2007年全国各类成人高考

专科起点升本科

高等数学(二)应试模拟

本书编写组

高等教育出版社

2007年全国各类成人高考

专科起点升本科

高等数学(二)应试模拟

本书编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)应试模拟/《高等数学(二)应试模拟》编写组. —北京:高等教育出版社,2007.3

2007年全国各类成人高考. 专科起点升本科

ISBN 978-7-04-021365-2

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-习题-升学参考资料 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第029960号

策划编辑 田晓兰　**责任编辑** 雷旭波　**封面设计** 张志奇
责任校对 朱惠芳　**责任印制** 尤　静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京四季青印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　本	787×1092　1/8	**版　次**	2007年3月第1版
印　张	13.5	**印　次**	2007年3月第1次印刷
字　数	320 000	**定　价**	22.00元

物料号　21365-00

出版前言

2006年末，教育部高校学生司和教育部考试中心重新组织修订了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)》，为了满足广大考生复习备考的需求，我们及时对政治、英语、教育理论、大学语文、艺术概论、民法、高等数学(一)、高等数学(二)、生态学基础、医学综合十门课程的复习考试辅导教材做了修订。

本套书是与辅导教材配套的复习备考强化冲刺阶段用书。书中的模拟试卷严格按照2007年版考试大纲中规定的试卷内容比例、试卷题型比例、试卷难易比例，在2006年版的基础上做了增删补改，并按考试科目独立编写成册，每册包含10套左右试卷，根据不同科目的特点，编写了"解题指导"等内容。同时，应广大考生的要求，我们将近5年的考题进行详细解析，附于书后。

本套书的作者为"专升本"复习辅导教材的原班人马，对成人高考的教学与辅导均有深入研究，对成人高考的命题思路也多有了解。本套书将会对各类成人高考"专升本"考生检验自己的复习效果，进行考前"实战演练"提供更多帮助。

高等教育出版社

2007.2

目录

模拟试卷(一)

一、选择题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 当 $x\to2$ 时,下列函数中不是无穷小量的是(　　).

A. x^3-8　　B. $\sin(x^2-4)$　　C. e^{x-2}　　D. $\ln(3-x)$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-4, & x\geqslant1,\\ x^2-1, & 0<x<1,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 等于(　　).

A. -3　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

3. 设函数 $f(x)=x^3+e^3+3^x$,则 $f'(x)$ 等于(　　).

A. $3x^2+3^x\ln3$　　B. $3x^2+3e^2+x\cdot3^{x-1}$

C. $\frac{1}{4}x^4+3+3^x\ln x$　　D. $\frac{1}{2}x^2+e^3+3^x$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且 $f(x)=e^{-2x}+3\lim\limits_{x\to0}f(x)$,则 $f'(x)$ 等于(　　).

A. $-2e^{-2x}+3$　　B. $\frac{-1}{2}e^{-2x}$　　C. $-e^{-2x}$　　D. $-2e^{-2x}$

5. 设函数 $f(x)=x^3$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 等于(　　).

A. 0　　B. $2x^3$　　C. $6x^2$　　D. $3x^2$

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^{-x},则 $f(x)$ 等于(　　).

A. $1-e^{-x}$　　B. $(1-x)e^{-x}$　　C. $(x-1)e^{-x}$　　D. $(x+1)e^{-x}$

7. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的切线斜率为 $\frac{1}{x^2}$,则该曲线过点 $(1,0)$ 的方程为(　　).

A. $y=-\frac{1}{x}-1$　　B. $y=-\frac{1}{x}-2$　　C. $y=-\frac{1}{x}+1$　　D. $y=-\frac{1}{x}+2$

8. 若 $\int_0^4 f(x)\,dx=\sin2$,则 $\int_0^2 xf(x^2)\,dx$ 等于(　　).

A. $\sin2$　　B. $2\sin2$　　C. $\frac{1}{2}\sin2$　　D. $\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}$

9. 设函数 $z=\sin(xy^2)$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 等于(　　).

A. $y^4\cos(xy^2)$　　B. $-y^4\cos(xy^2)$　　C. $y^4\sin(xy^2)$　　D. $-y^4\sin(xy^2)$

10. 设 100 件产品中有次品 4 件,从中任取 5 件的不可能事件是(　　).

A. "5 件都是正品"　　B. "5 件都是次品"

C. "至少有一件是次品"　　D. "至少有一件是正品"

二、填空题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分. 把答案填在题中的横线上.

11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+x-2}{x-1}=$ ________.

12. 设 $y=\sqrt{2x-x^2}$,则 $dy=$ ________.

13. 设 $y=1+\cos2x$,则 $y'=$ ________.

14. 设 $y=(1+x)\ln(1+x)$,则 $y''\big|_{x=0}=$ ________.

15. 若 $x=1$ 是函数 $y=x^3-ax^2$ 的一个极值点,则 $a=$ ________.

16. $\int(2x+1)^3\,dx=$ ________.

17. 设 $I=\int_1^9\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$,若用 $\sqrt{x}=t$ 换成对 t 的积分再求解,可解得 $I=$ ________.

18. 若 $f(x)=e^{-x}$,则 $\int_0^1 f'(2x)\,dx=$ ________.

19. 设 $z=\tan(xy-x^2)$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

20. 已知 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$,则 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=$ ________.

三、解答题:本大题共 8 个小题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分) 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-x}$.

22. (本题满分 8 分) 设 $y=x^2\cdot e^x$,求 y'.

23.（本题满分 8 分）计算 $\int \frac{x}{1+x^4}dx$.

24.（本题满分 8 分）已知 $f(1)=0$，且 $\int_0^1 xf(x)dx=2$，求 $\int_0^1 x^2f'(x)dx$.

25.（本题满分 8 分）设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，求 $P(A+B)$.

26.（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5，其导函数 $y=f'(x)$ 的图像经过点 $(1,0)$ 和 $(2,0)$（如图 1－1 所示）.

（1）根据导函数 $f'(x)$ 的图像写出函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求极值点 x_0 的值；

（3）求 a,b,c 的值.

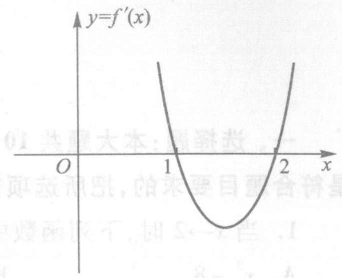

图 1－1

27.（本题满分 10 分）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z-xy^2+\sin(y+z)=0$ 确定，求 dz.

28.（本题满分 10 分）求由曲线 $y=2-x^2$，$y=2x-1$ 及 $x\geqslant 0$ 围成的平面图形的面积 S 以及此平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x.

模拟试卷(一)参考答案及解题指导

一、选择题

1. **答** 应选 C.

分析 根据无穷小量的定义:若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则当$x\to x_0$时,$f(x)$为无穷小量. 因此可根据定义计算其极限值,知选 C.

2. **答** 应选 D.

分析 本题考查的知识点是分段函数在分段点处的极限计算. 分段点处的极限一定要分别计算其左、右极限后,再进行判定.

因为
$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+2x-4)=-1,$$
$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2-1)=0,$$
由于$f(1-0)\neq f(1+0)$,所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在. 故选 D.

3. **答** 应选 A.

提示 本题考查的知识点是基本初等函数的导数公式. 只需注意 e^3 是常数即可.

4. **答** 应选 D.

分析 本题考查的知识点是:$\lim\limits_{x\to0}f(x)$是定值,其导数应为零.

5. **答** 应选 C.

分析 本题考查的知识点是函数在任意一点 x 的导数定义. 注意到导数定义的结构式为
$$\lim_{\Box\to0}\frac{f(x+\Box)-f(x)}{\Box}=f'(x),$$
则
$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{2\Delta x}\cdot2$$
$$=2f'(x)\xlongequal{f(x)=x^3}6x^2,$$
所以选 C.

6. **答** 应选 B.

提示 本题考查的是原函数的概念,因此有
$$f(x)=(xe^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}$$
$$=e^{-x}(1-x),$$
所以选 B.

7. **答** 应选 C.

分析 本题考查的知识点是:函数在点 x 处导数的几何意义是表示该函数所表示的曲线过点 x 的切线的斜率. 可利用积分求出过点(1,0)的曲线方程,即由
$$y'=f'(x)=\frac{1}{x^2},\text{得 }y=-\frac{1}{x}+C.$$
曲线过点(1,0),即$0=-1+C$,得$C=1$. 所以选 C.

注意到曲线过点(1,0),所以直接将$x=1,y=0$代入所选的曲线方程,只有选项 C 成立.

8. **答** 应选 C.

分析 本题考查的知识点是定积分的概念和定积分的换元积分法. 换元时积分的上、下限一定要一起换.

因为$\int_0^4 f(x)\,dx=\sin2$更广义的理解应为$\int_0^4 f(u)\,du=\sin2$,

所以
$$\int_0^2 xf(x^2)\,dx=\frac12\int_0^2 f(x^2)\,d(x^2)$$
$$\xlongequal{x^2=u}\frac12\int_0^4 f(u)\,du$$
$$=\frac12\sin2,$$
所以选 C.

9. **答** 应选 D.

提示 z 对 x 求偏导时应将 y 视为常数,则有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy^2)\cdot y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\sin(xy^2)\cdot y^2=-y^4\sin(xy^2),$$
所以选 D.

10. **答** 应选 B.

分析 本题考查的知识点是不可能事件的概念. 不可能事件是指在一次试验中不可能发生的事件. 由于只有 4 件次品,一次取出 5 件都是次品是根本不可能的. 所以选 B.

二、填空题

11. **答** 应填 2.

分析 计算极限时一定要注意极限的不同类型,当$x\to0$时,本题不是“$\frac{0}{0}$”型,所以直接利用极限的四则运算法则计算即可. 但当$x\to1$时,本题是“$\frac{0}{0}$”型,可用因式分解消去零因式等方法求解.

12. **答** 应填$\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.

提示 求函数的微分常用的方法有两种:一种是先求出 y',再写出 $dy=y'dx$;另一种方法就是对等式两边直接求微分. 读者应选择自己熟悉的方法解题. 请注意:若填$\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$不给分!

13. **答** 应填$-2\sin2x$.

提示 用复合函数求导公式计算即可.
$$y'=-\sin2x\cdot(2x)'=-2\sin2x.$$

14. **答** 应填 1.

提示 先求 y',再求 y'',然后将 $x=0$ 代入 y''即可.

因为

$$y'=\ln(1+x)+1,$$

$$y''=\frac{1}{1+x},$$

所以

$$y''\Big|_{x=0}=1.$$

15. **答** 应填$\frac{3}{2}$.

分析 本题考查的知识点是极值的必要条件:若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点,且 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则必有 $f'(x_0)=0$.

因此有 $y'\Big|_{x=1}=(3x^2-2ax)\Big|_{x=1}=0$,得 $a=\frac{3}{2}$.

16. **答** 应填$\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$.

提示 凑微分后用积分公式.

17. **答** 应填 $2\ln 2$.

分析 本题考查的知识点是定积分的换元积分法. 换元时,积分的上、下限一定要一起换.

令$\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

当 $x=1$ 时,$t=1$;$x=9$ 时,$t=3$. 所以

$$\int_1^9\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=\int_1^3\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+t}=2\int_1^3\frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$

$$=2\ln(t+1)\Big|_1^3=2\ln 2.$$

18. **答** 应填$\frac{1}{2}(e^{-2}-1)$.

分析 本题考查的知识点是积分变量的概念、定积分的性质及定积分的计算.

因为

$$f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x),$$

则有

$$f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\mathrm{d}f(2x),$$

所以

$$\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}(2x)$$

$$=\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}[f(2)-f(0)]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-2}-1).$$

注意 若将 $\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}(2x)$ 换成新的变量 $u=2x$,则积分的上、下限也要一起换成新变量 u 的上、下限,即

$$\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\int_0^2 f'(u)\mathrm{d}u.$$

本题也可求出 $f'(x)=-e^{-x}$,则 $f'(2x)=-e^{-2x}$,再代入所求式子中,有

$$\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 e^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^{-2}-1).$$

19. **答** 应填$\frac{y-2x}{\cos^2(xy-x^2)}$.

提示 z 对 x 求偏导时应视 y 为常数,并用一元函数求导公式计算.

20. **答** 应填 1.

分析 本题考查的知识点是二元函数的概念及二阶偏导数的求法.

多元函数对应法则的概念与一元函数对应法则的概念是一样的. 对于二元函数 $z=f(x,y)$,我们常称 x 为第一个变量,y 为第二个变量. 一定要注意:x 与 y 的位置在一般情况下是不能交换的,即 $f(x,y)\neq f(y,x)$. 例如

$$z=f(x,y)=x^3y+xy^2+x-2y,$$

而 $z=f(y,x)$ 为

$$f(y,x)=y^3x+yx^2+y-2x,$$

显然

$$f(x,y)\neq f(y,x).$$

本题中的第一个变量 $u=x+y$,第二个变量 $v=x-y$,可以先解出 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$,再代入函数式. 但此方法较繁,我们可用配变量的办法求解.

因为

$$f(x+y,x-y)=x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$

所以

$$f(x,y)=xy,$$

则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(y)=1.$$

三、解答题

21. 本题考查的知识点是"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式极限的求法.

分析 "$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式极限的一般求法是提取分子与分母中的最高次因子,也可用洛必达法则求解.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

22. 本题考查的知识点是函数乘积的导数计算.

解

$$y'=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x.$$

23. 本题考查的知识点是凑微分积分法.

解

$$\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(x^2)^2}\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x^2+C.$$

24. 本题考查的知识点是微分的概念、定积分的分部积分法.

分析 本题的关键是利用微分的概念将$f'(x)\mathrm{d}x$写成$\mathrm{d}f(x)$,然后再分部积分,利用已知条件即可得到所求的结果.

考生一定要注意:如果被积函数是$x^kf'(x)$或$x^kf''(x)\ (k\geqslant 1)$的形式,应优先考虑用分部积分法.

例如:设$f(x)$的一个原函数是$\ln^2 x$,求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$,$\int x^2f''(x)\mathrm{d}x$,$\int_1^e xf'(x)\mathrm{d}x$,等等.

解 因为
$$f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x),$$
则
$$\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}f(x)$$
$$=x^2f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$$
$$=-4.$$

25. 本题考查事件相互独立的概念及加法公式.

提示 若事件A与B相互独立,则$P(AB)=P(A)P(B)$.

解
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0.6+0.7-0.6\times 0.7$$
$$=0.88.$$

26. 本题考查的知识点是利用导数的图像来判定函数的单调区间和极值点,并以此确定函数的表达式.编者希望通过本题达到培养考生数形结合的能力.

解 (1) 函数的单调性是由导函数的正、负来确定的.根据题目所给的导数图像,可知x轴上方的$f'(x)>0$,而x轴下方的$f'(x)<0$,所以函数$f(x)$的单调增加区间为$(-\infty,1)$与$(2,+\infty)$,而在$(1,2)$内$f(x)$是单调减少的.

(2) 在$x=1$处$f'(1)=0$,且$x<1$时,$f'(x)>0$;$1<x<2$时,$f'(x)<0$,可知$x=1$是极大值点,即$x_0=1$.

(3) 因为
$$f'(1)=3a+2b+c=0,$$
$$f'(2)=12a+4b+c=0\quad (x=2\text{时}f'(2)=0),$$
$$f(1)=a+b+c=5,$$
由上面三式解得$a=2,b=-9,c=12$.

27. 本题考查的知识点是二元隐函数全微分的求法.

分析 求二元隐函数全微分的关键是先求出偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$,然后代入公式$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.而求$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$的方法主要有:直接求导法和公式法.

在用直接求导法时考生一定要注意:等式$e^z-xy^2+\sin(y+z)=0$中的z是x,y的函数,对x(或y)求导时,式子$z=z(x,y)$中y(或x)应视为常数,最后解出$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\text{或}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

利用公式法求导的关键是需构造辅助函数
$$F(x,y,z)=e^z-xy^2+\sin(y+z),$$
然后将等式两边分别对x(或y或z)求导.读者一定要注意:对x求导时,y,z均视为常数,而对y或z求导时,另外两个变量同样也视为常数.也即用公式法时,辅助函数$F(x,y,z)$中的三个变量均视为自变量.

在用公式法时最容易犯的错误是设$F(x,y,z)=e^z-xy^2+\sin(y+z)=0$.如果写成$F(x,y,z)=0$,则必有$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\frac{\partial F}{\partial y}=0,\frac{\partial F}{\partial z}=0$.这显然是错误的,其错误原因是写成$F(x,y,z)=0$的形式时,此时的$z$不是自变量而是$z=z(x,y)$.

根据辅助函数$F(x,y,z)$,用复合函数求偏导而得到公式$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$,公式中的$\frac{\partial F}{\partial z}$是将$x,y$视为常数时$F(x,y,z)$对$z$的偏导数.

求全微分的第三种解法是直接对等式两边求微分,最后解出$\mathrm{d}z$,这种方法也十分简捷有效,建议考生能熟练掌握.

解法一 等式两边对x求导得
$$e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y^2+\cos(y+z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$
所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{e^z+\cos(y+z)}.$$

等式两边对y求导得
$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}-2xy+\cos(y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$
所以
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy-\cos(y+z)}{e^z+\cos(y+z)},$$
则有
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{y^2}{e^z+\cos(y+z)}\mathrm{d}x+\frac{2xy-\cos(y+z)}{e^z+\cos(y+z)}\mathrm{d}y.$$

解法二 设$F(x,y,z)=e^z-xy^2+\sin(y+z)$,

则
$$\frac{\partial F}{\partial x}=-y^2,\frac{\partial F}{\partial y}=-2xy+\cos(y+z),\frac{\partial F}{\partial z}=e^z+\cos(y+z),$$
所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{y^2}{e^z+\cos(y+z)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{2xy-\cos(y+z)}{e^z+\cos(y+z)},$$
则有
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{y^2}{e^z+\cos(y+z)}\mathrm{d}x+\frac{2xy-\cos(y+z)}{e^z+\cos(y+z)}\mathrm{d}y.$$

解法三 对等式$e^z-xy^2+\sin(y+z)=0$求微分得

$$d\,e^z - d(xy^2) + d\sin(y+z) = 0,$$

$$e^z dz - y^2dx - 2xydy + \cos(y+z)(dy+dz) = 0,$$

$$[e^z + \cos(y+z)]dz = y^2dx + [2xy - \cos(y+z)]dy,$$

所以
$$dz = \frac{y^2}{e^z+\cos(y+z)}dx + \frac{2xy-\cos(y+z)}{e^z+\cos(y+z)}dy.$$

28. 本题考查的知识点有平面图形面积的计算及旋转体体积的计算.

分析 本题的难点是根据所给的已知曲线画出封闭的平面图形，然后再求其面积 S. 求面积的关键是确定对 x 积分还是对 y 积分.

确定平面图形的最简单方法是：题中给的曲线是三条，则该平面图形的边界也必须是三条，多一条或少一条都不是题中所要求的.

确定对 x 积分还是对 y 积分的一般原则是：尽可能用一个定积分而不是几个定积分之和来表示. 本题如改为对 y 积分，则有

$$S = \int_{-1}^{1}\frac{1+y}{2}dy + \int_{1}^{2}\sqrt{2-y}\,dy,$$

计算量显然比对 x 积分的计算量要大，所以选择积分变量的次序是能否快而准地求出积分的关键.

在求旋转体的体积时，一定要注意题目中的旋转轴是 x 轴还是 y 轴.

由于本题在 x 轴下面的图形绕 x 轴旋转成的体积与 x 轴上面的图形绕 x 轴旋转的旋转体的体积重合了，所以只要计算 x 轴上面的图形绕 x 轴旋转的旋转体体积即可. 如果将旋转体的体积写成

$$V_x = \pi\int_0^1(2-x^2)^2dx - \pi\int_0^1(2x-1)^2dx,$$

则有
$$V_x = \pi\int_0^1(x^4-8x^2+4x+3)dx$$
$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{38}{15}\pi,$$

两者之差为 $\frac{27}{10}\pi - \frac{38}{15}\pi = \frac{1}{6}\pi$，恰为 x 轴下面的三角形图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积 $\frac{1}{6}\pi$.

上面的这种错误是考生比较容易出现的，所以审题时一定要注意.

解 由已知曲线画出平面图形如图 1-2 所示的阴影区域.

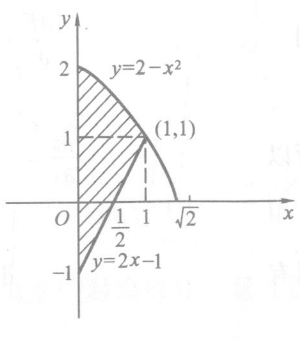

图 1-2

由 $\begin{cases} y = 2-x^2, \\ y = 2x-1, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 得交点坐标为 $(1,1)$，则

$$S = \int_0^1[(2-x^2)-(2x-1)]dx$$
$$= \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^1$$
$$= 3 - \frac{1}{3} - 1$$
$$= \frac{5}{3},$$

$$V_x = \pi\int_0^1(2-x^2)^2dx - \pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)^2dx$$
$$= \pi\int_0^1(x^4-4x^2+4)dx - \pi\int_{\frac{1}{2}}^1(4x^2-4x+1)dx$$
$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_0^1 - \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1$$
$$= \frac{27}{10}\pi.$$

模拟试卷(二)

一、选择题:本大题共10个小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设$f(x)=x^3+3x-\lim\limits_{x\to1}f(x)$,则$f(x)$等于(　　).

A. x^3+3x-4　　B. x^3+3x-3　　C. x^3+3x-2　　D. x^3+3x-1

2. 已知a为常数,$f(x)=2^a$,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$等于(　　).

A. 2^h　　B. $a\cdot2^{a-1}$　　C. $2^a\ln2$　　D. 0

3. 已知$y=2^x+x^2+e^2$,则y'等于(　　).

A. 2^x+2x+e^2　　B. $2^x\ln x+2x+2e$

C. $2^x\ln2+2x$　　D. $x\cdot2^{x-1}+2x$

4. 已知$f(x)=x+\ln x$,$g(x)=e^x$,则$\dfrac{d}{dx}f[g(x)]$等于(　　).

A. $1+\dfrac{1}{e^x}$　　B. $1+e^x$　　C. $e^x+\dfrac{1}{e^x}$　　D. $e^x-\dfrac{1}{e^x}$

5. 已知$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$,则$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$等于(　　).

A. $\dfrac{\sqrt3}{4}$　　B. $\dfrac14$　　C. $\dfrac12$　　D. $\sqrt3$

6. 设$f(x)$的一个原函数为$x\ln(x+1)$,则下列等式成立的是(　　).

A. $\int f(x)dx=x\ln(x+1)+C$　　B. $\int f(x)dx=[x\ln(x+1)]'+C$

C. $\int x\ln(x+1)dx=f(x)+C$　　D. $\int[x\ln(x+1)]'dx=f(x)+C$

7. 设$f(x)$为连续函数,则$\int_0^1 f'\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$等于(　　).

A. $f\left(\dfrac12\right)-f(0)$　　B. $2\left[f\left(\dfrac12\right)-f(0)\right]$

C. $\dfrac12\left[f\left(\dfrac12\right)-f(0)\right]$　　D. $f(2)-f(0)$

8. 广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx$等于(　　).

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}f(u)du$　　B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(u)du$　　C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}f(u)du$　　D. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}f(u)du$

9. 设$z=e^{xy}$,则$\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$等于(　　).

A. $(1+xy)e^{xy}$　　B. $x(1+y)e^{xy}$　　C. $y(1+x)e^{xy}$　　D. xye^{xy}

10. 若事件A与B为互斥事件,且$P(A)=0.3$,$P(A+B)=0.8$,则$P(B)$等于(　　).

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.5　　D. 0.6

二、填空题:本大题共10个小题,每小题4分,共40分.把答案填在题中的横线上.

11. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{kx}=e^{-4}$,则$k=$________.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4x}-x}{\sqrt{4x^2+x}}=$________.

13. 设$y=\ln(a^2+x^2)$,则$dy=$________.

14. 函数$y=x-\ln(1+x)$的驻点为$x=$________.

15. 设$f(\sqrt{x})=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,则$f''(x)\Big|_{x=1}=$________.

16. $\int x\,d\cos x=$________.

17. 设$f(x)=\int_0^x\arctan\sqrt{t}\,dt\quad(x>0)$,则$f'(1)=$________.

18. 若$\int_{-a}^{a}(x^4\sin x+x^2)dx=\dfrac23$,则$a=$________.

19. 已知$z=x^y$,则$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=$________.

20. 已知$z=f(xy,x^2)$,且$\dfrac{\partial f}{\partial u}$,$\dfrac{\partial f}{\partial v}$都存在,则$dz=$________.

三、解答题:本大题共8个小题,共70分.解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分8分)计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

22. (本题满分8分)设函数$y=\dfrac{e^x}{\sin x}$,求dy.

23.（本题满分 8 分）计算 $\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

24.（本题满分 8 分）甲、乙二人单独译出某密码的概率分别为 0.6 和 0.8，求此密码被破译的概率.

25.（本题满分 8 分）计算 $\int_1^e \frac{x+\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$.

26.（本题满分 10 分）设函数 $y=ax^3+bx+c$ 在点 $x=1$ 处取得极小值 -1，且点 $(0,1)$ 为该函数曲线的拐点，试求常数 a,b,c.

27.（本题满分 10 分）设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\cos(xy)=x+y$ 所确定的隐函数，求函数曲线 $y=y(x)$ 过点 $(0,1)$ 的切线方程.

28.（本题满分 10 分）求函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在条件 $2x+y=5$ 下的极值.

模拟试卷(二)参考答案及解题指导

一、选择题

1. **答** 应选 C.

分析 本题考查的知识点是函数极限存在的概念. 函数在某一点的极限存在,其极限值必为常数. 本题的关键是设$\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$,继而求出 A 值即可.

设$\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$,则 $f(x)=x^3+3x-A$.

对等式两边取极限:
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3+3x-A),$$

即
$$A=4-A,\text{得 }A=2,$$

所以 $f(x)=x^3+3x-2$,选 C.

如果注意到$f(x)$是基本初等函数,在定义区间内是连续的,则$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$,因此$f(x)=x^3+3x-f(1)$,只需将 $x=1$ 代入式中即可得$f(1)=1+3-f(1)$,所以$f(1)=2$,可知选项 C 是正确的.

2. **答** 应选 D.

提示 利用函数在一点可导的定义的结构式可知
$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

注意到本题中$f(x)=2^a$ 是常数函数,所以$f'(x)=0$,所以选 D.

3. **答** 应选 C.

提示 用基本初等函数的导数公式.

4. **答** 应选 B.

分析 本题考查的知识点是复合函数的概念及其求导计算.

本题的关键是正确写出复合函数$f[g(x)]$的表达式后再对 x 求导.

根据函数概念可知:
$$f[g(x)]=g(x)+\ln g(x)=e^x+\ln e^x=e^x+x,$$

所以$\frac{d}{dx}f[g(x)]=e^x+1$,所以选 B.

5. **答** 应选 A.

提示 先用复合函数求导公式计算出$f'(x)$,再将 $x=\frac{\pi}{3}$代入.

因为 $f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$,所以 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 选 A.

6. **答** 应选 A.

分析 本题考查的知识点是原函数的概念.

由$f(x)$的一个原函数为 $x\ln(x+1)$,可得
$$\int f(x)\,dx=x\ln(x+1)+C,$$

所以选 A.

7. **答** 应选 B.

分析 本题考查考生对微分、积分的基础知识和换元积分法的掌握情况.

本题的关键之处是对$f'\left(\frac{x}{2}\right)$的正确理解,函数$f(x)$对 x 求导时为$f'(x)$,而当函数为$f[u(x)]$的形式时,$f'(u)$表示对 u 的导数而不是对 x 的导数,而根据微分式 $df(x)=f'(x)dx$ 以及微分形式的不变性:$df(u)=f'(u)du$,其中 u 可以是自变量 x,也可以是 x 的函数 $u(x)$,所以 $f'\left(\frac{x}{2}\right)dx\neq df\left(\frac{x}{2}\right)$,将$f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ 写成 $df\left(\frac{x}{2}\right)$是最常见的错误. 根据前面的分析,有 $f'\left(\frac{x}{2}\right)d\frac{x}{2}=df\left(\frac{x}{2}\right)$,原式即为 $\int_0^1 f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_0^1 f'\left(\frac{x}{2}\right)d\frac{x}{2}=2\int_0^1 df\left(\frac{x}{2}\right)=2f\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right]$,所以选 B.

如果用换元法,令$\frac{x}{2}=t$,则 $f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2f'(t)dt=2df(t)$,注意到积分的上、下限应跟着一起换,则有
$$\begin{aligned}\int_0^1 f'\left(\frac{x}{2}\right)dx&=2\int_0^{\frac{1}{2}}f'(t)dt\\&=2f(t)\Big|_0^{\frac{1}{2}}\\&=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right],\end{aligned}$$

所以选 B.

请考生注意:由于这种题考查的都是基本概念和基本方法,所以是历年"专升本"考试中常见的典型试题,熟练地掌握这类题的解法是十分重要的.

8. **答** 应选 B.

提示 本题考查的知识点是广义积分在换元时,其积分限也应一起换.

设 $u=\arctan x$,则 $x=1$ 时,$u=\frac{\pi}{4}$;$x\to+\infty$ 时,$u=\frac{\pi}{2}$,所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx=\int_1^{+\infty}f(\arctan x)\,d\arctan x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(u)\,du,$$

选 B.

9. **答** 应选 A.

提示 先求$\frac{\partial z}{\partial x}\left(或\frac{\partial z}{\partial y}\right)$,再求$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$,$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^{xy}+xye^{xy}$,所以选 A.

10. **答** 应选 C.

分析 本题考查的知识点是互斥事件的概念和加法公式.

事件 A 与 B 互斥是指 $AB=\varnothing$,因此 $P(AB)=0$.

由于
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$
即 $0.8=0.3+P(B)$,得 $P(B)=0.5$. 故选 C.

二、填空题

11. **答** 应填 -2.

提示 利用重要极限Ⅱ的结构式:

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e \quad 或 \quad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e.$$

由已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{kx}=e^{-4}$,可得 $2k=-4$,所以 $k=-2$.

12. **答** 应填 0.

分析 本题考查的知识点是极限的计算. 由于分子是"$\infty-\infty$",应首先有理化,再消去"∞"因子. 本题若直接用洛必达法则求解反而比较麻烦.

因为
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}-x}{\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{4x^2+x}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}\cdot x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}$$
$$=0.$$

本题也可以直接消去"∞"因子:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}-x}{\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1\right)}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=0.$$

13. **答** 应填$\frac{2x}{a^2+x^2}dx$.

提示 先求复合函数的导数,再求 dy.

因为
$$y'=\frac{2x}{a^2+x^2},$$
所以
$$dy=\frac{2x}{a^2+x^2}dx.$$

14. **答** 应填 0.

分析 本题考查的知识点是驻点的概念及求法.

根据定义,使 $f'(x)=0$ 的 x 称为函数 $f(x)$ 的驻点,因此有 $y'=1-\frac{1}{1+x}=0$,得 $x=0$.

故填 0.

15. **答** 应填 4.

分析 本题考查的知识点是由复合函数 $f[u(x)]$ 的表达式求 $f(x)$ 的表达式,然后再求 $f''(x)$.

这类题目的一般解法是先将复合函数 $f(\sqrt{x})$ 用变量代换 $u=\sqrt{x}$ 得到 $f(u)$ 的表达式,再写出 $f(x)$ 的表达式. 另一种方法是直接用复合函数求导公式计算,然后再换元.

因为 $f(\sqrt{x})=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$,用 x^2 换式中的 x 得 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$,

则 $f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$,$f''(x)=2+\frac{2}{x^3}$,则 $f''(x)\Big|_{x=1}=4$,故填 4.

由于这种题涉及的知识点比较多,解法也不唯一,所以这种题也是历年考试中常见的试题之一.

例如 1999 年第 8 题:设函数$f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x}+1$,则 $f'(x)=$________.

2001 年第 9 题:设函数 $f(\sqrt{x})=\sin x$,则 $f'(x)=$________.

2002 年第 11 题:设函数 $f(2x)=\ln x$,则 $f'(x)=$________.

2003 年第 23 题:设函数 $f(x)=e^x$,$g(x)=\sin x$,且 $y=f[g'(x)]$,求$\frac{dy}{dx}$.

2004 年第 20 题:设函数 $f(\cos x)=1+\cos^3 x$,求 $f'(x)$.

建议考生熟练掌握这类题的求解方法,必有收益.

16. **答** 应填 $x\cos x-\sin x+C$.

提示 用分部积分法积分.

$$\int x\,d\cos x=x\cos x-\int\cos x\,dx$$
$$=x\cos x-\sin x+C.$$

17. **答** 应填$\frac{\pi}{4}$.

分析 本题考查的知识点是求变上限积分的导数值. 其关键是先求 $f'(x)$,再将 $x=1$ 代入 $f'(x)$.

因为
$$f'(x)=\arctan\sqrt{x},$$

所以

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}.$$

18. **答** 应填1.

提示 被积函数的前一部分是奇函数,后一部分是偶函数,因此有

$$\int_{-a}^{a}(x^4\sin x+x^2)\,dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^3=\frac{2}{3},$$

解得 $a=1$.

19. **答** 应填0.

提示 本题的关键是对 y 求偏导时应用指数函数求导公式,即$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$,所以$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=0$.

20. **答** 应填 $\left(y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right)dx+x\frac{\partial f}{\partial u}dy$.

分析 本题考查的知识点是复合函数求偏导和全微分的计算公式.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x,$$

所以

$$dz=\left(y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right)dx+x\frac{\partial f}{\partial u}dy.$$

三、解答题

21. 本题考查的知识点是“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的求法.

分析 “$\frac{0}{0}$”型不定式极限应优先考虑用等价无穷小量代换,然后再用洛必达法则或其他方法计算.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}\xlongequal{\text{重要极限}}\frac{1}{2}.$$

如果考生知道,当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,则分子用等价无穷小量代换立即可得到结果. 所以掌握常用的等价无穷小量代换是求“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的简捷方法.

22. 本题主要考查商的导数及复合函数求导的计算.

提示 先求 y',再求 dy.

解 因为

$$y'=\frac{(e^x)'\cdot\sin x-e^x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x},$$

所以

$$dy=\frac{(\sin x-\cos x)e^x}{\sin^2 x}dx.$$

23. 本题考查的知识点是不定积分的积分公式及凑微分(即第一换元积分法)的积分方法.

分析 当被积函数的分母为一项而分子为两项或两项以上的和时,通常分为几个不定积分之和分别计算.

如果被积函数的分子中有 $\sin x$(或 $\cos x$)的奇次方项时,常用凑微分法将 $\sin x dx$ 写成 $-d\cos x$,而 $\cos x dx=d\sin x$,换成对 $\cos x$ 或 $\sin x$ 的积分.

解

$$\int\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{1}{\cos^2 x}d\cos x$$

$$=\tan x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

24. 本题考查的知识点是事件相互独立的概念和概率的加法公式.

分析 本题的关键是密码被破译这一事件是指密码被甲破译或被乙破译,如果理解成甲破译密码且乙破译密码就错了! 另外要注意:甲、乙二人破译密码是相互独立的.

解 设 A=“甲破译密码”,B=“乙破译密码”,C=“密码被破译”,

则

$$C=A+B,$$

所以

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.6+0.8-0.6\times0.8$$

$$=0.92.$$

考生需要注意的是:如果题目改为求甲破译密码而乙未破译密码的概率,应为 $A\bar{B}$. 因为 A 与 $\bar{B}$ 也是相互独立的,则 $P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.6\times(1-0.8)=0.12$.

25. 本题考查的知识点是定积分的分部积分法.

提示 将被积函数分成两项,分别用公式法和分部积分法计算.

解

$$\int_1^e\frac{x+\ln x}{x^3}dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^3}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{x}\Big|_1^e+\int_1^e\ln x\,d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{e}-\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{2x^3}dx$$

$$=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4x^2}\Big|_1^e$$

$$=\frac{5}{4}-\frac{1}{e}-\frac{3}{4e^2}.$$

26. 本题考查的知识点是可导函数在某一点取得极小值的必要条件以及拐点的概念.

解 由 $y(1)=-1$ 得 $\quad a+b+c=-1.$ ①

由拐点 $y(0)=1$ 得 $\quad c=1.$ ②

函数在点 $x=1$ 处取得极值必有： $\quad y'\Big|_{x=1}=3a+b=0.$ ③

联立①②③，可解得 $\quad a=1,b=-3,c=1.$

27. 本题是一道典型的综合题，考查的知识点是隐函数的求导计算和切线方程的求法.

分析 本题的关键是由已知方程求出 y'，此时的 y' 中通常含有 x 和 y，因此需由原方程求出当 $x=0$ 时的 y 值，继而得到 y' 的值，再写出过点 $(0,1)$ 的切线方程.

计算由方程所确定的隐函数 $y(x)$ 的导数，通常有三种方法：直接求导法（此时方程中的 y 是 x 的函数）、公式法（隐函数的求导公式）和微分法（等式两边求微分）.

解法一 直接求导法. 等式两边对 x 求导，得

$$-\sin(xy)\cdot(y+xy')=1+y',$$

解得
$$y'=-\frac{1+y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}.$$

解法二 公式法. 设 $\quad F(x,y)=\cos(xy)-x-y,$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\sin(xy)\cdot y-1,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\sin(xy)\cdot x-1,$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{1+y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}.$$

解法三 微分法. 等式两边求微分，得

$$\mathrm{d}\cos(xy)=\mathrm{d}(x+y),$$
$$-\sin(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$
$$-[1+x\sin(xy)]\mathrm{d}y=[1+y\sin(xy)]\mathrm{d}x,$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1+y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}.$$

当 $x=0$ 时，由方程得 $\quad y=1$，则 $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$，所以过点 $(0,1)$ 的切线方程为

$$y-1=-(x-0),\text{即}\quad x+y-1=0.$$

28. 本题考查的知识点是条件极值的计算.

分析 计算条件极值的关键是构造拉格朗日函数. 在求驻点的过程中通常都将参数 λ 消去.

解 设 $\quad F(x,y,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2}+\lambda(2x+y-5)$，则令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2\lambda=0, & ①\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\lambda=0, & ②\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=2x+y-5=0. & ③\end{cases}$$

由①与②消去 λ 得 $\quad x=2y$，代入③得：

$$4y+y-5=0,$$

解得 $\quad y=1$，则 $x=2$，所以 $\quad z(2,1)=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ 为极值.

注意 不能用二元函数无条件极限的充分条件来判定 $\sqrt{5}$ 是极大值还是极小值. 但是根据极值是局部性质且只有一个驻点，因此可在约束条件 $2x+y=5$ 中任取另一点，如取点 $(1,3)$，则得 $z(1,3)=\sqrt{10}>\sqrt{5}$，从而可以判定 $\sqrt{5}$ 是极小值.（此方法不要求读者掌握.）

模拟试卷(三)

一、选择题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x(x-1)}, & x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{x+2}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的间断点是(　　).

A. $x=-2$　　B. $x=-1$　　C. $x=1$　　D. $x=0$

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 及其邻域内可导,且当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$,当 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0$,则必有 $f'(x_0)$(　　).

A. 小于 0　　B. 等于 0　　C. 大于 0　　D. 不确定

3. 设 $u(x)$, $v(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $u(0)=1$, $u'(0)=1$, $v(0)=2$, $v'(0)=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)v(x)-2}{x}$ 等于(　　).

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

4. 设函数 $f(x)=\sin(x^2)+e^{-2x}$,则 $f'(x)$ 等于(　　).

A. $\cos(x^2)+2e^{-2x}$　　B. $2x\cos(x^2)-2e^{-2x}$

C. $-2x\cos(x^2)-e^{-2x}$　　D. $2x\cos(x^2)+e^{-2x}$

5. 曲线 $y=x+e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是(　　).

A. 单调递增且是凹的　　B. 单调递增且是凸的

C. 单调递减且是凹的　　D. 单调递减且是凸的

6. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=xe^{-x}+C$,则 $\int\dfrac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).

A. $x\ln x+C$　　B. $-x\ln x+C$　　C. $\dfrac{1}{x}\ln x+C$　　D. $-\dfrac{1}{x}\ln x+C$

7. 设 $f'(\ln x)=1+x$,则 $f(x)$ 等于(　　).

A. $\ln x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$　　B. $x+\dfrac{x^2}{2}+C$　　C. $x+e^x+C$　　D. $e^x+\dfrac{e^{2x}}{2}+C$

8. 设 $f(x)$ 为连续的偶函数,且 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(-x)$ 等于(　　).

A. $F(x)$　　B. $-F(x)$　　C. 0　　D. $2F(x)$

9. 设函数 $z=f(x+y)+f(x-y)$,其中 f 为可导函数,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等于(　　).

A. $f'(x+y)+f'(x-y)$　　B. $f'(x+y)-f'(x-y)$

C. $2f'(x+y)$　　D. $2f'(x-y)$

10. 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则事件 A 和 B 的关系一定是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $A\supset B$

C. 对立事件　　D. 互不相容事件

二、填空题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分.把答案填在题中横线上.

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{2x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+3x}\right)^{\frac{1}{2x}}=$________.

13. 设函数 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+2^x+\ln 2$,则 $y'=$________.

14. 设函数 $y=\ln\cot x$,则 $\mathrm{d}y=$________.

15. 设函数 $y=x^5+e^{-2x}$,则 $y^{(10)}\big|_{x=0}=$________.

16. $\int\dfrac{1}{\cos^2(2x)}\mathrm{d}x=$________.

17. 设函数 $f(x)=\ln x$,则 $\int_1^2 f'(e^x)\mathrm{d}x=$________.

18. $\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=$________.

19. 设 $z=\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

20. 由曲线 $y=x$ 和 $y=x^2$ 围成的平面图形的面积 $S=$________.

三、解答题:本大题共 8 个小题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤.

21.(本题满分 8 分)设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-k}{x}\right)^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$,求 k 值.

22.(本题满分 8 分)设函数 $y=\sqrt{x^2+\ln^2 x}$,求 $y'\big|_{x=1}$.