

功的互等理论及其应用

Reciprocal Theory of Works and Its Applications

付宝连 著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

功的互等理论及其应用

**Reciprocal Theory of Works
and Its Applications**

付宝连 著

國防工業出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

功的互等理论及其应用/付宝连著. —北京:国防工业出版社, 2007. 1

ISBN 7-118-04772-4

I. 功... II. 付... III. 功-互等原理-研究
IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 110302 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850 × 1168 1/32 印张 8 1/4 字数 210 千字

2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 30.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 68428422

发行邮购: (010) 68414474

发行传真: (010) 68411535

发行业务: (010) 68472764

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,原国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 在国防科学技术领域中,学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著;密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。
4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,原国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

**国防科技图书出版基金
评审委员会**

国防科技图书出版基金 第五届评审委员会组成人员

主任委员 刘成海

副主任委员 王 峰 张涵信 程洪彬

秘 书 长 程洪彬

副 秘 书 长 彭华良 蔡 镭

委 员 (按姓氏笔画排序)

于景元 王小谟 甘茂治 刘世参

杨星豪 李德毅 吴有生 何新贵

佟玉民 宋家树 张立同 张鸿元

陈冀胜 周一宇 赵凤起 侯正明

常显奇 崔尔杰 韩祖南 傅惠民

舒长胜

前 言

本书作者长期从事功的互等定理及其应用的教学和科研工作,本书是其教学经验的积累和科研成果的总结。

本书共分六章。

第一章到第三章,系统地分析了弯曲直梁、弯曲薄板和弹性力学一般问题的贝蒂的功的互等定理中存在的非同一性和局限性两个问题。基于这种分析,给出了这些相应问题的修正的功的互等定理,修正的功的互等定理赋予功的互等定理以正确的命题。以修正的功的互等定理为理论基础,建立了小变形线弹性理论的功的互等法。应用该法求解了弯曲直梁、弯曲矩形板的平衡、振动和稳定问题以及弹性力学的平面应力问题。

第四章到第六章,分别阐述了大挠度线弹性直梁、大挠度线弹性薄板以及有限变形线弹性理论的第一类功的互等定理和第二类功的互等定理。第一类功的互等定理与两个相关有限变形体有关,而第二类功的互等定理涉及有限变形体及相关小变形体。以第二类功的互等定理为理论基础,建立了求解有限变形线弹性理论的功的互等法。应用该法计算了一系列大挠度梁和大挠度矩形板的平衡问题,并给出了相关的数值图表,以供参考。

应该指出的是,在航空、航天和船舶制造业中,不乏小挠度板和大挠度板的应用。本书所提出的功的互等法是计算大、小挠度板平衡、振动和稳定问题的有效方法。本法将和其他计算方法及测试手段一起,相互印证,提供出安全、可靠和经济的板材构件。

本书在付梓之际,特别要感谢著名科学家钱伟长先生的关怀、

指导和帮助,也要感谢工程院院士钟群鹏教授和著名力学家唐立民教授的帮助。本书的出版,得到了国防科技图书出版基金和燕山大学学术著作出版基金的资助,还得到了作者诸多同仁和好友的关心和鼓励,在此一并表示感谢。

本书是关于功的互等理论及功的互等法的学术著作,其中包括大量的理论推导和数值计算,疏漏和不协调之处在所难免,敬请读者和专家不吝指正。

编 者

2006 年 8 月

目 录

绪论	1
第一章 弯曲直梁的功的互等理论	6
1.1 直梁的基本理论	6
1.2 直梁贝蒂的功的互等定理及其三个引理	8
1.3 直梁贝蒂的功的互等定理的非同一性和 局限性	16
1.4 直梁修正的功的互等定理	18
1.5 直梁修正的功的互等定理与叠加原理等价的 两个等价性原理	22
1.6 直梁平衡稳定和振动问题的功的互等法	28
第二章 弯曲薄板的功的互等理论	40
2.1 弯曲薄板的基本理论	40
2.2 弯曲薄板贝蒂的功的互等定理	56
2.3 弯曲矩形板贝蒂的功的互等定理的三个 引理	60
2.4 弯曲薄板贝蒂的功的互等定理的非同一性和 局限性	62
2.5 弯曲薄板修正的功的互等定理	65
2.6 弯曲矩形板修正的功的互等定理与叠加原理 等价的两个等价性原理	71
2.7 弯曲矩形板平衡问题的功的互等法	74
2.8 矩形板稳定问题的功的互等法	85
2.9 弯曲矩形板振动问题的功的互等法	97
第三章 空间问题的功的互等理论	113

3.1	笛卡儿张量符号及相关基本方程	113
3.2	贝蒂的功的互等定理及其三个引理	119
3.3	贝蒂的功的互等定理的非同一性和局限性	124
3.4	修正的功的互等定理	126
3.5	修正的功的互等定理与叠加原理等价的 两个等价性原理	128
3.6	弹性力学平面应力问题的功的互等法	131
第四章	大挠度直梁的功的互等理论	141
4.1	大挠度直梁的基本方程	141
4.2	大挠度直梁的功的互等定理	144
4.3	大挠度板条的功的互等法	148
第五章	大挠度薄板的功的互等理论	165
5.1	大挠度板的基本方程	165
5.2	大挠度板的功的互等定理	173
5.3	大挠度矩形板的功的互等法	185
第六章	有限变形线弹性理论的功的互等理论	229
6.1	笛卡儿坐标系有限变形理论基本方程的 推导	229
6.2	有限变形理论的变形能原理	237
6.3	有限变形线弹性理论的功的互等定理	238
6.4	由有限变形的变形能原理及功的互等定理导出 势能原理和余能原理	243
参考文献		246

Contents

Foreword	1
Chapter 1 Reciprocal theory of works of bending of straight beams	6
1.1 Fundamental theory of straight beams	6
1.2 Betti's reciprocal theorem of works of straight beams and its three lemmas	8
1.3 The non-identity and limitation of Betti's reciprocal theorem of works of straight beams	16
1.4 Corrected reciprocal theorem of works of straight beams	18
1.5 The two equivalence theorems due to equivalence of the corrected reciprocal theorem of works of straight beams and the superposition theorems	22
1.6 Reciprocal method of works for equilibrium stability and vibration problems of straight beams	28
Chapter 2 Reciprocal theory of works of bending of thin plates	40
2.1 Fundamental theory of bending of thin plates	40
2.2 Betti's reciprocal theorem of works of bending of thin plates	56
2.3 The three lemmas of Betti's reciprocal theorem of works of bending of rectangular plates	60
2.4 The non-identity and limitation of Betti's reciprocal theorem of works of bending of thin plates	62

2. 5	Corrected reciprocal theorem of works of bending of thin plates	65
2. 6	The two equivalence theorems due to equivalence of the corrected reciprocal theorem of works of bending of rectangular plats and the supperposision theorems	71
2. 7	Reciprocal method of works of the equilibrium problems of bending of rectangular plates	74
2. 8	Reciprocal method of works of the stability problems of rectangular plates	85
2. 9	Reciprocal method of works of the vibration of bending of rectangular plates	97

Chapter 3 Reciprocal theory of works of the space problems

3. 1	Notations of Cartesian tensors and corresponding fundamental equations	113
3. 2	Betti's reciprocal theorem of works and its three lemmas	119
3. 3	The non-identity and limitation of Betti's reciprocal theorem of works	124
3. 4	Corrected reciprocal theorem of works	126
3. 5	The two equivalence theorems due to equivalence of the corrected reciprocal theorem of works and the supperposision theorems	128
3. 6	The reciprocal method of works of plane stress problems of elasticity	131

Chapter 4 Reciprocal theory of works of straight beams with large deflections

4. 1	Fundamental equations of straight beams with large deflections	141
------	--	-----

4. 2	Reciprocal theorem of works of straight beams with large deflections	144
4. 3	Reciprocal method of works of plate strips with large deflections	148
Chapter 5	Reciprocal theory of works of thin plates with large deflections	165
5. 1	Fundamental equations of the plates with large deflections	165
5. 2	Reciprocal theorem of works of the plates with large deflections	173
5. 3	Reciprocal method of works of the rectangular plates with large deflections	185
Chapter 6	Reciprocal theory of works of linear elasticity for finite deformation theory	229
6. 1	The derivations of fundamental equations for finite deformation theory in rectangular Cartesian coordinates	229
6. 2	Deformation energy principle for finite deformation theory	237
6. 3	Reciprocal theorem of works of linear elasticity for finite deformation theory	238
6. 4	The derivations of the potential energy principle and the complementary energy principle from the deformation energy principle and the reciprocal theorem of works of finite deformation	243
References		246

绪 论

贝蒂的功的互等定理是固体力学中的一个经典性能量原理。

麦克斯韦(J. C. Maxwell)于1864年给出了位移互等的一个具体算例^[1]。贝蒂(E. Betti)于1872年提出了功的互等定理(以后称为贝蒂的功的互等定理)^[2]。稍后,瑞利(L. Rayleigh)于1873年给出了谐载作用下功的互等定理的描述^[3]。关于动力问题功的互等定理的一般讨论是由兰姆(H. Lamb)于1889年完成的^[4]。

文献[5~9]应用动力问题的功的互等定理于求解不同情况下的线弹性动力问题。

作者自20世纪80年代初到现在,对功的互等定理的理论及应用研究做了一些工作。首先,应用功的互等定理求解了悬臂矩形板的弯曲^[10,11]。以后,在此基础上,进一步应用功的互等定理于求解弯曲矩形板的振动、稳定以及弹性力学立方体的位移解,遂形成一个系统的方法,称之为功的互等法(原称为功的互等定理法)^[12~16]。在功的互等定理理论研究方面,文献[17]提出了功的互等定理与位移叠加原理等价和与反力叠加原理等价两个等价性原理;文献[18]给出了广义功的互等定理,它适用于不同本构关系的小变形体;文献[19]给出了有限变形线性弹性体的功的互等定理。

所有上述工作都认定,贝蒂的功的互等定理是正确的,学者们所进行的工作都是对该定理的推广和应用。

截至目前,据作者所了解到的文献,其中包括一些名著^[20~26],关于功的互等定理命题的描述都是沿用贝蒂原著的描述^[2],虽然这些描述不会字字句句全同,但它们的中心命题一致为:作用于一弹性体的第一组外力(包括体力和面力)在第二组外力相应位移

上所做的功等于作用于同一弹性体的第二组外力(包括体力和面力)在第一组外力相应位移上所做的功。

首先,考虑一弹性体,其在外力作用下产生位移、应变和应力。很显然,该弹性体的形状、尺寸、材料和位移边界条件都是给定了的,因为缺少上述诸条件中的任何一条,在外力作用下均不可能求出其确定的位移、应变和应力。其次,该弹性体应是小变形线弹性的。最后,在外力作用下,该弹性体处于真实状态。

为说明问题简便,定义形状、尺寸、材料和位移边界条件全同的弹性体为同一弹性体;而形状、尺寸和材料相同,但位移边界条件不相同的弹性体为不相同的弹性体。

同时,简称第一组外力在第二组外力相应位移上所做的功等于第二组外力在第一组外力相应位移上所做的功为两组外力的倒易功相等。

有了上述约定之后,贝蒂的功的互等定理可以简述为:同一弹性体在两组外力作用下,则有该两组外力的倒易功相等。

下面,我们来分析贝蒂的功的互等定理存在非同一性和局限性这两个问题^[27]。

第一,考虑一悬臂矩形板,分别受到两个外力 P_1 和 q_2 的作用,依次如图 1(a)和图 2 所示。根据贝蒂的功的互等定理,有 P_1 和 q_2 两个外力的倒易功相等。

第二,在同一悬臂矩形板面上作用诸外力为 P_1 、 V_{1x0} 、 V_{1xa} 、 V_{1yb} 、 R_{1ab} 、 R_{10b} 和 M_{1y0}^+ ,它们都是独立的,如图 1(b)所示。根据贝蒂的功的互等定理,在图 1(b)板面上的诸外力与图 2 板面上的外力 q_2 有各自外力的倒易功相等。

第三,在图 1(b)板面上,解除固定边的弯曲约束,代以分布弯矩 M_{1y0}^- ,其作用刚好保证固定边的转角为零,于是得图 1(c)所示矩形板。根据贝蒂的功的互等定理,有图 1(c)板上的诸外力与图 2 板面上的外力各自外力的倒易功相等。

第四,要求图 1(c)板面上的诸外力 V_{1x0} 、 V_{1xa} 、 V_{1yb} 、 R_{1ab} 和 R_{10b} 的作用刚好保证悬臂板三个自由边转换成为三个简支边,得到如

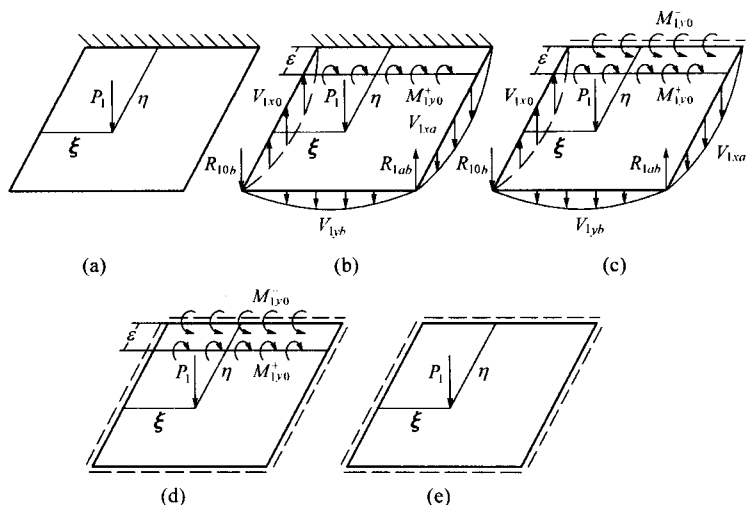


图 1

图 1(d)所示矩形板。根据贝蒂的功的互等定理,有图 1(d)板的外力(包括简支边的反力)与图 2 板外力各自外力的倒易功相等。

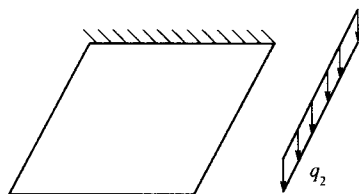


图 2

第五,在图 1(d)中,令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 和 $M_{1y0}^+ = M_{1y0}^-$,则图 1(d)便成为图 1(e)矩形板。根据贝蒂的功的互等定理,有图 1(e)板的外力(包括简支边的反力)与图 2 板外力各自外力的倒易功相等。

可以看出,图 1(e)已是一横向集中载荷作用的四边简支矩形板了;而图 2 仍是均载悬臂矩形板。在此两不同矩形板之间有各自外力的倒易功相等,这说明弯曲矩形板贝蒂的功的互等定理不具有同一性,或者说它具有非同一性。既然在不相同的两弯曲矩

形间有各自外力的倒易功相等,而贝蒂的功的互等定理限定两组外力必须作用于同一矩形板上便具有局限性了。

用相同的方法可以说明,对于一般的线性弹性体,贝蒂的功的互等定理也具有非同一性和局限性。

贝蒂的功的互等定理的非同一性和局限性,是由于两组独立的外力都有可能改变同一弹性体的固有位移边界条件,而使其成为两个位移边界条件不相同的弹性体。我们称这种现象为两组独立的外力与同一弹性体的固有位移边界条件具有排斥性,即贝蒂的功的互等定理的非同一性和局限性是由于两组独立的外力与同一弹性体的固有位移边界条件具有排斥性所致。

此外,即便是不考虑非同一性和局限性这两个问题,贝蒂的功的互等定理命题的陈述也过于简单,没有涵盖同一弹性体在两组外力作用下处于真实状态这一重要前提条件,尽管在说明贝蒂定理的过程中用到了这一前提。所谓真实状态,是指一弹性体在外力作用下满足弹性力学五大类方程的状态,即综合满足平衡方程、静力边界条件、应变—位移关系、位移边界条件和胡克定律的状态。

基于对贝蒂的功的互等定理的非同一性和局限性的分析以及弹性体在外力作用下处于真实状态,则可给出修正的功的互等定理的命题为:对于不相同的两个小变形线性弹性体,在各自外力作用下处于真实状态,则有第一弹性体的外力在第二弹性体相应位移上所做的功,等于第二弹性体的外力在第一弹性体相应位移上所做的功。或简述为:对于不相同的两个小变形线性弹性体,在各自外力作用下处于真实状态,则有各自外力的倒易功相等。

对于弯曲直梁,弯曲薄板和一般弹性体修正的功的互等定理的论述,将在相关章节中看到。

修正的功的互等定理赋予功的互等定理以正确的命题;以修正的功的互等定理为理论基础,建立了求解板壳力学和弹性力学某些问题的功的互等法,功的互等法的建立标志着开发出功的互等定理的新功能。