高等学校“十一五”规划教材

上册

高等数学

罗定军　叶惟寅　葛福生　滕利邦　编

第二版

化学工业出版社

高等学校“十一五”规划教材

高 等 数 学

上 册

第二版

罗定军　叶惟寅　葛福生　滕利邦　编

化学工业出版社

·北 京·

本书为高等院校理工科、特别是师范院校非数学类专业的高等数学教材．全书分上、下两册．上册包括一元函数的微积分与无穷级数；下册包括空间解析几何、多元函数的微积分与微分方程等内容．

本书努力体现少而精的原则，在不少内容的处理上有一定特色，例如导数与微分、定积分与不定积分的概念同时引入，既体现了它们的本质联系，又节省了篇幅．对应用类的例题与习题，突出了如何用数学方法加以分析处理的思想．叙述由浅入深，注重实用性，文字精练，通俗易懂，较好地适应此类专业学生的特点．与同类教材相比，本书篇幅紧凑，上下册共约 50 万字，基本内容可在一学年内教完．本书配有适当习题，并分为 A、B 两组，B 组题有一定难度，具有综合性、论证性强的特点，并在题解中配有提示，以适应日益增多的考研学生的需求，也便于教师使用．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上、下册）/罗定军等编．—2 版．—北京：化学工业出版社，2007.6

高等学校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-00346-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．罗…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 060015 号

责任编辑：唐旭华　　　文字编辑：郝英华

责任校对：顾淑云　　　装帧设计：郑小红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

850mm×1168mm　1/32　印张 18¾　字数 503 千字　　2007 年 6 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：32.00 元（上、下册）

第二版前言

《高等数学》第一版于 2003 年出版以来，已作为高等学校理工科数学教材使用过三年．根据任课老师们在教学实践中发现的一些问题，我们对第一版的内容作了认真的修改，使叙述更加严谨、完善，对习题及其答案中出现的一些错误以及印刷排版方面的一些问题都加以改正．

对热情关怀此书的广大读者和对第一版提出宝贵意见的同行们表示衷心的感谢．

编　者

2007 年 6 月

第一版前言

本书可作为高等院校理工科、特别是师范院校非数学类专业的高等数学教材．内容包括一元和多元函数的微积分、无穷级数、空间解析几何与常微分方程等，讲授全部内容约需 180 学时．

高等数学是相关学科专业的学生从事学习与研究必不可少的工具，掌握好运用数学分析的思想方法去解决各种应用问题，对他们将是长远受益的．为使学生能更好地理解与掌握微积分的数学思想及其实际背景，本书的选材力求少而精，根据我们多年来在南京师范大学和南京大学等校对上述专业类学生从事高等数学教学的体会，并参照教育部近期所颁发的硕士生入学考试对高等数学的基本内容和方法的要求，以确定本书各章节内容与习题的取舍．力图减少篇幅，让学生在学时紧凑的情况下能了解和初步掌握高等数学中最基本的概念、理论和方法，从而使此书尽可能适应当前此类专业高等数学教学的实际情况与需求．内容与初等数学紧密衔接，通过各种实例较自然地引入微积分中的许多新概念．文字通俗易懂，只要具有高中数学的基础即可阅读此书，从而也希望它能成为有广泛读者群的高等数学自学教材．

本书分为上、下两册，上册包含一元函数微积分与无穷级数，下册包含空间解析几何、多元函数微积分与常微分方程等内容．少数带“*”的节与段落可以根据所使用专业的需要决定取舍．习题分为 A、B 两组，A 组题以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；B 组题则有一定难度，综合性、论证性较强，希望能较好地适应日益增多的考研学生的需求，并在书末答案部分对这部分题给出提示，以便于教师和学生参考．

本书第一章到第四章由南京师范大学罗定军教授执笔，第五、第十两章由南京师范大学叶惟寅教授执笔，第六、第七两章由南京

大学滕利邦教授执笔，第八、第九两章由南京师范大学葛福生教授执笔，全书统一由罗定军修改完稿．希望通过我们的努力能使这部教材具有一定的特色和通用性、可读性．当然，限于编者的水平，书中肯定会有不少疏漏和不当之处，恳请广大读者不吝指出．

编　者

2002 年 12 月

上册目录

第一章 函数与极限

现实世界中的各种事物，无一不在一定的范围内运动变化，在它们运动变化的过程中总存在着一定的数量关系. 从数学的角度来说，往往是避开这些事物的具体含意而将其抽象为函数关系来加以研究. 高等数学就是研究变量的数学，它着眼于分析在基本变量变化的特定过程中，随之而变的变量的变化趋势，这就是极限的概念. 下面可以看到，连续性、微分、积分和无穷级数等都以极限为基础，极限的思想方法贯穿于高等数学的始终. 在这一章我们重点叙述极限及与之相关的一些概念与方法，掌握好本章的内容对以后的学习是很关键的.

第一节 函数概念

一、变量与函数

一个量可以是常量，也可以是变量，它应依照具体情况而定. 例如一个人从小孩到成人的成长过程中，其身高就是一个变量，但如果界定在一天的范围内，其身高变化极其微小，通常就把它视为常量. 数学中所讨论的量，无论是常量或变量，往往只分析它是否或怎样变化，而不顾及其具体意义和单位. 以后我们常用字母 x, $y,z,t,\cdots$表示变量，用 $a,b,c,d,\cdots$表示常量. 它们的具体取值都是在实数的范围内（复变函数中才讨论变量取复数值的情形），且根据具体情况，有些变量的变化往往受到一定的限制，譬如介于两个实数之间，这就对应于区间(a,b)或$[a,b]$，前者称为开区间，后者称为闭区间，分别代表满足不等式 $a<x<b$ 或$a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合. 类似地，记号$(a,b]$和$[a,b)$分别代表左开右闭和右开左闭的区间. 还可以有无穷区间$(a,+\infty)$（或$[a,+\infty)$）和$(-\infty,b)$

(或$(-\infty,b]$)，它们分别表示 x 在实数轴上变化右方或左方不受限制. $(-\infty,+\infty)$则代表全体实数的集合，也记为 $\mathbf{R}$. 任一实数 x 对应于 x 轴上的一点，因此习惯上常称为**点 x**. 以上这些符号都是中学数学教材中引用过的，这里只是简要的提一下.

在高等数学中经常会用到**邻域**这一概念.

定义 1.1 设 a 为一个实数，δ 为一正数，满足不等式

$$|x-a|<\delta \text{ 或 } (a-\delta)<x<(a+\delta)$$

的实数 x 的全体称为点 a 的 **δ 邻域**，a 称为其**中心**，δ 为其**半径**. 满足不等式

$$0<|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体称为点 a 的**空心 δ 邻域**，中心、半径同上.

与 δ 邻域不同的是，空心 δ 邻域不包含点 a，它在讨论极限过程时要特别用到.

集合与映射也是中学教材中引入的概念，现利用它们来给出一元函数的定义.

定义 1.2 设 A,B 是两个非空集合，若对每一 $x\in A$，依照一定的法则 f 有惟一确定的 $y\in B$ 与之对应，则称 f 为 A 到 B 的一个**映射**，记为

$$f:\ A\to B,\ \text{或}\ f:\ x\mapsto y=f(x),\ x\in A,$$

其中 y 称为 x 在映射 f 之下的**象**，x 称为 y 的**原象或逆象**. 集合 A 称为 f 的**定义域**，记为 $D(f)$. 当 x 遍历 A 时其象 y 的全体所组成的集合称为 f 的**值域**，记为 $R(f)$或 $f(A)$，亦即

$$R(f)=f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}.$$

定义 1.3 当 A，B 均为实数集$\mathbf{R}$内的集合时，映射 f 称为**一元函数**. 其定义域、值域的含义与记号同上. 这时把 x 称为**自变量**，y 称为**因变量** 或自变量 x 的**函数**.

“一元”是指自变量只有一个（变量亦称**变元**），以后还要讨论多个自变量的函数，即多元函数. 第一章到第四章以一元函数为研究对象，以下简称为函数，它实际上也是**函数关系**的简称，因为 f

代表了变量 y 依赖于变量 x 而变化的一种关系.

例 1 圆的面积 S 是其半径 r 的函数

$$S=\pi r^2.$$

它的定义域为 $r>0$，值域为 $S>0$.

例 2 真空中的自由落体运动所经过的距离 s 依赖于时间 t 的规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

它是以 t 为自变量，s 为因变量的函数. 设在时刻 T 时落到地面，则其定义域为 $[0,T]$.

例 3 x 的绝对值记为 $|x|$，它是 x 的函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & 当\ x\geqslant 0, \\ -x, & 当\ x<0. \end{cases}$$

当然，它也可以用一个式子 $y=\sqrt{x^2}$ 来表示，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,+\infty)$.

例 4 函数

$$y=\begin{cases} 1, & 当\ x>0, \\ 0, & 当\ x=0, \\ -1, & 当\ x<0 \end{cases}$$

称为 x 的**符号函数**，记为 $\operatorname{sgn} x$，它在 $\mathbf{R}$ 上定义，值域为数集 $\{1,0,-1\}$.

例 3、例 4 中的函数都出现了在其自变量的不同变化范围内用不同的数学式子来表达的情况，这种函数常称为**分段函数**.

在平面直角坐标系 $\{Oxy\}$ 中，可以画出点集合

$$\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D(f)\}$$

来直观地表示函数 $y=f(x)$，称为函数的**图形**或**图像**. 图 1.1 的右

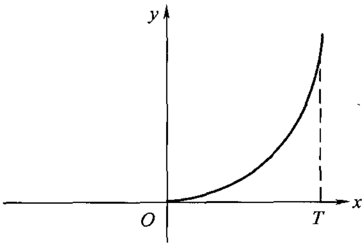

图 1.1

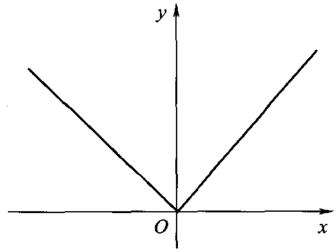

图 1.2

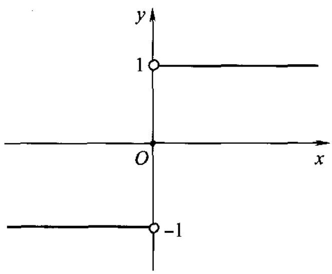

图 1.3

半段抛物线表示例 2 的图形，例 3 和例 4 的图形分别如图 1.2 和图 1.3 所示.

二、函数的运算

对函数可作四则运算. 设 f，g 分别为定义于 $D(f)$,$D(g)$ 上的函数，它们相加、减、乘和除所得的函数分别记为 $f+g$，$f-g$，fg 和 $\dfrac{f}{g}$，其定义如下：

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\qquad x\in D(f)\cap D(g),$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),\qquad x\in D(f)\cap D(g),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\qquad x\in D(f)\cap D(g)\text{且 } g(x)\neq 0.$$

函数 f 乘（或除）以数 k 仍得一函数，可以作为两函数相乘（或除）的特例，只要令 $g(x)\equiv k$，视为常函数即可. 多于两次的四则运算依此类推. 由映射 f：$A\to B$ 和 g：$B\to C$ 可以确定复合映射 $g\circ f$：$A\to C$，相应于映射的复合，函数之间也可作复合运算. 设有两函数 f：$A\to\mathbf{R}$ 与 g：$B\to\mathbf{R}$，且 $R(f)\subseteq B$ 则有复合映射

$$\varphi=g\circ f\text{：}A\to\mathbf{R}.$$

这就是说，对每一 $x\in A$，有惟一的 $u=f(x)$ 与之对应，且 $u\in B$（因 $R(f)\subseteq B$），又有惟一的 $y=g(u)$ 与之对应，即有

$$y=\varphi(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x)),\quad x\in A,$$

其中“$\circ$”为**复合运算**，u 称为**中间变量**. 这时所确定的函数 $y=\varphi(x)$ 称为函数 $y=g(u)$ 与 $u=f(x)$ 的**复合函数**.

在函数研究中，复合函数的概念非常重要，因为一个形式复杂的函数往往可以视为两个或更多个简单函数复合而成，这样在后面对它求极限、微分和积分时就可很方便地进行. 因此应学会如何把复杂函数分解为一些简单函数的复合.

例 5 $y=a^{\sin\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$ 可以视为函数 $y=a^u$，$u=\sin v$，$v=1+w$ 和 $w=\dfrac{1}{x^2}$ 四个函数依次层层复合而得，且易见每两层复合时内层函数的值域均包含在外层函数的定义域内，复合运算可以进行.

注 两函数复合的要求 $R(f)\subseteq B$ 可以放宽为 $R(f)\cap B$ 非空，则复合函数仍有意义，但定义域可能会缩小一些. 例如，$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2-1$ 的复合函数 $y=\arcsin(x^2-1)$，其定义域为 $|x^2-1|\leqslant 1$，即或 $|x|\leqslant\sqrt{2}$，它比 $u=x^2-1$ 的定义域 $x\in\mathbf{R}$ 要小得多. 如果 $R(f)\cap B$ 为空集，则复合无意义，例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合. 因为后者的值域为 $u\geqslant 2$，它与 $\arcsin u$ 的定义域 $|u|\leqslant 1$ 的交集为空集.

函数的逆运算，即反函数的概念可作为映射的逆的特殊情形，对集合 A 的每一 x，如映射 f：$x_1\mapsto x$，则称 f 为 A 的**恒同映射**，记为 I_A. 对于两集合 A 与 B 之间的映射 f：$A\to B$，若存在映射 g：$B\to A$，使得

$$g\circ f=I_A,\quad f\circ g=I_B,\tag{1.1}$$

则称映射 g 为 f 的**逆映射**，记为 $g=f^{-1}$. 这时也称 f 为**可逆映射**.

A，B 均为 $\mathbf{R}$ 内的集合时，上述 $g=f^{-1}$ 就称为 f 的**反函数**或**逆函数**，也常说 f 是**可逆的**或**存在反函数**.

例如，指数函数 $y=f(x)=a^x$（其中 a 为不等于 1 的正数）的反函数为对数函数，即 $x=f^{-1}(y)=\log_a y$. 由上述定义可知，函数与其反函数是互逆的，亦即指数函数也是对数函数的反函数.

定义 1.2 中要求有**惟一的** y 与 x 对应，这就是说，我们所讨论

的函数都是**单值的**. 因此反函数存在的条件 (1.1) 未必满足，例如 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$. 由于 $x+2k\pi$，$k=0$，$\pm1,\cdots$ 对应于同一个 y 值，因此对任一 $y\in[-1,1]$就有无穷多个 x 与之对应，故不能确定反函数（这时它是**多值函数**，这里不予考虑）. 故限定 $y=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，这时 x 与 y 之间一一对应，使条件 (1.1) 得以满足，从而定义了反函数 $x=\arcsin y, y\in[-1,1]$.

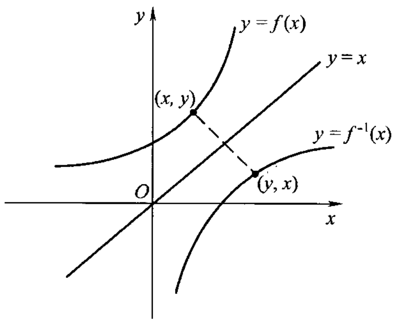

图 1.4

条件 (1.1) 满足时，$y=f(x)$的反函数为 $x=f^{-1}(y)$. 但习惯上总以 x 表示自变量，y 表示因变量，从而把 f^{-1} 所代表的函数关系写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 因此在同一个坐标系 $\{Oxy\}$ 中，函数 $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$ 是对称的，见图 1.4. 由此也说明函数 f 与 f^{-1}互为反函数.

三、函数的几种特性

考虑函数 $y=f(x)$，其定义域 $D\subseteq\mathbf{R}$. 初等数学中接触较多的是奇偶性与周期性，这里再简述一下.

1. 奇偶性　设 D 关于原点对称，故 $x\in D$ 时 $-x\in D$. 若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**，若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**. 对幂函数 $y=x^n$，当 n 为偶数时显然为偶函数，n 为奇数时，则为奇函数，由此得名. 但偶（奇）函数绝不仅限于幂函数，例如 $y=\sin x$ 为奇函数，$y=\cos x$ 为偶函数，$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$为偶函数，等等. 最后一个是双曲线函数的一种，下一段将会介绍. 易见偶函数的图形关于 y 轴为对称，奇函数的图形则关于原点为对称（即以原点为中心旋转角度 π 时，图形保持不变）.

2. 周期性　众所周知，三角函数具有周期性，如 $\sin x$，$\cos x$ 以 2π 为周期，$\tan x$，$\cot x$ 以 π 为周期. 一般地，对于 $f(x)$，若存在正常数 l，使对任意 $x\in D(x\pm l\in D)$ 都有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为其**周期**，通常所说的周期是指**最小**周期，即使上式成立的最小正数 l. 对于周期函数来说，只要画出其一个周期内的图形，然后一次次地把它向左、向右水平地移动距离 l，即可得出整个图形.

例 6　取整函数 $y=[x]$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 它的图形如图 1.5. 而函数 $y=x-[x]$，其图形如图 1.6，显然它是以 1 为周期的周期函数. 这两个函数的取值分别代表 x 的整数部分与小数部分.

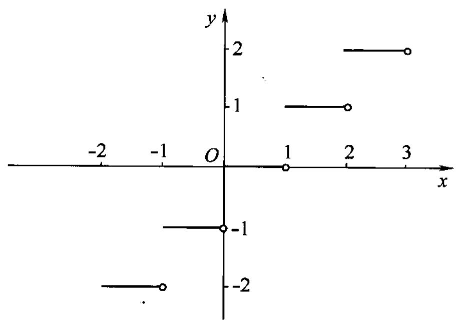

图 1.5

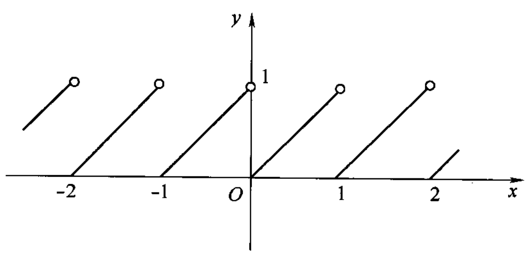

图 1.6

下面再介绍高等数学中应用较多的函数的两种性质.