21世纪高等院校创新教材

微积分及其应用

张志军　熊德之　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪高等院校创新教材·

微积分及其应用

张志军　熊德之　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制订的《经济管理类数学课程教学基本要求》编写而成. 全书共分九章，内容包括：函数与极限，导数与微分及边际与弹性，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微分学及其经济应用，二重积分，微分方程与差分方程，无穷级数等. 每章节配有习题，书末附有习题答案.

本书可作为普通高等学校经济管理类专业微积分课程的教材，同时也可供其他相关专业学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分及其应用/张志军，熊德之主编. —北京：科学出版社，2007
（21世纪高等院校创新教材）
ISBN 978-7-03-018871-7

I.微… II.①张…②熊… III.微积分－高等学校－教材 IV.O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第055260号

责任编辑：冯贵层 梅 莹／责任校对：王望容
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年5月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007年5月第一次印刷 印张：28 1/4
印数：1—5 000 字数：558 000

定价：39.80元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

随着社会经济的迅猛发展，数学在经济活动和经济研究中的作用日益凸显，数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，社会对高等学校经济管理理类各专业人才的数学素养要求越来越高. 作为经济数学基础课程之一的微积分课程，在提高经济管理类专业人才的数学素养方面，起着至关重要的基础性作用. 它不仅提供解决实际问题的有力数学工具和数学思维的训练，而且有助于学生获得作为复合型、创造型、应用型人才所必需的文化素质和修养.

怎样使微积分课程充分发挥上述作用，更趋符合培养复合型、创造型、应用型人才目标的要求，同时兼顾微积分课程的理论性与应用性、思想性与工具性，突出经济管理类专业微积分课程的特色，需要认真地思考与探索. 参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制订的《经济管理类数学课程教学基本要求》，我们编写了这本《微积分及其应用》教材. 为适应不同的教学对象和不同专业类别的教学需要，将有些内容打“*”号以便在教学中进行取舍. 我们在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面按照上述要求作了一些改革尝试.

1. 继承和保持微积分的基本内容和基本体系，适当降低极限与连续的理论要求以及各类积分的计算技巧要求，减少向量代数与空间解析几何的内容，以适应现在微积分课程学时少的新形势.

2. 基本满足经济管理类各专业后续课程所需数学基础知识的需要.

3. 从自然科学和经济学的实际问题出发，引入微积分的基本概念和方法；利用微积分的基本概念和方法解决经济问题，使学生较早地了解微积分的经济应用背景，引导学生学以致用，学用结合；提高学生利用微积分的思想方法建立数学模型、解决实际问题的能力.

本书由张志军、熊德之主编，各章的具体编写人员如下：第一、二章，伍建华；第三、四、五章，熊德之；第六、七章，杨雪帆；第八、九章，王志宏；其中有关微积分在经济学中的应用部分由张志军编写.

目前适合经济管理类专业学生的微积分教材较少，要编写出一本符合目前经济管理类专业学生实际情况的微积分教材是十分困难的. 我们的教材正是基于这个目的编写的，并将根据教师和学生使用的情况适时进行修改.

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请有关专家、学者不吝赐教，同时也希望使用该教材的教师和学生提出并反馈宝贵意见.

编　者

2007 年 1 月 7 日

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而微积分学则以变量为研究对象. 对客观世界量与量依赖关系的研究，产生了函数与函数极限的概念. 函数是刻画现实世界中变量之间相依关系的数学模型，也是经济数学研究的主要对象. 极限是刻画变化过程中变量的变化趋势的数学工具，极限方法是研究变量的一种基本方法. 在中学数学里，通常突出的是极限的描述性定义，微积分则必须强调精确的、定量的极限定义.

本章在总结和推广中学所学过的函数概念及一些主要函数的基础上，将介绍函数与极限的基本概念、性质和运算，并利用极限描述函数的连续性. 连续函数是最常见的一类函数，它具有一系列很好的性质和基本运算，微分理论将以连续函数为主要对象.

§1.1　集合与函数

一、集合

1. 集合概念

集合是现代数学的基本语言，可以简洁准确地表达数学内容. 在现代数学中，每个对象（如数、函数等）本质上都是集合，都可以用某种集合来定义. 在中学我们已经接触过集合的概念，例如，自然数、有理数的集合等. 集合（简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体，构成集合的每一个对象称为该集合的元素. 习惯上，集合常用大写字母 A、B、C…表示；元素常用小写字母 a、b、c、x…表示.

设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则说 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，则说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$.

下面举几个例子：

例 1　某班 9 月 1 日出生的全体同学.

例 2　某商场的全部电视机.

例 3　单位圆 $x^2+y^2=1$ 上所有的点.

例 4　某班全体高个子同学.

例 1、例 2、例 3 是集合，例 4 不是集合.

注　集合的元素具有确定性、互异性、无序性三个特征. 确定性是指构成集合的元素具有明确的特征，某一元素在集合 A 中或不在集合 A 中二者必居其一，能

够明确地区分，不能模棱两可；互异性是指同一元素在集合中不能重复；无序性是指集合的构成与元素的顺序无关.

集合的表示一般有两种方法：

列举法：把集合的全体元素一一列举出来，要求元素既不能重复，又不能遗漏. 例如，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$C=\{$红，黄，蓝$\}$.

描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为：$M=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$. 例如，$M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x,y$ 为实数$\}$.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集. 即：若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$.

不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

由数组成的集合叫做**数集**. 有时我们在表示数集的字母的右上角标上“+”、“−”等上标，来表示该数集的特定的子集.

N 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};\ \mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

R 表示所有实数构成的集合，称为实数集；$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集.

Z 表示所有整数构成的集合，称为整数集，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

Q 表示所有有理数构成的集合，称为有理数集，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

显然，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

2. 集合的运算

集合有并、交、差三种基本运算. 设 A、B 是两个集合，则：

(1) 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

(2) 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

(3) 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时，我们称集合 I 为全集或基本集. 称 $I\backslash A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^C.

集合的运算满足以下法则：

设 A、B、C 为任意三个集合，则

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C, (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

以上这些运算法则都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义一种积运算. 设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的直积或笛卡儿(Descartes)乘积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y) \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 区间和邻域

设 a、b 为实数，且 $a<b$，称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$. 类似地有 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$、$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为半开区间. 这三类区间称为有限区间，如图 1-1(a)、(b)、(c)所示，其中 a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

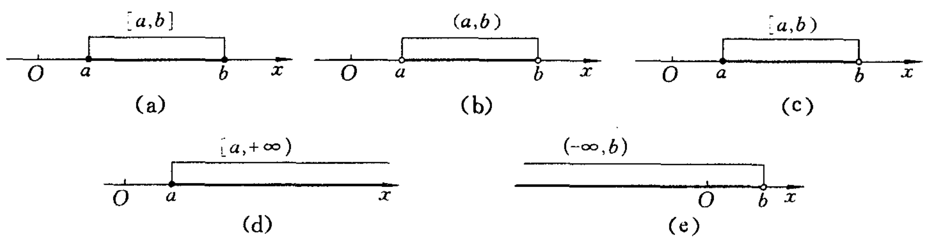


图 1-1

无限区间：

$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x \mid |x|<+\infty\}$.

区间在数轴上的表示如图 1-1(d)、(e)所示.

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**，如图 1-2 所示.

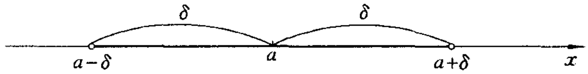


图 1-2

有时在讨论邻域 $U(a,\delta)$ 时，并不关心中心点 a，甚至需要把中心点 a 去掉，这种去掉中心点的邻域称为**去心邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

邻域是一个开区间，则 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**，$(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**.

二、函数

1. 函数的概念

在同一自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先就两个变量的情形(多于两个变量的情形以后再讲)举几个例子.

例 5 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道，它们之间的关系由公式 $A=\pi r^2$ 给定，当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 6 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相依关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定，其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

例 7 某商场一年里各月的营业额(万元)如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
营业额 y	120	65	63	68	142	67	69	81	84	128	110	130

表 1-1 表示了该商场营业额 y 随着月份 t 变化而变化的关系.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=$

$f(x)$，数集 D 叫做这个函数的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如“φ”、“F”等，这时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$等.

注 函数的定义域与值域都是在实数集 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如在例 5 中，定义域 $D_f=(0,+\infty)$；在例 6 中，定义域 $D_f=[0,T]$；在例 7 中，定义域 $D_f=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定：**函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值**. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

例 8 求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

要使函数有意义，必须 $x\neq 0$，且 $x^2-4\geqslant 0$. 解不等式得 $|x|\geqslant 2$，所以函数的定义域为

$$D=\{x\,|\,|x|\geqslant 2\}\quad 或\quad D=(-\infty,2]\cup[2,+\infty).$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**. 例 5、例 6 和例 7 中的函数都是单值函数. 下面举一个多值函数的例子.

例 9 在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，该方程在闭区间 $[-r,r]$ 上确定一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数. 当 x 取 $-r$ 或 r 时，对应的函数值都只有一个，但当 x 取开区间 $(-r,r)$ 的任一个数值时，对应的函数值就有两个，所以这个函数是多值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数. 对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant 0$”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加“$y\leqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leqslant 0$”作为对应法则，就可得到

另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法),这在中学里大家已经熟悉.其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x)$,$x\in D_f$ 的图形,如图1-3所示.图中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$的值域.

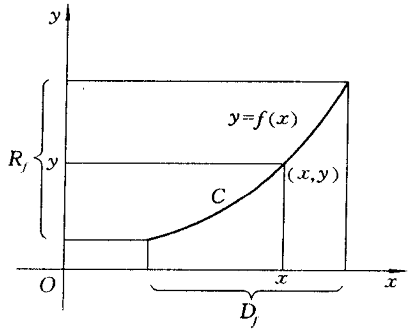


图 1-3

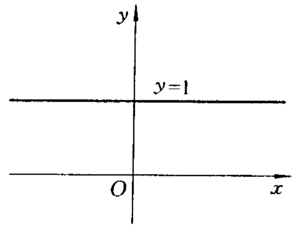


图 1-4

下面举几个函数的例子.

例 10 函数 $y=1$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\{1\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线(见图 1-4).

例 11 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数,其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=[0,+\infty)$(见图 1-5).

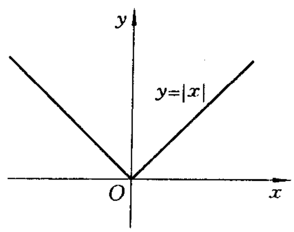


图 1-5

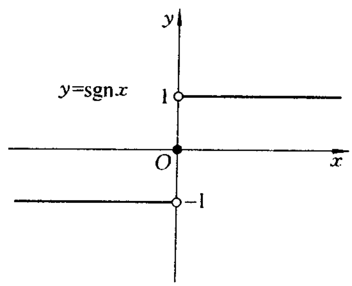


图 1-6

例 12 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$(见图 1-6).

例 13 设 x 为任意实数.不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$.

函数 $y=[x]$ 称为取整函数，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$(见图 1-7). 如

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,\quad [\sqrt{2}]=1,\quad [\pi]=3,\quad [-1]=-1,\quad [-3.5]=-4.$$

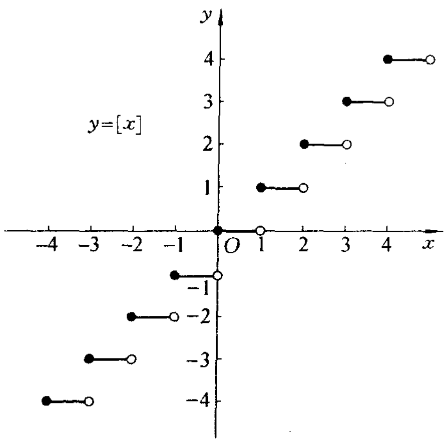


图 1-7

在例 11 和例 12 中看到，有的函数在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示，这种函数称为分段函数. 用几个式子来表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数的定义并无矛盾，而且有显示意义. 在自然科学、工程技术和经济学中，经常会遇到分段函数的情形.

例 14 某商场假日商品促销，商品价格优惠：标价 100 元以下，售价打 9 折；100 元以上 200 元以下，售价打 8 折；200 元以上，售价打 7 折. 设 y 为购物费用，x 为商品标价，则购物费用与商品标价的函数为

$$y=\begin{cases} 0.9x, & 0\leqslant x\leqslant 100, \\ 100\times 0.9+(x-100)\times 0.8, & 100<x\leqslant 200, \\ 100\times 0.9+100\times 0.8+(x-200)\times 0.7, & x>200. \end{cases}$$

2. 函数的几种特性

1)函数的有界性

如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 就是说对任何 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$.

有界函数的图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间(见图 1-8).

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上

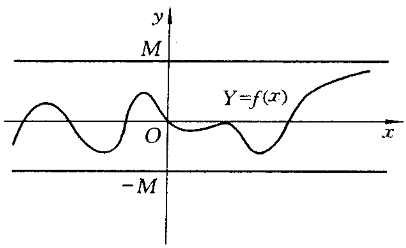


图 1-8

界. 图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

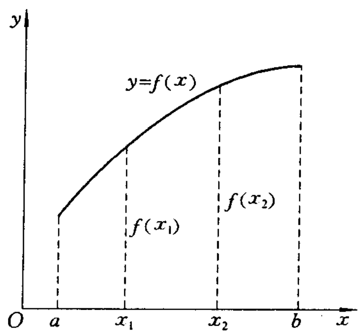
如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

容易证明，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

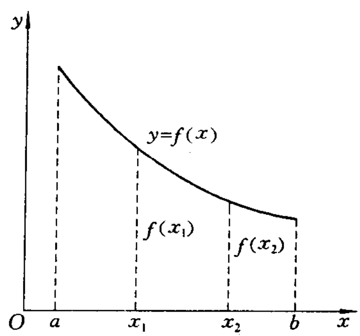
例如，就函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内来说，数 1 是它的一个上界，数 -1 是它的一个下界(当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界). 又 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立). 又如函数 $f(x)=\ln x$ 在开区间 $(0,1)$ 内没有下界，但有上界，例如 0 就是它的一个上界. 函数 $f(x)=\ln x$ 在开区间 $(0,1)$ 是无界的，但是 $f(x)=\ln x$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内是有界的，例如可取 $M=1$ 而使 $|\ln x|\leqslant 1$ 对于一切 $x\in(1,\mathrm{e})$ 都成立.

2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(见图 1-9(a))；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的(见图 1-9(b)).



(a)



(b)

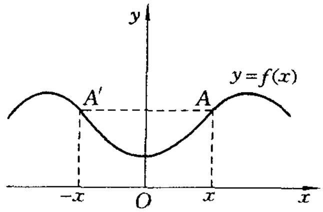
图 1-9

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

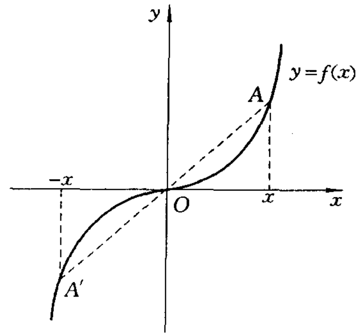
例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的，在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是单调减少的，在 $[0,2\pi]$ 上不是单调的.

3）函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**(见图 1-10(a))；如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**(见图 1-10(b)).



(a)



(b)

图 1-10

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 例如，$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4）函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**.

周期为 l 的函数图形特点(见图 1-11)：在函数的定义域内，每个长度为 l 的区间上，函数的图形有相同的形状.

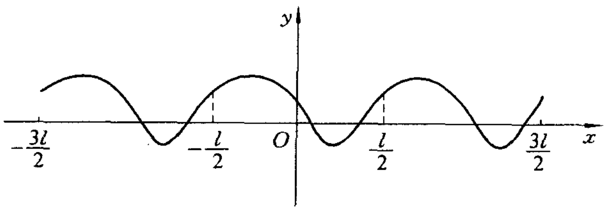


图 1-11

3. 反函数与复合函数

1）反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 因为 W 是函数值构成的数集，所以对于任一 $y_0\in W$，必定有 $x_0\in D$，使 $f(x_0)=y_0$ 成立，这样的 x_0 可能不止一个. 一

般地，对于任一数值 $y\in W$，D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应，这个数值 x 适合关系 $y=f(x)$. 这里如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按照函数概念，就得到一个新的函数. 这个新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，此函数的定义域为 W，值域为 D. 这就是说，反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由上面的说明知道，虽然 $y=f(x)$ 是单值函数，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 却不一定是单值的. 但如果在区间 I 上定义的函数 $y=f(x)$ 不仅单值，而且是单调的，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $W=\{y|y=f(x),x\in I\}$ 上是单值的. 这是因为，若 $y=f(x)$ 是 I 上的单调函数，则任取 I 上两个不同的数值 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 所以在 W 上任取一个数值 y_0 时，I 上不可能有两个不同的数值 x_1 及 x_2 使 $f(x_1)=y_0$ 及 $f(x_0)=y_0$ 同时成立.

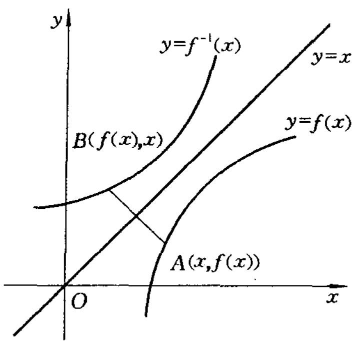


图 1-12

一般地，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的(见图 1-12). 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，则有 $b=f(a)$，按反函数的定义，有 $a=f^{-1}(b)$，故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的.

2) 复合函数

在进行函数研究时，把某些函数看作是由几个函数复合而成的复合函数，这样对函数的研究会带来方便. 下面先举一个具体例子说明什么叫复合函数.

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示 y 是 x 的函数，它的定义域为 $[-1,1]$. 如果我们引进辅助变量 u，把该函数的对应法则看作是这样的：首先对于任一 $x\in[-1,1]$，通过函数 $u=1-x^2$ 得到对应的 u 值；然后，对于这个 u 值，通过函数 $y=\sqrt{u}$ 得到对应的 y 值. 这时，我们便说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，辅助变量 u 则称为中间变量.

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2 上有定义，而 $W_2=\{u|u=\varphi(x),x\in D_2\}$，且 $W_2\subset D_1$，那么，对于任一 $x\in D_2$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in W_2$ 与之对应. 由于 $W_2\subset D_1$，因此对于这个 u 值，通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应. 这样对于任一 $x\in D_2$，通过 u 有确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，这个函数称为由 $y=f(u)$ 和 $u=$