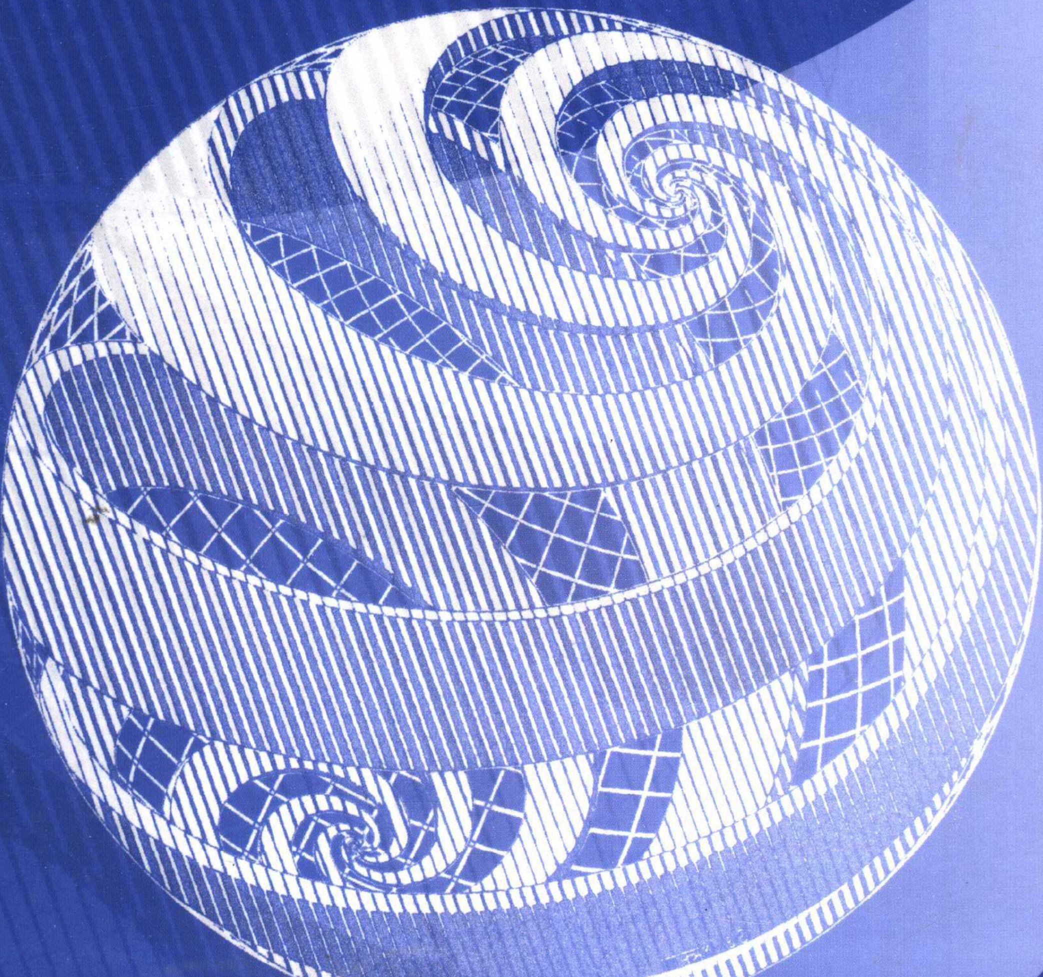
大学数学系列教材 主编 辛小龙 刘新平

高等数学 上

马保国 陈斯养 薛利敏 张永锋



高等教育出版社

大学数学系列教材

主编　辛小龙　刘新平

高等数学

上

马保国　陈斯养　薛利敏　张永锋

高等教育出版社

内容提要

本书是西北大学、陕西师范大学等八所院校合编的大学数学系列教材之一，综合作者多年教学经验，同时结合新时期大学数学的教学需求编写而成。共分上、下两册，上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等。本书适合高等院校非数学专业本专科学生作为教材使用，也可作为工程技术人员及自学者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上/马保国等．—北京：高等教育出版社，2007.7
ISBN 978-7-04-021737-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．马…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 087441 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 张申申　**责任绘图** 吴文信
版式设计 史新薇　**责任校对** 殷　然　**责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007年7月第1版
印　　张	23	印　　次	2007年7月第1次印刷
字　　数	420 000	定　　价	24.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　21737-00

前　言

数学在研究客观世界数量关系与空间形式的过程中，形成了异于其他学科的庞大的科学体系，并以其内容的抽象性，逻辑的严谨性及应用的广泛性著称。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。数学教育在培养高素质科学技术人才中具有不可替代的作用。

高等数学是高等学校理工综合类专业本科生的必修的基础理论课。通过该课程的学习，学生获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、常微分方程、线性代数及随机数学基础等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础。高等数学教学及教材在传授知识的同时，要努力培养学生进行抽象思维和逻辑思维的思维能力、综合运用所学知识分析问题解决问题的能力和较强的自主学习能力，并逐步培养学生的创新精神和创新能力。实现上述培养目标的一个必不可少的环节是相应的教材建设。我们一直在致力于这方面的工作。

随着我国改革开放和经济社会的发展，我国高等教育事业也有了长足发展。特别是大学扩招，变原来的“精英教育”为“大众教育”，引起了生源的变化。所有这些对大学数学教学改革和教材建设提出了新的要求。

多年来，我国也出现了许多优秀的大学高等数学教材。然而，现有的大多数教材比较适合工科院校的学生。面对扩招以后大学生源的变化，特别相对于综合类、师范类院校的学生，这些教材都有明显的局限性，不适合这类院校学生的学习。因而，编写一套以理工综合类及师范类学生为主要对象的高等数学教材是非常必要的。我们编写的这套系列教材，力争能适合理工综合类及师范类本科生的教育现状，有利于实现该类专业的数学教育目标，适合新世纪人才培养的要求。我们努力在这套系列教材中反映数学教学改革新思路、新方法，期望能成为一套具有自己特色的大学数学教材。

本教材是按照高等理工综合类及师范类本科专业学习本课程都应达到的要求编写的，其中带 * 的部分可供某些相关专业选用，也是对选用专业学生的基本要求。各院校根据自身情况，在达到基本要求的基础上还可以提出一些较高的或特殊的要求。

本套系列教材分《高等数学(上)》、《高等数学(下)》、《线性代数》及《概率论与数理统计》4本书出版，是西北大学、陕西师范大学、延安大学、陕西理工学院、西安文理学院、宝鸡文理学院、渭南师范学院、咸阳师范学院等8所院校的多位资深的数学教师多年来数学教育、教学经验的结晶，其内容选裁、编写体例、阐述方式、习题难度和习题量的安排，都充分考虑了高等理工综合类及师范类专业本科学生学习的需要，并与该类专业相应课程的教学计划相适应。

本系列教材的总主编由西北大学辛小龙教授和陕西师范大学刘新平教授担任。教材封面上的第一署名作者为该本教材的统稿人。教材编写工作的具体分工如下：

《高等数学(上)》：第一章，陈斯养；第二章，张永锋；第三、四章，薛利敏；第五章，马保国；第六章，阎恩让。

《高等数学(下)》：第七章，曹吉利；第八章，荔炜；第九章，陈斯养；第十章，辛小龙；第十一章，薛西峰。

《线性代数》：第一章，于萍、王挺；第二章，陈露；第三章，杨闻起；第四章，舒尚奇；第五章，邓方安；第六章，石超峰。

《概率论与数理统计》：第一章，朱科科；第二章，冉凯；第三章，杨开春；第四章，查淑玲；第五章，王丰效；第六、八章，刘新平；第七章，张运良；第九、十章及附录，贺瑞缠。

关于教材的编写我们进行了充分的准备工作，由西北大学数学系和高等教育出版社组织以上参编单位的专家教授召开了数次教材编写研讨会，多次讨论确定了教材编写大纲、教材主要内容和教材编写特色，使得教材的编写工作有分工有合作，有条不紊地进行。

本系列教材的问世，是教育改革的产物。我们感谢西北大学、陕西师范大学等所有参编院校及高等教育出版社，它们对本书的顺利问世功不可没。

新世纪大学数学的教学改革是一项重要而艰巨的工程。我们力争做出一些贡献。我们尽力想把这套教材编写好，但由于水平有限及各方面的诸多原因，书中的缺点、错误乃至问题一定在所难免，恳望同行不吝赐教，诚请读者批评指正。

编　者

2007年4月

目　　录

第1章 函数与极限

在研究实际问题时，我们常常会遇到各种各样的量.这些量之间往往存在着某些内在关系，其中之一在数学上称为函数关系.函数是数学的主要研究对象，是最重要、最基本的数学概念之一.极限理论是研究函数的重要方法和工具，在微积分学中扮演着重要的角色，它是由于寻求某些问题的精确解答而产生的.后面我们将会看到，微分学和积分学中的一些基本概念，是通过极限概念给出的，一些基本性质和法则也是通过极限的方法推导出来的.从某种角度来说，本书讨论的所有问题，最终几乎都可归结为极限问题.

本章我们将介绍函数与极限的概念、运算、求解以及与极限密切相关的无穷小量、无穷大量、函数连续性等有关知识.

1.1 函 数

本节先介绍区间与邻域，然后引出函数概念以及函数的四个简单性质，给出基本初等函数与初等函数的概念.

1.1.1 区间与邻域

1. 区间

区间是实数集 $\mathbf{R}$ 的一类特殊形式的子集.设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$.

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a、b 分别为左、右端点的开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$. 这个开区间在数轴上可用图 1-1(a)或图 1-1(b)表示.

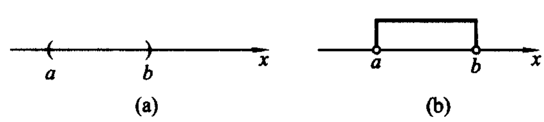
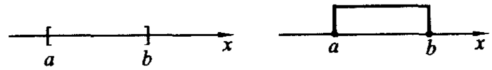


图 1-1

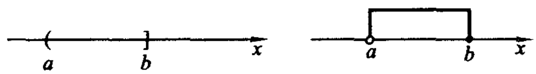
(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a、b 分别为左、右端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$. 这个闭区间在数轴上可用图 1-2(a)或图 1-2(b)表示.



(a) (b)

图 1－2

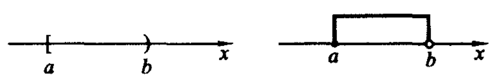
(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a、b 分别为左、右端点的左开右闭区间,记作 $(a,b]$ 即 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$. 这个区间在数轴上可用图 1－3(a)或图 1－3(b)表示.



(a) (b)

图 1－3

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a、b 为左、右端点的左闭右开区间,记作 $[a,b)$,即 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$. 这类区间在数轴上可用图 1－4(a)或图 1－4(b)表示.



(a) (b)

图 1－4

左开右闭区间和左闭右开区间通常称为半开区间,或半闭区间,或半开半闭区间.

上述三类区间均称为有限区间,其特征是区间的左、右端点均是有限实数. 有限区间的右端点 b 与左端点 a 之差 $b-a$,称为区间的长度.

除了有限区间外,还有下述三类无限区间.

(4) 区间 $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,如图 1－5。

区间 $[a,+\infty)$,如图 1－6.

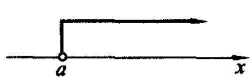


图 1－5

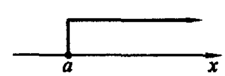


图 1－6

(5) 区间 $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,如图 1－7.

区间 $(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$,如图 1－8.

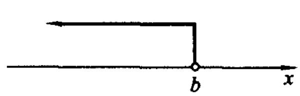


图 1－7

图 1－8

(6) 区间 $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,即实数集 $\mathbf{R}$.

无限区间的长度规定为无穷大,即∞.

2. 邻域

邻域也是实数集 **R** 的特殊形式的子集,它在极限概念中具有特殊的作用.

定义 1 设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$. 集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0, \delta)$,或简记为 $U(x_0)$;集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的 δ 空心邻域,记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$,或 $\mathring{U}(x_0)$.

由于 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$,所以 $U(x_0, \delta)$ 实质上就是以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;类似可知 $\mathring{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. 它们分别如图 1-9 和图 1-10 所示.

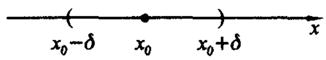


图 1-9

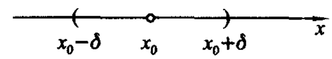


图 1-10

例 1 解下列不等式,并用区间在数轴上表示出来.

(1) $0 < (x-2)^2 < 4$;

(2) $|ax - x_0| < \delta$,这里 $a > 0, \delta > 0, x_0$ 为常数.

解 (1) 不等式两边开方得 $0 < |x - 2| < 2$,

于是可得不等式组

$$\begin{cases} -2 < x - 2 < 2, \\ x - 2 \neq 0, \end{cases}$$

解之得 $0 < x < 4$ 且 $x \neq 2$. 用区间表示即为 $(0,2) \cup (2,4)$;其图形如图 1-11.

(2) 原不等式可化为 $-\delta < ax - x_0 < \delta$,由于 $a > 0$,从而

$$\frac{x_0 - \delta}{a} < x < \frac{x_0 + \delta}{a},$$

用区间表示即为 $\left(\frac{x_0}{a} - \frac{\delta}{a}, \frac{x_0}{a} + \frac{\delta}{a}\right)$,其图形如图 1-12.

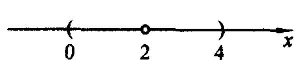


图 1-11

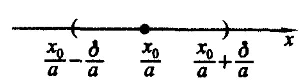


图 1-12

例 2 求 -1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域及空心邻域.

解 $N\left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \,\middle|\, |x - (-1)| < \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \,\middle|\, |x + 1| < \frac{1}{2}\right\}$

$$= \left\{x \,\middle|\, -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}\right\},$$

$$\mathring{N}\left(-1,\frac{1}{2}\right)=\{x\mid 0<|x-(-1)|<\frac{1}{2}\text{且}x\neq -1\}$$

$$=\left\{x\mid -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}\text{且}x\neq -1\right\},$$

$$=\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right).$$

其图形分别如图 1 – 13 中的(a)与(b)所示.

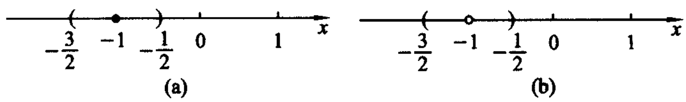


图 1 – 13

1.1.2 函数概念及表示

我们在研究运动与发展变化的客观世界时,会遇到反映客观世界的各种各样的量;这些量不仅在不断发生变化,而且许多量是相互关联的. 精确地、具体地表达量与量之间的这种相互制约、相互依存关系的正是将要讨论的函数概念.

1. 常量与变量

数学问题中的量,尽管千差万别,各种各样,但从运动的角度来看,这些量可大体分为常量与变量两类. 在某一变化过程中,其数值保持不变的量称为常量;其数值不断变化的量称为变量.

例如,在考察一个工厂的生产情况时,人数、设备数、日产量可以不变,是常量,但其总产量是变量.

又如,在观察民航班机从甲地飞往乙地的飞行过程中,乘客数目、行李重量等都是常量,而飞行高度以及汽油的储存量都是变量.

注意 一个量是常量还是变量,一般而言不是绝对的. 对于同一个量,在某个变化过程中可能是常量,但在另一个变化过程中就可能是变量. 例如,考察某种商品在某个短时间内的市场行情时,其单价可以是常量但在较长时间内考察时,其单价就可能是变量.

数学中,常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量,用 $x,y,t,u,p,q,\cdots$ 来表示变量.

2. 函数的定义

为了研究客观世界规律,我们对反映客观世界的各种量,最为关心的不是这些量的具体数值,而是这些量之间的依赖关系.

例 3 某厂某种产品每日最多生产 100 吨. 固定成本为 1 000 元,每多生产一吨,成本增加 15 元,已知每日生产的总成本 C 与总产量 q 之间有如下的关系:

$$C = 15q + 1\ 000.$$

当 q 在生产能力活动的范围$[0,100]$内取定某一数值时，总成本 C 也随之有一确定的数值与之对应. 比如 $q=20$ 时，总成本 $C=15\times20+1\ 000=1\ 300$(元)

例 4　某家电商场销售报表中列出了某年 12 个月每月电视机销售情况：

月 份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y 台	435	315	297	250	275	198	180	153	263	375	286	424

根据报表，当月份 x 取定 1 ~ 12 中的任一个整数时，销售量 y 都有一个确定的数与之对应.

上述两个例子中涉及的是不同的问题，涉及的量也不相同，但它们有一个共同的特点，当一个量在某个范围内取定一个数值时，另外一个量都有一个确定的数值与之对应. 我们将问题的实际意义撇开，抽象出其共同特征，便得到如下的函数概念.

定义 2　设 D 和 Z 是两个非空数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于 D 中的每一个元素 x，按照 f，都有 Z 中(唯一)的元素 y 与之对应，则称 f 是从 D 到 Z 的一个函数，记作

$$f: D \to Z,$$

而 y 称为函数 f 在点 x 的函数值，记为　$y=f(x)$.

x 的取值范围 D 称为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$，y 的取值范围 $\{y \mid \forall x \in D; y=f(x)\}$，称为函数 f 的值域，记为 $R(f)$，x 称为自变量，y 称为因变量.

注意　由定义 2 可知，如果两个函数的定义域与对应法则相同，那么这两个函数相同. 另外，如果两个函数的定义域不同，则可以肯定这两个函数必不相同.

函数一般用字母 f,g,φ,ψ 等表示，对同一问题中的不同函数最好用不同的符号表示.

例 5　下面的函数是否是同一函数？

(1) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　(1) 首先 $f(x)$，$g(x)$ 定义域均是$(-\infty,+\infty)$；其次，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\geqslant0$ 时有

$$f(x) = |x| = x = \sqrt{x^2} = g(x),$$

当 $x<0$ 时有　$f(x)=|x|=-x=\sqrt{x^2}=g(x)$,

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数.

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而 $g(x)=x+1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

(3) 首先 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=\sqrt[3]{x^3(x-1)}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x),$$

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

3. 函数的表示法

两个变量之间的函数关系可以用多种方法表示，最常用的表示方法有三种，即解析法(又称公式法)、图像法和表格法.

(1) 解析法

用数学式子表示变量之间函数关系的方法叫解析法(或公式法). 如

$$S=\pi r^2, y=\sqrt{4-x}+\tan x$$

等. 用解析法表示函数关系，其优点是简明、准确，便于运算及理论分析；缺点是不直观，计算繁杂，有些实际问题中的函数关系很难甚至不能用解析法表示.

(2) 图像法

例 6 一天气温 T 与时间 t 是两个变量，气温自动记录仪记录了这两者的关系，如图 1－14 所示.

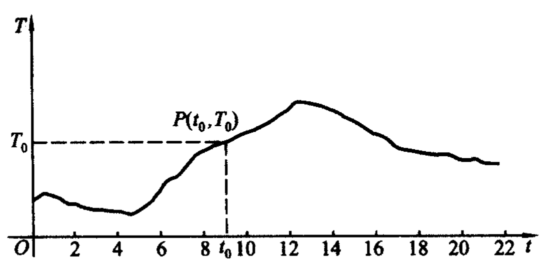


图 1－14

根据图，我们可以求出 0～24 小时内任一时刻 t_0 的温度 T_0.

像这种借助坐标系将变量之间关系用图形来刻画的方法叫图像法. 图像法的优点是直观、形象，函数的变化规律明确，缺点是不够精确，不能进行数学运算与理论分析.

(3) 表格法

像上面的例 4 将两个变量之间的关系用表格表示出来的方法,称为表格法.如大家熟悉的三角函数表、对数表等都是用表格表示函数的例子.

利用表格法,可以直接从自变量的值查到对应的函数值,避免繁杂的数学计算;但是表格法比较局限,不易看出函数本身的变化规律,且不便于进行理论研究.

4. 分段函数

用解析法表示函数时,有时可以用一个统一的数学表达式表示;但是有时候,函数对于其定义域内自变量 x 不同的取值范围,有不同的表达式,则称此类函数为分段函数.

例 7 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0\end{cases}$

称为绝对值函数,其图像如图 1-15 所示.

例 8 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0\end{cases}$

称为符号函数,其图像如图 1-16 所示.

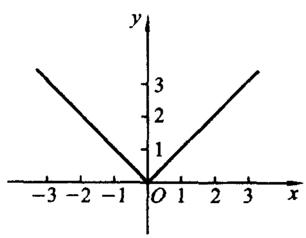


图 1-15

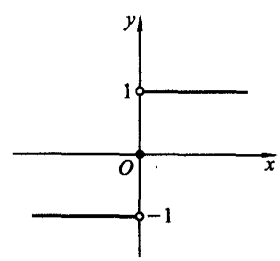


图 1-16

5. 函数求值问题

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

注意 对于分段函数,首先要看 x_0 属于哪个取值范围,然后根据该范围的对应法则求出 $f(x_0)$.

例 9 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,求 $f(0)$,$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

解 $f(0)=\mathrm{e}^0+\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$;

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+\sin 0=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$$

例 10 设 $f(x)=\dfrac{|2-x|}{x-1}$,求 $f(-2)$,$f(a)$.

解 $f(-2)=\dfrac{|2-(-2)|}{-2-1}=-\dfrac{4}{3}$;

$$f(a)=\frac{|2-a|}{a-1}=\begin{cases}\dfrac{a-2}{a-1}, & a>2,\\ 0, & a=2,\\ \dfrac{2-a}{a-1}, & a<2\text{ 且 }a\neq 1.\end{cases}$$

例 11 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ x^2-2, & 0<x\leqslant 2,\\ 2, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$,求 $f(-1)$,$f(1)$,$f(3)$.

解 $f(-1)=\dfrac{1}{-1}=-1$;$f(1)=1^2-2=-1$;$f(3)=2$.

例 12 设 $f(x+1)=x^3-3x+2$,求 $f(-x)$,$f(x^2)$,$f(x+\Delta x)$.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,代入所给函数得

$$f(t)=(t-1)^3-3(t-1)+2=t^3-3t^2+4,$$

则

$$f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2+4=-x^3-3x^2+4;$$

$$f(x^2)=(x^2)^3-3(x^2)^2+4=x^6-3x^4+4;$$

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)^2+4.$$

例 13 已知 $f(x)=2x-1$,$g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$,求 $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f[g(x)]$

解 $g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+1}=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; $f[g(x)]=2\dfrac{1}{x^2+1}-1=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

例 14 已知 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x^2, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $f(x-1)$.

解 因 $f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2,\\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4,\end{cases}$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\\ (x-1)^2, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$$

6. 函数定义域的求法

在确定函数的定义域时,要考虑如下两类情况:

(1) 应根据问题的实际意义去确定函数的定义域,比如在长方形的面积公式或圆面积公式中,表示边长或半径的自变量应取正数,例 4 中表示月份的自变量 x 应取 1 ~ 12 中的整数.

(2) 如果研究的函数仅是抽象的数学公式时,其定义域就是使得公式中各步运算均能进行下去的自变量的取值范围.

例 15 确定函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数的表达式有意义,必须使 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{1-x^2}$ 同时有意义,从而必须使 $x\geqslant0$ 且 $1-x^2\geqslant0$,即解不等式组 $\begin{cases}x\geqslant0,\\1-x^2\geqslant0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant0,\\|x|\leqslant1.\end{cases}$ 在数轴上分别标出 $x\geqslant0$ 和 $-1\leqslant x\leqslant1$ 所表示的区间,其公共部分即为函数的定义域:$0\leqslant x\leqslant1$,用区间表示为 $[0,1]$.

例 16 求函数 $y=\dfrac{\cos x}{(x-1)\ln(x+3)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须分母不为零,且对数的真数大于零,即

$$\begin{cases}x-1\neq0,\\\ln(x+3)\neq0,\\x+3>0,\end{cases}$$

其中 $\ln(x+3)\neq0$,即 $x+3\neq1$,从而解得

$$\begin{cases}x\neq1,\\x\neq-2,\\x>-3,\end{cases}$$

则函数的定义域是 $(-3,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$.

例 17 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin\dfrac{2-x}{3}$ 的定义域.

解 要使 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin\dfrac{2-x}{3}$ 有意义,必须有

$$\begin{cases}4-x^2>0,\\\dfrac{|2-x|}{3}\leqslant1,\end{cases}$$

其中 $4-x^2>0$ 等价于 $x^2<4$,或 $|x|<2$,即 $-2<x<2$;$\dfrac{|2-x|}{3}\leqslant1$ 等价于

$|2-x|\leqslant 3$,即 $-3\leqslant 2-x\leqslant 3$,从而 $-1\leqslant x\leqslant 5$,故原不等式组可表示为

$$\begin{cases}-2<x<2,\\ -1\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$$

则函数的定义域为:$[-1,2)$.

例 18 求函数 $y=\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$的定义域.

解 要使 $y=\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$有意义,必须有

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ \dfrac{1-x}{1+x}\geqslant 0.\end{cases}$$

上式等价于

$$①\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x\geqslant 0,\\ 1+x>0\end{cases} \quad 或 \quad ②\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x\leqslant 0,\\ 1+x<0.\end{cases}$$

解不等式组①得 $-1<x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$,即 $(-1,0)\cup(0,1]$;解不等式组②,由于 $x\geqslant 1$ 与 $x<-1$ 无公共部分,从而②无解.故函数定义域为:$(-1,0)\cup(0,1]$.

1.1.3 函数的几何性质

为了进一步掌握不同函数的特点,我们需要研究函数的一些最基本的性态,主要有函数的奇偶性、单调性、周期性与有界性.这些性态也称为函数的几何性质.

1. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $y=f(x)$的定义域是关于原点对称的区间,若对定义域中的每个自变量 x 恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

注意 偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1-17(a)所示;奇函数的图形关于原点对称,如图 1-17(b)所示.

例 19 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=2x^2+\dfrac{1}{1+3x^4}$; (2) $f(x)=x+\cos x$;

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.