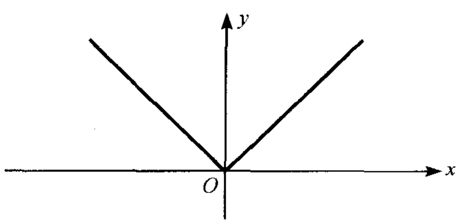

图 1.2

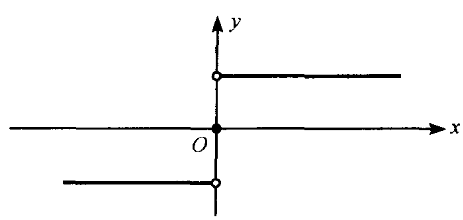

图 1.3

例 4　符号函数 $y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 是分段函数. 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为集合$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.3 所示.

因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x,$$

所以 $\operatorname{sgn}x$ 起了 x 的符号的作用，这正是取名的由来. 也称克罗内克[①]函数.

---

① 克罗内克(德国数学家，L. Kronecker，1823～1891).

例 5　取整函数 $y=f(x)=[x]$,表示不超过数 x 的最大整数. 例如

$$[2.5]=2,\quad [3]=3,\quad [-\pi]=-4,$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为集合 $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$. 它的图形如图 1.4 所示.

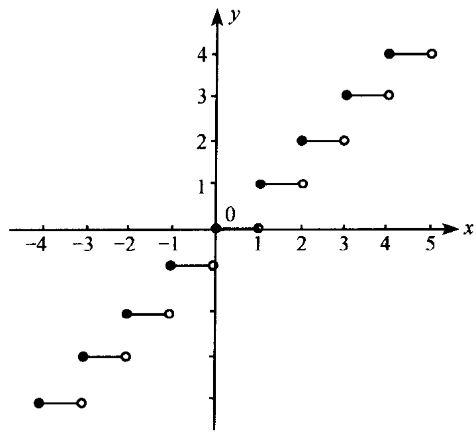

图 1.4

由于图形成阶梯形,所以又称为阶梯函数,还称为高斯[①]函数.

例 6　函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为集合 $\{0,1\}$. 因为数轴上有理点与无理点都是稠密的,所以它的图形不能在坐标系下描绘出来. 但它的奇特性质可以用来说明许多涉及微积分本质的问题. 这个函数也称狄利克雷函数.

1.1.2　反函数概念

在函数的定义中,存在两个变量,一个是自变量,一个是因变量,一主一从,地位不同. 然而在实际问题中,谁是自变量,谁是因变量,并不是绝对的,依所研究的具体问题而定.

例如,在自由落体运动中,如果想从已知的时间 t 来确定路程 s,则 t 是自变量,s 是因变量,它们之间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

如果反过来,想从已知路程 s 来确定下落的时间,则应从上式改写为

① 高斯(德国数学、物理学、天文学家,C. F. Gauss,1777～1855).

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

这时 s 是自变量，t 成了因变量.

这说明在一定条件下，函数的自变量与因变量可以互相转化，两个变量的地位可以互换. 这样得到的新函数，就叫做原来那个函数的反函数. 反函数的一般定义如下.

定义　设给定函数

$$y=f(x),\quad x\in X, \tag{1.1.1}$$

其值域为 Y. 如果对于 Y 中每一个 y 值，都可以从方程 $f(x)=y$（把它看成关于 x 的一个方程）确定唯一的一个 x 值，则就得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in Y \tag{1.1.2}$$

（f^{-1} 读作 f 逆，不读作 f 负一次方）. 这时，原来函数也称为正函数.

例 1　函数 $y=5x+3$ 的反函数是 $x=\dfrac{y-3}{5}$，$y\in(-\infty,+\infty)$.

例 2　函数 $y=2^x$ 的反函数是 $x=\log_2 y$，$y\in(0,+\infty)$.

但在习惯上，我们用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此反函数(1.1.2)式可以改记为

$$y=f^{-1}(x), \tag{1.1.3}$$

也称函数(1.1.3)式为函数(1.1.1)式的反函数. 以后没有特别声明，总是采用(1.1.3)式作为(1.1.1)式的反函数. 因而，当函数(1.1.1)式用公式表示时，求它的反函数的过程是：先从(1.1.1)式解出 x，即将 x 用 y 来表示，然后将 x 换作 y，y 换作 x.

例如，$y=5x+3$ 的反函数是 $y=\dfrac{x-3}{5}$；$y=2^x$ 的反函数是 $y=\log_2 x$.

从几何图形上来看，如果知道函数(1.1.1)式在直角坐标中的图形，那么，在同一直角坐标系中反函数(1.1.2)式的图形就是函数(1.1.1)式的图形. 这是因为任意一点 (a,b) 如果满足(1.1.1)式，它也满足(1.1.2)式；反过来说，如果满足(1.1.2)式，它也满足(1.1.1)式，所以函数(1.1.1)式的图形和反函数(1.1.2)式的图形在同一直角坐标系中是同一曲线. 然而，反函数(1.1.3)式仅是把反函数(1.1.2)式将 x 与 y 互换. 因此，反函数(1.1.3)式的作图上不同之处只在于 x 轴与 y 轴的位置对调，换言之，反函数(1.1.3)式的图形可以由函数(1.1.1)式的图形绕第一、三象限角平分线($y=x$)旋转 180°印出来，不必另行作图.

定理　正、反函数的图形对称于直线 $y=x$.

证明　设正函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$，并设正函数 $y=f(x)$ 的图形