

全国十二大考研辅导机构指定用书



金榜® 考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关 660题

经济类

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (JINGJILEI)

主编 李永乐

- ★ 完全按照新大纲编著
- ★ 权威解析精选试题
- ★ 全面评注各类题型

2008



新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书



金榜® 考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关 660题

经济类

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (JINGJILEI)

主编 李永乐

编者：(按姓氏笔画)

清华大学
北京大学
北京大学
清华大学
北京交通大学
东北财经大学

刘庆华
刘西垣
李正元
李永乐
赵达夫
龚兆仁

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学基础过关 660 题. 经济类/李永乐主编

北京: 新华出版社, 2007. 2

全国硕士研究生入学考试用书

ISBN 978-7-5011-7841-4

I. 数... II. 李... III. 高等数学—研究生—入学考试—习题

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 164268 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识, 凡有防伪标识的为正版图书, 请读者注意识别。

数学基础过关 660 题(经济类)

主 编: 李永乐

策 划: 白云覃

责任编辑: 韩 刚

装帧设计: 金榜图文设计室

出版发行: 新华出版社

地 址: 北京石景山区京原路 8 号

邮 编: 100043

经 销: 新华书店

印 刷: 北京云浩印刷有限责任公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 21.375

字 数: 506 千字

版 次: 2007 年 2 月第 1 版

印 次: 2007 年 2 月北京第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5011-7841-4

定 价: 30.00 元

若有印装质量问题, 请与印厂联系(010)82570560

前 言

2007年考研数学试卷的结构又发生了变化,增加了选择题,减少了解答题。目前选择题10个,填空题6个,共16个题64分,占了数学总分的42.6%。

需要提醒广大考生的是:对于往届考生的失误要引以为戒,一定要重视选择题、填空题的复习。例如,从教育部考试中心公布的统计结果来看:2006年数学选择题难度系数0.524,填空题难度系数0.538。在选择题与填空题上正确率仅二分之一强,是不是丢分丢的有点太多了?

本次再版在题目选编上有较大的变动。一是增加了选择题的数量;二是对解答与评注进行了修订,以适应各种水平同学的需求。希望本书的修订再版能对同学们的复习备考有更大的帮助。对本书不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝考生复习顺利,心想事成,考研成功!

编 者

2007年2月

目 录

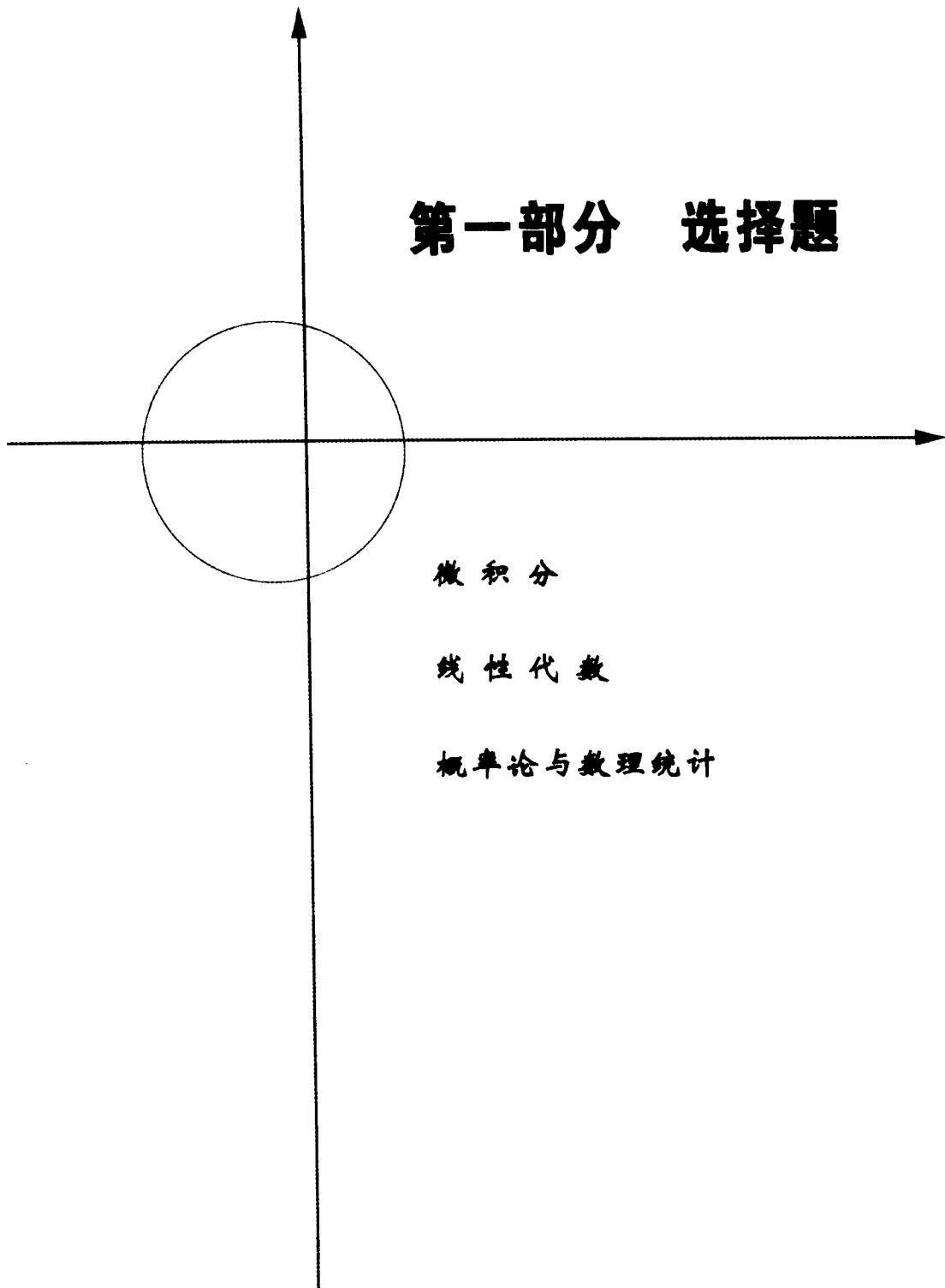
第一部分 选择题

微积分	(3)
线性代数	(115)
概率论与数理统计	(164)

第二部分 填空题

微积分	(203)
线性代数	(275)
概率论与数理统计	(310)

第一部分 选择题



微积分

线性代数

概率论与数理统计

◇◇ 微积分 ◇◇

1. 设数列 x_n 与 y_n , 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列叙述正确的是

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散.
 (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界.
 (C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小量.
 (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小量, 则 y_n 必为无穷小量.

【答案】 (D)

【分析】 举出反例, 否定(A)(B)(C).

例如, $x_n = (-1)^n$ 发散, $y_n = 0$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 因此不选(A)

$$\text{例如, } x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad x_n \text{ 无界,}$$

$$y_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad y_n \text{ 也无界,}$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 因此不选(B)

例如, $x_n = 0$ 数列 x_n 有界, $y_n = (-1)^n$, 数列 y_n 不是无穷小量, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 因此不选(C).

由排除法选(D).

事实上可以证明(D) 成立.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0.$$

2. 设 $x_n \leq z_n \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

- (A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定等于零.
 (C) 不一定存在. (D) 一定不存在.

【答案】 (C)

【分析】 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \neq 0$, 则由夹逼定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \neq 0$, 因此不选(A)(D).

$$\text{取 } x_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}, y_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$z_n = (-1)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right), \text{ 此时有 } x_n \leq z_n \leq y_n,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, z_n 的极限不存在, 因此选(C).

【评注】 (1) 要注意夹逼定理的条件, 当 $x_n \leq z_n \leq y_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ 时, 才有 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ 不一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$) 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 才能有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

3. 设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, 且 $\{x_n\}$ 为无界数列, $\lim_{x \rightarrow \infty} y_n = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} z_n = 1$, 则必有

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

(C) 存在正整数 N , 当 $n > N$, 有 $x_n > y_n$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n$ 不存在. []

【答案】 (D)

【分析】 举反例说明 (A), (B), (C) 都不成立。

例如, $x_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ n & n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n} & n \text{ 为偶数} \end{cases}, x_n y_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ 1 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} y_{2n+1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} y_{2n} = 1$, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \neq 0$,

$\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 中的奇数项相等, 因而 (C) 不成立, 由排除法, 选 (D).

【评注】 如果数列 $\{x_n\}$ 为无穷大量 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$), 则数列 $\{x_n\}$ 无界, 但无界数列却不一定是无穷大量, 上面分析中所列举 $\{x_n\}$ 的是无界数列, 但不是无穷大量。

4. 设对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+1) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 一定是

(A) 奇函数.

(B) 偶函数.

(C) 周期函数.

(D) 单调函数. []

【答案】 (C)

【分析】 由 $f(x+1) = -f(x)$ 得 $f(x+2) = f[(x+1)+1]$

$$= -f(x+1) = -[-f(x)] = f(x). \text{ 所以 } f(x) \text{ 是周期函数.}$$

事实上, 由题设条件, 显然 $f(x)$ 不是单调函数, 取 $x = -\frac{1}{3}$, 则

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -f\left(-\frac{1}{3}+1\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right),$$

由此得出 $f(x)$ 既不是奇函数, 又不是偶函数, 用排除法, 选择 (C).

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分, 则 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为

- (A) $x \geq 1$. (B) $x < 1$.
 (C) $x > 1$ 且 $x \neq 2, 3, \dots$. (D) $x < 1$ 且 $x \neq 0, -1, -2, \dots$. []

【答案】 (C)

【分析】 对于任何实数 x , 总可以把它表示成为一个整数和一个非负小数之和, 即 $x = [x] + (x)$, 其中 $[x]$ 是整数, (x) 是非负小数, $0 \leq (x) < 1$.

因为 $f(x)$ 的定义域是 $(0, 1)$, 因此 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域应为 $0 < \frac{[x]}{x} < 1$, 因 $x = [x] + (x)$, 所以有 $[x] = x - (x)$. 于是 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为 $0 < \frac{x - (x)}{x} < 1$ 亦即 $0 < \frac{(x)}{x} < 1$.

由 $\frac{[x]}{x}$ 可知 $x \neq 0$. 以下分两种情形讨论:

① 当 $x > 0$ 时.

要使 $\frac{(x)}{x} < 1$, 须 $x \geq 1$, 这是因为当 $0 < x < 1$ 时, $(x) = x$. 此时 $\frac{(x)}{x} = 1$. 不满足 $\frac{(x)}{x} < 1$.

要使 $\frac{(x)}{x} > 0$ 须使 $x \neq 1, 2, 3, \dots$, 这是因为当 $x > 0$. 且 $x = 1, 2, 3, \dots$ 时 $(x) = 0$, 此时 $\frac{(x)}{x} = 0$. 不能满足 $\frac{(x)}{x} > 0$.

因而当 $x > 0$ 时 x 的取值应为 $x > 1$ 且 $x \neq 2, 3, \dots$.

② 当 $x < 0$ 时

因 $(x) \geq 0$, 所以当 $x < 0$ 时 $\frac{(x)}{x} \leq 0$ 不能满足 $\frac{(x)}{x} > 0$.

综合 ①② 可得 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域是 $x > 1$ 且 $x \neq 2, 3, \dots$. 所以选(C).

6. 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 + x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 则 $\varphi(x)$ 在其定义域内是

- (A) 有界函数. (B) 周期函数.
 (C) 单调增加函数. (D) 单调减少函数. []

【答案】 (C)

【分析】 由 $f(x) = e^{x^2}$ 得 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 + x$, 又因 $\varphi(x) \geq 0$, 所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1+x)}$, 其定义域为 $x \geq 0$.

显然 $\varphi(x)$ 不是周期函数, 排除(B).

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(1+x)} = +\infty$, 因此, $\varphi(x)$ 在其定义域内是无界的, 所以不选(A).

由于 $\ln(1+x)$ 以及 \sqrt{u} 是单调增加函数, 所以 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 为单调增加函数, 因此选(C)

不是选(D).

【评注】 也可用 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 的导数符号来判断 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 的单调性:
 $(\sqrt{\ln(1+x)})' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}} \cdot \frac{1}{1+x} > 0 \quad (x \geq 0)$, 所以 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 在其定义域内是单调增加的.

7. 下列极限正确的是

(A) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 1.$

(B) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1.$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1.$

【答案】 (B)

【分析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, 因此选(B)

而 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, $\sin x$ 是有界量,

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

【评注】 在重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 中, 要注意极限过程是 $x \rightarrow 0$.

8. 函数 $f(x) = \frac{|x-1| \tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A) (0, 1).

(B) (1, 2).

(C) (2, 3).

(D) (3, 4).

【答案】 (A)

【分析】 函数在 $x=1, x=2, x=3$ 处是间断的, 而在其它处是连续的. 在题目中所给的区间端点都含有间断点, 只须考察以间断点为端点处的极限是否存在即可, 因为如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 的附近是有界的.

对于(A), $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的且

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x) \tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2} = -\frac{\tan(-2)}{(-1)(2)^2} = -\frac{1}{4} \tan 2$$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 左邻域内有界, 从而 $f(x)$ 在 (0, 1) 内有界, 从而选(A).

【评注】 显然 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-1| (x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2} = \infty$

所以 $x=2, x=3$ 都是无穷间断点, 因此 $f(x)$ 在 (1, 2), (2, 3), (3, 4) 内都是无界的.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$,

$$g(x) = \begin{cases} e^{f(\frac{1}{x})}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \text{ 则}$$

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的可去间断点.

(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 的连续性与 a 的取值有关. []

【答案】 (A)

【分析】 因 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{f(\frac{1}{x})}$

$$\stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{f(t)} = e^a.$$

这表明 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 存在, 但无论 a 取何值 $e^a > 0$, 所以有 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0) = 0$, 因此 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点, 所以选(A).

【评注】 间断点一般分两类: 设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 都存在, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点; 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 中至少有一个不存在, 则称 x_0 为第二类间断点. 在第一类间断点中, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 称 x_0 为可去间断点, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 则称 x_0 为跳跃间断点. 而在第二类间断点中, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称 x_0 为无穷间断点.

在 03 年、04 年经济类的考研题中都涉及到间断点的分类, 读者应熟悉这部分内容.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1 + e^{\frac{1}{x}})} + \frac{e^{a|x|} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ b, & x = 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则必须

(A) $a = 1, b = -1$.

(B) $a = -1, b = 1$.

(C) $a = -1, b = -1$.

(D) (A), (B), (C) 都不正确. []

【答案】 (B)

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 必须 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 所以先要计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1 + e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1 + e^{\frac{1}{x}})} + \frac{e^{ax} - 1}{x} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^{\frac{2}{x}}(1 + e^{-\frac{2}{x}})}{\ln e^{\frac{1}{x}}(1 + e^{-\frac{1}{x}})} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x} \ln e + \ln(1 + e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x} \ln e + \ln(1 + e^{-\frac{1}{x}})} + a \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + x \ln(1 + e^{-\frac{2}{x}})}{1 + x \ln(1 + e^{-\frac{1}{x}})} + a = 2 + a \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\ln(1 + e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1 + e^{\frac{1}{x}})} + \frac{e^{-ax} - 1}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} - a \\
 &= -a
 \end{aligned}$$

要使 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 必须 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 即 $2 + a = -a$, 所以 $a = -1$.

又 $f(0) = b$, 因此 $b = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -a = 1$. 选(B).

【评注】 在计算 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 时用了到了当 $x \rightarrow 0$ 时 $\ln(1+x) \sim x$, 因而, 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$. 从而 $\ln(1 + e^{\frac{1}{x}}) \sim e^{\frac{1}{x}}$, 同理, 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $\ln(1 + e^{\frac{2}{x}}) \sim e^{\frac{2}{x}}$.

11. 设 $f(x), \varphi(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内连续, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 同阶非等价无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x \varphi(t)(e^t - 1) dt$ 的

- (A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.
 (C) 等价无穷小. (D) 同阶非等价无穷小. []

【答案】 (D)

【分析】 由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = a, a$ 不为 0 且不为 1.

$$\begin{aligned}
 \text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) \sin t dt}{\int_0^x \varphi(t)(e^t - 1) dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{\varphi(x)(e^x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = a,
 \end{aligned}$$

所以应选(D).

12. 把 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量 $\alpha = \left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x - 1, \beta = \sin^3 x, \gamma = 1 - \cos 2x$ 排列起来, 使排在后面的是前一个高阶无穷小, 则正确的排列次序是

- (A) β, γ, α . (B) γ, β, α .

(C) α, β, γ .(D) γ, α, β .

[]

【答案】 (B)**【分析】** 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $\beta = \sin^3 x \sim x^3, \gamma = 1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$ 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$, 这表明当 $x \rightarrow 0$ 时, β 比 γ 高阶无穷小, 因此排除了(A)和(C).又当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha = \left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x - 1 = e^{x \ln \frac{3+x^3}{3}} - 1 \sim x \ln \frac{3+x^3}{3}$,又 $\ln \frac{3+x^3}{3} = \ln(1 + \frac{x^3}{3})$.所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $\left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x - 1 \sim \frac{x^4}{3}$,因而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^3} = 0$.

从而选择(B).

【评注】 当 $x \rightarrow a$, 判断无穷小量 α, β, γ 的阶的高低时, 一般先分别求出 α, β, γ 关于 $x - a$ 的阶数, 然后再判断较为方便.

$$13. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x-2} + a, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{\sin bx}{x} + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \end{cases} \quad \text{在 } \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 内连续, 则}$$

(A) $a = 2, b = 1$.(B) $a = 1, b = 1$.(C) $a = \frac{1}{2}, b = 2$.(D) $a = 2 - e^{-\frac{1}{2}}, b = 2$.

[]

【答案】 (D)**【分析】** 由题设, 只须考虑 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\cos x)^{x-2} + a] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{x-2} + a \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{x-2}} + a, \end{aligned}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x-2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{2}} + a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\sin bx}{x} + e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{bx}{x} + 0 \right] = b, \text{ 要使 } f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续, 须}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, 即 $e^{-\frac{1}{2}} + a = b = 2$. 所以 $a = 2 - e^{-\frac{1}{2}}, b = 2$, 因此选(D).

14. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

- (A) 无穷小量. (B) 无穷大量.
(C) 有界量非无穷小量. (D) 无界但非无穷大量.

【答案】 (D)

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 但在这个极限过程中 $\sin \frac{1}{x}$ 重复取值 0, 1, 显然不选(A)(B)(C).

事实上, 令 $x_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$f(x_n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, 由此排除(A), (C)

又令 $y_n = \frac{1}{n\pi}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, $f(y_n) = 0$. 由此排除(B),

因此当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 无界非无穷大量.

【评注】 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则存在 $\delta > 0$, $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内无界, 但 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内无界, 不一定有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

15. 曲线 $y = \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}}$

- (A) 没有渐近线. (B) 有一条渐近线.
(C) 有两条渐近线. (D) 有三条渐近线.

【答案】 (C)

【分析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = 0$, 所以 $y = 0$ 是曲线的水平渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{xe^{-\frac{1}{x}} + 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \infty.$$

所以 $x = 0$ 是曲线的垂直渐近线.

因此曲线有两条渐近线.

【评注】 注意由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,

由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ 有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

16. 曲线 $f(x) = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} + \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有

(A) 2 条水平渐近线, 2 条垂直渐近线.

(B) 3 条水平渐近线, 2 条垂直渐近线.

(C) 2 条水平渐近线, 3 条垂直渐近线.

(D) 3 条水平渐近线, 3 条垂直渐近线.

【答案】 (C)

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} + \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \right] = 1+1=2$

所以 $y=2$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} - \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \right] = 1-1=0$

所以 $y=0$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$

所以 $x=0, x=1, x=2$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线.

综合上述, 选(C).

【评注】 注意: 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$ 时, 应分别求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = -1.$$

17. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)\arctan \frac{1}{x^2-1}, & x \neq \pm 1, \\ 0, & x = \pm 1, \end{cases}$ 则

(A) $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续, 在点 $x=-1$ 间断.

(B) $f(x)$ 在点 $x=1$ 间断, 在点 $x=-1$ 连续.

(C) $f(x)$ 在点 $x=1, x=-1$ 都连续.

(D) $f(x)$ 在点 $x=1, x=-1$ 都间断.

【答案】 (B)

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi,$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi,$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在, 因而 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续, $\arctan \frac{1}{x^2 - 1}$ 为有界量, $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \arctan \frac{1}{x^2 - 1} = 0 = f(0),$$

所以, $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续, 因此, 选(B).

18. 设 $f(x)$ 对一切 x_1, x_2 满足 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 设 x_0 为不等于零的任意实数, 则

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

(C) $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(D) $f(x)$ 在 x_0 处的连续性不确定.

【答案】 (C)

【分析】 由条件 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 可知

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f(\Delta x)$, 因此有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(0),$$

在 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 中令 $x_2 = 0$, 得

$$f(x_1) = f(x_1) + f(0), \text{ 所以 } f(0) = 0$$

于是, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = f(0) = 0$.

由 $f(x)$ 在 x_0 连续的定义得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

19. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{a - e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 则 a, b 满足

(A) $a < 0, b < 0$.

(B) $a > 0, b > 0$.

(C) $a \leq 0, b > 0$.

(D) $a \geq 0, b < 0$.

【答案】 (C)

【分析】 由题设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 又因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$, 要使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 必须 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a - e^{bx}) = \infty$, 此时, 应有 $b > 0$, 由此可得不选(A)和(D).

又因 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 必须有 $a - e^{bx} \neq 0$, 因 $e^{bx} > 0$, 所以应使 $a - e^{bx} < 0$, 则应有 $a \leq 0$, 于是选(C).

【评注】 当 $b > 0, a \leq 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{a - e^{bx}} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-be^{bx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{b(1+x^2)e^{bx}} = 0.$$

20. 设 $f(x), g(x)$ 在 x_0 不连续, 则