全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

# 数学基础过关660题

经济类

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (JINGJILEI)

主编 李永乐

★ 完全按照新大纲编著

★ 权威解析精选试题

★ 全面评注各类题型

2008

新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

# 数学基础过关660题

经济类

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (JINGJILEI)

主编 李永乐

编者：（按姓氏笔画）

清 华 大 学 刘庆华

北 京 大 学 刘西垣

北 京 大 学 李正元

清 华 大 学 李永乐

北京交通大学 赵达夫

东北财经大学 龚兆仁

新华出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数学基础过关660题.经济类/李永乐主编
北京:新华出版社,2007.2
全国硕士研究生入学考试用书
ISBN 978-7-5011-7841-4

Ⅰ.数...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第164268号

## 敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

**数学基础过关660题(经济类)**

---

主　　编:李永乐
策　　划:白云覃
责任编辑:韩　刚
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:新华出版社
地　　址:北京石景山区京原路8号
邮　　编:100043
经　　销:新华书店
印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:21.375
字　　数:506千字
版　　次:2007年2月第1版
印　　次:2007年2月北京第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5011-7841-4
定　　价:30.00元

---

若有印装质量问题,请与印厂联系(010)82570560

# 前　言

2007 年考研数学试卷的结构又发生了变化，增加了选择题，减少了解答题。目前选择题 10 个，填空题 6 个，共 16 个题 64 分，占了数学总分的 42.6%。

需要提醒广大考生的是：对于往届考生的失误要引以为戒，一定要重视选择题、填空题的复习。例如，从教育部考试中心公布的统计结果来看：2006 年数学选择题难度系数 0.524，填空题难度系数 0.538。在选择题与填空题上正确率仅二分之一强，是不是丢分丢的有点太多了？

本次再版在题目选编上有较大的变动。一是增加了选择题的数量；二是对解答与评注进行了修订，以适应各种水平同学的需求。希望本书的修订再版能对同学们的复习备考有更大的帮助。对本书不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编　者

2007 年 2 月

# 目　　录

## 第一部分　选择题



## 第二部分　填空题

# 第一部分　选择题

微 积 分

线 性 代 数

概率论与数理统计

# ◇◇ 微积分 ◇◇

1. 设数列 $x_n$ 与 $y_n$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列叙述正确的是

(A) 若 $x_n$ 发散，则 $y_n$ 必发散.

(B) 若 $x_n$ 无界，则 $y_n$ 必有界.

(C) 若 $x_n$ 有界，则 $y_n$ 必为无穷小量.

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量，则 $y_n$ 必为无穷小量. [ ]

**【答案】** (D)

**【分析】** 举出反例，否定(A)(B)(C).

例如，$x_n=(-1)^n$ 发散，$y_n=0$ 收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 因此不选(A)

例如，$x_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ n, & n\text{ 为奇数,}\end{cases}$ $x_n$ 无界，

$y_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为偶数}\\ 0, & n\text{ 为奇数,}\end{cases}$ $y_n$ 也无界，

但 $\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$，因此不选(B)

例如，$x_n=0$ 数列 $x_n$ 有界，$y_n=(-1)^n$，数列 $y_n$ 不是无穷小量，但 $\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$，因此不选(C).

由排除法选(D).

事实上可以证明(D)成立.

$$\lim_{x\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=0.$$

2. 设 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定等于零.

(C) 不一定存在. (D) 一定不存在. [ ]

**【答案】** (C)

**【分析】** 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\neq0$，则由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a\neq0$，因此不选(A)(D).

取 $x_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n+1}$，$y_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$，

$z_n=(-1)^n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}\right)$，此时有 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,但当 $n \to \infty$ 时,$z_n$ 的极限不存在,因此选(C).

**【评注】** (1) 要注意夹逼定理的条件,当 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$时,才有$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 不一定有$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,当$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$(或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$)存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,才能有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. 设有数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ ,$\{z_n\}$ ,且$\{x_n\}$ 为无界数列,$\lim\limits_{x\to\infty} y_n = 0$ ,$\lim\limits_{x\to\infty} z_n = 1$ ,则必有

(A) $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

(C) 存在正整数 $N$,当 $n > N$,有 $x_n > y_n$.

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n z_n$ 不存在. [ ]

**【答案】** (D)

**【分析】** 举反例说明 (A),(B) ,(C) 都不成立。

例如,$x_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为奇数} \\ n & n\text{ 为偶数} \end{cases}$,$y_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为奇数} \\ \dfrac{1}{n} & n\text{ 为偶数} \end{cases}$,$x_n y_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为奇数} \\ 1 & n\text{ 为偶数} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \infty$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} y_{2n+1} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} y_{2n} = 1$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n \neq 0$,

$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$ 中的奇数项相等,因而(C) 不成立,由排除法,选(D).

**【评注】**如果数列$\{x_n\}$ 为无穷大量($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$),则数列$\{x_n\}$ 无界,但无界数列却不一定是无穷大量,上面分析中所列举$\{x_n\}$ 的是无界数列,但不是无穷大量.

4. 设对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+1) = -f(x)$,则 $f(x)$ 一定是

(A) 奇函数. (B) 偶函数.

(C) 周期函数. (D) 单调函数. [ ]

**【答案】** (C)

**【分析】** 由 $f(x+1) = -f(x)$ 得 $f(x+2) = f[(x+1)+1]$
$= -f(x+1) = -[-f(x)] = f(x)$. 所以 $f(x)$ 是周期函数.

事实上,由题设条件,显然 $f(x)$ 不是单调函数,取 $x = -\dfrac{1}{3}$,则

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -f\left(-\frac{1}{3}+1\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right),$$

由此得出 $f(x)$ 既不是奇函数,又不是偶函数,用排除法,选择(C).

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，符号 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数部分，则 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为

(A) $x \geqslant 1$.　　　　　　　　(B) $x < 1$.

(C) $x > 1$ 且 $x \neq 2,3,\cdots$.　　　　(D) $x < 1$ 且 $x \neq 0,-1,-2,\cdots$.　　[　]

**【答案】** (C)

**【分析】** 对于任何实数 $x$，总可以把它表示成为一个整数和一个非负小数之和，即 $x = [x] + (x)$，其中 $[x]$ 是整数，$(x)$ 是非负小数，$0 \leqslant (x) < 1$.

因为 $f(x)$ 是定义域是 $(0,1)$，因此 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域应为 $0 < \frac{[x]}{x} < 1$，因 $x = [x] + (x)$，所以有 $[x] = x - (x)$. 于是 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为 $0 < \frac{x-(x)}{x} < 1$ 亦即 $0 < \frac{(x)}{x} < 1$. 由 $\frac{[x]}{x}$ 可知 $x \neq 0$. 以下分两种情形讨论：

① 当 $x > 0$ 时.

要使 $\frac{(x)}{x} < 1$，须 $x \geqslant 1$，这是因为当 $0 < x < 1$ 时，$(x) = x$. 此时 $\frac{(x)}{x} = 1$. 不满足 $\frac{(x)}{x} < 1$.

要使 $\frac{(x)}{x} > 0$ 须使 $x \neq 1,2,3,\cdots$，这是因为当 $x > 0$. 且 $x = 1,2,3,\cdots$ 时 $(x) = 0$，此时 $\frac{(x)}{x} = 0$. 不能满足 $\frac{(x)}{x} > 0$.

因而当 $x > 0$ 时 $x$ 的取值应为 $x > 1$ 且 $x \neq 2,3,\cdots$.

② 当 $x < 0$ 时

因 $(x) \geqslant 0$，所以当 $x < 0$ 时 $\frac{(x)}{x} \leqslant 0$ 不能满足 $\frac{(x)}{x} > 0$.

综合 ①② 可得 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域是 $x > 1$ 且 $x \neq 2,3,\cdots$. 所以选(C).

6. 设 $f(x) = e^{x^2}$，$f[\varphi(x)] = 1 + x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，则 $\varphi(x)$ 在其定义域内是

(A) 有界函数.　　　　　　(B) 周期函数.

(C) 单调增加函数.　　　　(D) 单调减少函数.　　[　]

**【答案】** (C)

**【分析】** 由 $f(x) = e^{x^2}$ 得 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 + x$，又因 $\varphi(x) \geqslant 0$，所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1+x)}$，其定义域为 $x \geqslant 0$.

显然 $\varphi(x)$ 不是周期函数，排除(B).

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\ln(1+x)} = +\infty$，因此，$\varphi(x)$ 在其定义域内是无界的，所以不选(A).

由于 $\ln(1+x)$ 以及 $\sqrt{u}$ 是单调增加函数，所以 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 为单调增加函数，因此选(C)

不是选(D).

【评注】 也可用 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 的导数符号来判断 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 的单调性: $(\sqrt{\ln(1+x)})'=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}}\cdot\dfrac{1}{1+x}>0\quad(x\geqslant 0)$,所以 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 在其定义域内是单调增加的.

7. 下列极限正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$,因此选(B)

而　$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=0$,又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\sin x$ 是有界量,

因此　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

【评注】 在重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 中,要注意极限过程是 $x\to 0$.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A)(0,1).　　(B)(1,2).

(C)(2,3).　　(D)(3,4).　　[　　]

【答案】 (A)

【分析】 函数在 $x=1,x=2,x=3$ 处是间断的,而在其它处是连续的.在题目中所给的区间端点都含有间断点,只须考察以间断点为端点处的极限是否存在即可,因为如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 $x_0$ 的附近是有界的.

对于(A),$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的且

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)\tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}=-\frac{\tan(-2)}{(-1)(2)^2}=-\frac{1}{4}\tan 2$$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 左邻域内有界,从而 $f(x)$ 在(0,1)内有界,从而选(A).

【评注】 显然 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-1|(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}=\infty$

所以 $x=2,x=3$ 都是无穷间断点,因此 $f(x)$ 在(1,2),(2,3),(3,4)内都是无界的.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases} e^{f(\frac{1}{x})}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$ 则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的可去间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 的连续性与 $a$ 的取值有关. [　　]

**【答案】** (A)

**【分析】** 因 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{f(\frac{1}{x})}$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to\infty}e^{f(t)}=e^{a}.$$

这表明 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 存在，但无论 $a$ 取何值 $e^{a}>0$，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq g(0)=0$，因此 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点，所以选(A).

**【评注】** 间断点一般分两类：设 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在，则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 中至少有一个不存在，则称 $x_0$ 为第二类间断点．在第一类间断点中，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，称 $x_0$ 为可去间断点，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称 $x_0$ 为跳跃间断点．而在第二类间断点中，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称 $x_0$ 为无穷间断点．

在 03 年、04 年经济类的考研题中都涉及到间断点的分类，读者应熟悉这部分内容．

10. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+\dfrac{e^{a|x|}-1}{x}, & x\neq 0, \\ b, & x=0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则必须

(A) $a=1,b=-1$.　　(B) $a=-1,b=1$.

(C) $a=-1,b=-1$.　　(D) (A)，(B)，(C) 都不正确. [　　]

**【答案】** (B)

**【分析】** 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，必须 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，所以先要计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+\frac{e^{ax}-1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln e^{\frac{2}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\ln e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}})}+\lim_{x\to0^+}\frac{ax}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}\ln e+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}\ln e+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}+a$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}+a=2+a$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+\frac{e^{-ax}-1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to0^-}\frac{-ax}{x}=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}-a$$

$$=-a$$

要使$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,必须 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,即 $2+a=-a$,所以 $a=-1$.

又 $f(0)=b$,因此 $b=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-a=1$. 选(B).

**【评注】**在计算 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 时用了到了当 $x\to0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$,因而,当 $x\to0^-$ 时,$e^{\frac{1}{x}}\to0$. 从而 $\ln(1+e^{\frac{1}{x}})\sim e^{\frac{1}{x}}$,同理,当 $x\to0^-$ 时,$\ln(1+e^{\frac{2}{x}})\sim e^{\frac{2}{x}}$.

11. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续,当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 同阶非等价无穷小,则当 $x\to0$ 时,$\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是$\int_0^x\varphi(t)(e^t-1)\mathrm{d}t$ 的

(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小. (D) 同阶非等价无穷小. [ ]

**【答案】** (D)

**【分析】** 由题设$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=a$,$a$ 不为 0 且不为 1.

因此 $$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x\varphi(t)(e^t-1)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin x}{\varphi(x)(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=a,$$

所以应选(D).

12. 把 $x\to0$ 时的无穷小量 $\alpha=\left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x-1$,$\beta=\sin^3x$,$\gamma=1-\cos2x$ 排列起来,使排在后面的是前一个高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)$\beta,\gamma,\alpha$. (B)$\gamma,\beta,\alpha$.

(C)$\alpha,\beta,\gamma$.　　　　(D)$\gamma,\alpha,\beta$.　　　　[　　]

【答案】(B)

【分析】由于当 $x\to 0$ 时,$\beta=\sin^3 x\sim x^3$,$\gamma=1-\cos 2x\sim\frac{1}{2}(2x)^2=2x^2$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{\gamma}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$,这表明当 $x\to 0$ 时,$\beta$比$\gamma$高阶无穷小,因此排除了(A)和(C).

又当 $x\to 0$ 时 $\alpha=\left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{3+x^3}{3}}-1\sim x\ln\frac{3+x^3}{3}$,

又　$\ln\frac{3+x^2}{3}=\ln(1+\frac{x^3}{3})$.

所以当 $x\to 0$ 时$\left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x-1\sim\frac{x^4}{3}$,

因而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4}{x^3}=0$.

从而选择(B).

【评注】当 $x\to a$,判断无穷小量 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 的阶的高低时,一般先分别求出 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 关于 $x-a$ 的阶数,然后再判断较为方便.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}+a, & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 2, & x=0,\\ \frac{\sin bx}{x}+e^{\frac{1}{x}}, & x<0,\end{cases}$ 在$\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$内连续,则

(A)$a=2,b=1$.　　　　(B)$a=1,b=1$.

(C)$a=\frac{1}{2},b=2$.　　　　(D)$a=2-e^{-\frac{1}{2}},b=2$.　　　　[　　]

【答案】(D)

【分析】由题设,只须考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[(\cos x)^{x^{-2}}+a]=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{x^{-2}}+a$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}+a$,

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$,

因此$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}+a$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin bx}{x}+e^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{bx}{x}+0\right]=b$,要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,须 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$,即 $e^{-\frac{1}{2}}+a=b=2$.所以 $a=2-e^{-\frac{1}{2}}$,$b=2$,因此选(D).

14. 当 $x \to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小量.　　(B) 无穷大量.

(C) 有界量非无穷小量.　　(D) 无界但非无穷大量.　　[　　]

**【答案】** (D)

**【分析】** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，但在这个极限过程中 $\sin\frac{1}{x}$ 重复取值 0，1，显然不选(A)(B)(C).

事实上，令 $x_n=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

$$f(x_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，由此排除(A)，(C)

又令 $y_n=\frac{1}{n\pi}$　　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，$f(y_n)=0$. 由此排除(B)，

因此当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 无界非无穷大量.

**【评注】** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则存在 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内无界，但 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内无界，不一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

15. 曲线 $y=\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$

(A) 没有渐近线.　　(B) 有一条渐近线.

(C) 有两条渐近线.　　(D) 有三条渐近线.　　[　　]

**【答案】** (C)

**【分析】** $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=0$，所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线.

$$\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}y=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\infty.$$

所以 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线.

因此曲线有两条渐近线.

【评注】 注意由 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ 有 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,

由 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ 有 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

16. 曲线 $f(x) = \dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} + \dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$,在$(-\infty,+\infty)$内有

(A)2 条水平渐近线,2 条垂直渐近线.

(B)3 条水平渐近线,2 条垂直渐近线.

(C)2 条水平渐近线,3 条垂直渐近线.

(D)3 条水平渐近线,3 条垂直渐近线. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} + \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right] = 1+1 = 2$

所以 $y=2$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} - \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right] = 1-1 = 0$

所以 $y=0$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$

所以 $x=0, x=1, x=2$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线.

综合上述,选(C).

【评注】注意:求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$ 时,应分别求

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = -1.$$

17. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x \neq \pm 1, \\ 0, & x = \pm 1, \end{cases}$ 则

(A) $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续,在点 $x=-1$ 间断.

(B) $f(x)$ 在点 $x=1$ 间断,在点 $x=-1$ 连续.

(C) $f(x)$ 在点 $x=1, x=-1$ 都连续.

(D) $f(x)$ 在点 $x=1, x=-1$ 都间断. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2\times\dfrac{\pi}{2} = \pi$,

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi,$$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在,因而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,$\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$ 为有界量,$\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\arctan\frac{1}{x^2-1}=0=f(0),$$

所以,$f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续,因此,选(B).

18. 设 $f(x)$ 对一切 $x_1,x_2$ 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,设 $x_0$ 为不等于零的任意实数,则

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $f(x)$ 在 $x_0$ 处不连续.

(C) $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

(D) $f(x)$ 在 $x_0$ 处的连续性不确定. [ ]

**【答案】** (C)

**【分析】** 由条件 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 可知

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f(\Delta x)$,因此有

$\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=f(0)$,

在 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 中令 $x_2=0$,得

$f(x_1)=f(x_1)+f(0)$,所以 $f(0)=0$

于是,$\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=f(0)=0$.

由 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续的定义得 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

19. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{a-e^{bx}}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,则 $a,b$ 满足

(A) $a<0,b<0$.　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant0,b>0$.　　(D) $a\geqslant0,b<0$. [ ]

**【答案】** (C)

**【分析】** 由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty$,要使 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,必须 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a-e^{bx})=\infty$,此时,应有 $b>0$,由此可得不选(A)和(D).

又因 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,必须有 $a-e^{bx}\neq0$,因 $e^{bx}>0$,所以应使 $a-e^{bx}<0$,则应有 $a\leqslant0$,于是选(C).

**【评注】** 当 $b>0,a\leqslant0$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{a-e^{bx}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-be^{bx}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2x}{b(1+x^2)e^{bx}}=0.$$

20. 设 $f(x),g(x)$ 在 $x_0$ 不连续,则