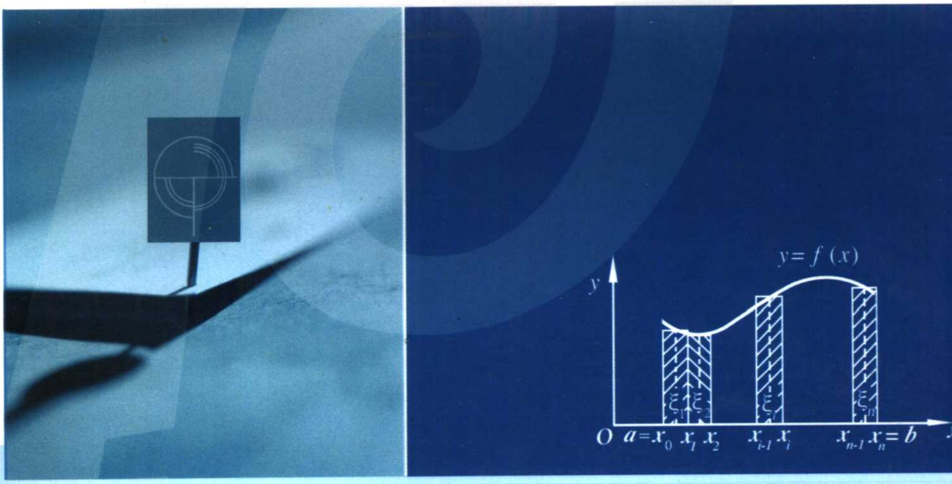
高职高专数学改革教材

Gaodeng Shuxue

高等数学

魏　莹　刘学才　主编

朱永银　夏俊炜　主审



华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

高职高专数学改革教材

高等数学

魏　莹　刘学才　主编
朱永银　夏俊炜　主审

华中科技大学出版社
（中国·武汉）

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/魏　莹　刘学才　主编. —武汉:华中科技大学出版社,2005年8月
ISBN 978-7-5609-3399-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①魏…　②刘…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

高等数学　　　　魏　莹　刘学才　主编

责任编辑:徐正达　　　　封面设计:刘　卉
责任校对:刘　竣　　　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:武汉科利德印务有限公司

开本:850mm×1168mm　1/32　　印张:7.75　　字数:183 000
版次:2005年8月第1版　　印次:2007年9月第3次印刷　　定价:13.80元
ISBN 978-7-5609-3399-3/O·366

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用等内容. 每节后配有习题，并在书后附有习题答案. 附录介绍了Mathematica 4.1 软件的使用、初等函数的常用公式、积分表及其使用.

本书根据高职高专院校的培养目标编写，适当降低了理论要求，注重数学思想与方法的培养，强调数学知识的应用，顺应了高职高专教育的改革和发展，适合作为高等职业技术学院及相当层次的其它院校教材.

前　言

为了推动我省高职高专数学教材建设，提高教学质量，在省教育厅高教处的直接领导下，湖北省高职高专数学研究会和华中科技大学出版社根据教育部关于高职教育改革的有关精神，特组织全省部分具有较高理论水平和丰富教学经验的骨干教师，编写了这套文理各专业使用的高等数学教革教材.

本教材在编写的过程中力求做到以应用为目的，以“必需、够用”为度，其特点是：以讲清概念为前提，强化应用为重点；在保持传统体系的基础上，力求有所创新；体现建模思想，注重数学软件应用的训练；强化实践技能，配有丰富的例题、习题及演算过程和参考答案. 本套教材包括《高等数学》和《高等数学学习指导》. 学习指导与教材配套，并有习题选解，方便学生学习参考.

《高等数学》由魏莹、刘学才担任主编，朱永银、夏俊炜担任主审，胡方富、陶筱平担任副主编，参加编写的还有山军、胡桂银、张汉萍、韩飞、谢涛、崔岩等. 全书由魏莹统稿.

武汉职业技术学院、湖北职业技术学院、鄂东职业技术学院、湖北财税职业学院、荆州职业技术学院、武汉电力职业技术学院、咸宁职业技术学院等对本套教材顺利出版发行给予了大力支持，本套教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢.

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评意见，使本套教材日臻完善.

编　者

2005 年 6 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数、极限与连续

高等数学的研究对象是变量，函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型．极限是高等数学中最重要的概念之一，是研究微积分学的重要工具，微积分中的许多重要概念，如导数、定积分等，都是通过极限来定义的．本章在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

第一节　函　　数

一、变量与区间

1．变量与常量

在研究实际问题、观察各种现象或过程时，人们经常遇到各种各样的量．在某一过程中，始终保持同一数值的量，叫做**常量**；而在过程中变化着的、可以取不同数值的量，叫做**变量**．

常量通常用字母 a,b,c 等表示，变量通常用字母 x,y,z 等表示．

例如，在自由落体运动中，物体经过的路程 s 和时间 t 是变量，而物体的质量 m 和重力加速度 g 是常量．

一个量是常量还是变量，与"过程"密切相关．例如，重力加速度 g，就小范围地区来说是常量，就大范围地区来说是变量．

任何一个变量，总有一定的变化范围．例如，在上述自由落体运动中，时间 t 的变化范围应是从运动开始的时刻 $t=0$ 到物体落地的时刻 $t=T$；又如，某天的最高气温为3℃，最低气温为零下2℃，那么这一天气温的变化范围为 $-2\sim3$℃．

2. 区间

设a,b为两个任意实数，且$a<b$，数集$\{x|a<x<b\}$称为**开区间**，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

在数轴上表示点a与点b之间的线段，但不包括端点a及端点b（图1-1）.

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

在数轴上表示点a与点b之间的线段，且包括端点a及端点b（图1-2）.

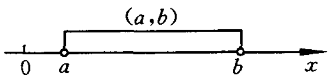


图1-1

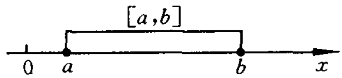


图1-2

类似地，有半开区间

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\} \quad 和 \quad (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

上述各区间都称为**有限区间**，a和b称为**区间的端点**，$b-a$称为**区间的长度**.

此外还有**无限区间**. 引进记号$+\infty$（读作正无穷大）和$-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示**无限区间**，例如：

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，在数轴上的表示如图1-3所示.

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，在数轴上的表示如图1-4所示.

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，它表示数轴上所有的点.

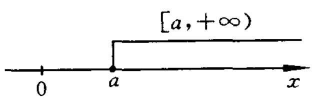


图1-3

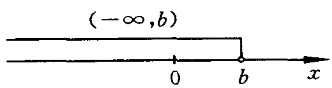


图1-4

3. 邻域

设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为**点a的δ邻域**，记作$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$. 点$a$叫做**这邻域的中心**，$\delta$叫做**这邻域的半径**.

因为$|x-a|<\delta$相当于$a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

它就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，a是这个开区间的中心，δ是这个开区间的长度的一半(图1-5).

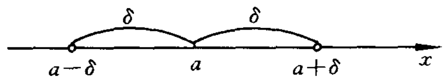


图1-5

如果仅仅研究变量在某一点邻近的变化情况，就需要用到邻域，有时需要把邻域中心去掉. 点a的δ邻域去掉中心a后，称为**点a的去心的δ邻域**，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里，$0<|x-a|$就表示$x\neq a$.

二、函数的概念

我们知道，金属圆圈的周长l与半径r的关系是$l=2\pi r$，当圆圈受热膨胀时，半径r发生变化，周长l也随之变化；当r在其变化范围内有一确定值时，周长l也就确定. 这时，我们说变量l与r之间具有函数关系.

1. 函数的定义

一般地，我们给出下列函数的定义.

定义1 设x和y是两个变量，D是一个数集. 如果对于D中的每一个数x，按照某个对应法则f，y都有确定的值和它对应，那么称y为定义在数集D上的x的函数，记作$y=f(x)$. x叫做自变

量，y 叫做因变量，数集 D 叫做函数的**定义域**.

当 x 取数集 D 中的数值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值**，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y|y=f(x),\quad x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

在同一个问题中，如果需要讨论几个不同的函数，为区别起见，须用不同的函数记号来表示. 例如以 x 为自变量，y 为因变量的函数也可表示为 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，$y=g(x)$ 等.

在函数的定义中，要求自变量在定义域内任意取定一个数值时，变量 y 有确定的值与之对应，至于有几个，并不限制. 如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，那么这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如上述函数 $l=2\pi r$，当取定 $r\in(0,+\infty)$ 时有惟一的 l 与之对应，它是一个单值函数. 又如函数 $y^2=x$，当取定 $x\in(0,+\infty)$ 时，有两个 y 值和它对应，它是一个多值函数，其中 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$ 是它的两个**单值支**.

以后凡是没有特别说明的函数，都是指单值函数.

2. 函数的两个要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素.

(1) 对应法则

函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示对应法则，即对定义域 D 中的每一个 x，按照法则 f 都有一个确定的 y 值与之对应.

例如 $f(x)=2x^2+3x$，就是对于任一 $x\in\mathbf{R}$，都有 $y=2x^2+3x$，f 确定的对应法则为 $f(\quad)=2(\quad)^2+3(\quad)$. 于是有

$$f(-1)=2\times(-1)^2+3\times(-1)=-1,$$

$$f(t+1)=2(t+1)^2+3(t+1)=2t^2+7t+5.$$

例 1 设 $y=f(x)=x\arctan\dfrac{1}{x}-1$，求 $f\left(\dfrac{4}{\pi}\right)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $f\left(\frac{4}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}\arctan\frac{\pi}{4}-1, f(1)=1\cdot\arctan 1-1=\frac{\pi}{4}-1,$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\arctan x-1.$

(2) 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定. 对于用解析式表示的函数，其定义域是使解析式有意义的一切自变量取值所构成的实数集.

例2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{16-x^2}+\sqrt{x+3}$； (2) $y=\ln(x^2-3x-10)+e^{-x}$；

(3) $y=\arcsin\frac{2x-1}{7}$.

解 (1) 由$16-x^2\neq 0$，得$x\neq\pm 4$；又由$x+3\geqslant 0$得$x\geqslant -3$. 所以函数的定义域为$[-3,4)\cup(4,+\infty)$.

(2) 由$x^2-3x-10>0$，得$x>5$或$x<-2$，所以函数的定义域为$(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$.

(3) 由$-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1$，得$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，即$-3\leqslant x\leqslant 4$，所以函数的定义域为$[-3,4]$.

两个函数只有当它们的定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才是完全相同的.

例如函数$y=\sin^2x+\cos^2x$与$y=1$，它们的定义域和对应法则完全相同，所以它们是相同的函数；又如函数$y=\ln x^2$与$y=2\ln x$，它们的定义域不同，所以它们不是相同的函数.

3. 函数的表示法

函数的表示方法，常用的有公式法、表格法和图像法三种.

(1) 公式法

公式法就是用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法，如$y=\frac{1}{x^2-1}$，$s=\frac{1}{2}gt^2$等. 有些函数在其定义域内要用几

个式子表示，这种在自变量的不同变化范围内用不同式子表示的函数称为**分段函数**. 例如

$$y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，图形如图 1-6 所示. 这个函数又叫做**符号函数**，记作 $y=\operatorname{sgn}x$，即

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

又如函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，图形如图 1-7 所示.

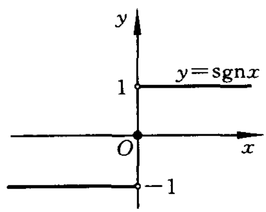


图 1-6

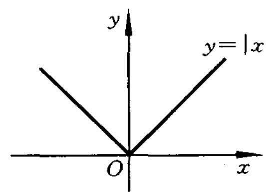


图 1-7

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ -x+1, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(4),f(-4),f(0)$.

解 $f(4)=\sqrt{4}=2,\quad f(-4)=-(-4)+1=5,$

$f(0)=\sqrt{0}=0.$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com