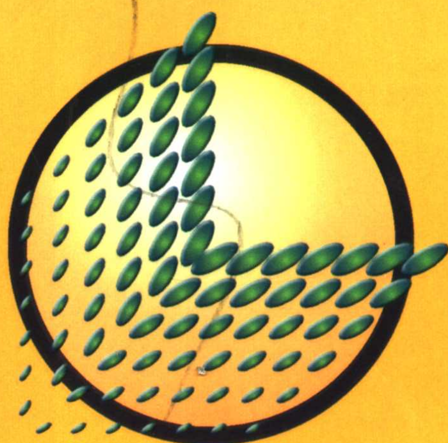
概率论与数理统计

马 戈 主编



国防工业出版社
National Defense Industry Press

概率论与数理统计

021/292
2007

概率论与数理统计

马戈 主编

国防工業出版社
·北京·

内容简介

本书是高等院校非数学专业的概率论与数理统计教材。全书共分9章,内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、MATLAB在统计分析中的应用。本书注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养,每节均精选了相当数量的例题、基本练习题(A组)和提高练习题(B组),每章配有总复习题,并在书后附有习题答案与提示,便于教师教学和学生自学。

本书可作为高等理工科院校、农医、经济、管理等专业的概率统计课程的教材,亦可作为实际工作者的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/马戈主编.—北京:国防工业出版社,2007.8

ISBN 978-7-118-05274-9

Ⅰ.概… Ⅱ.马… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第108500号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 16¼ 字数 369千字

2007年8月第1版第1次印刷 印数1—4000册 定价28.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　　言

概率论与数理统计作为现代数学的重要分支，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有广泛的应用，特别是近年来，随着计算机技术的迅速普及，概率统计在经济、管理、金融、医学、生物、保险等领域的应用更是得到长足发展。正是由于概率统计这种广泛的应用性，使它成为各类专业大学生的最重要的数学必修课之一。

进入21世纪以来，高等教育已经转化成一种在终身学习背景下的基础学科教育，很多理工科院校结合社会需求，提出了培养应用型复合人才的目标定位。我们结合近年来概率统计精品课程的建设实践和教改体会，编写了本教材。

本教材是针对非数学专业的学生学习"概率论与数理统计"课程而编写的，全书共分9章，前4章为概率论，后4章为数理统计，最后1章介绍MATLAB软件在统计分析中的应用。在教材取材和编写过程中，做了以下几个方面的努力。

(1)在概念、定理及理论叙述上，力求准确、精炼，在符号的使用上标准、规范。

(2)注重概率论、数理统计应用的广泛性，精选例题和习题，用"巧妙的思维"和"有趣的结论"吸引学生，帮助学生从不同的侧面理解概念，掌握方法。

(3)增加数学试验教学内容，引导学生利用现代技术成果解决具体问题，提高学生的数学应用能力。

(4)为帮助学生更好地掌握课程内容，本书每节分层次配有A、B两组习题，A组为基本练习题，B组是带有一定难度的提高练习题。另外，每章还配有复习题，以供学生巩固所学知识。

本书由马戈主编，并对全书进行统稿。具体编写情况是：第1章、第2章由吴宏锷执笔；第3章、第4章由梁瑛执笔；第5章、第6章、第7章由马戈执笔；第8章、第9章由王喜平执笔。

由于编者水平所限，书中难免有不妥和错误之处，恳请同行及读者批评指正。

编　者

2007年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门应用数学学科，具有严格的概念体系和严密的逻辑结构，其应用十分广泛，是科技、经济、管理等领域工作者必备的数学工具。本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基础、最重要的概念之一。

1.1　随机事件

一、随机现象和随机试验

在自然界和社会生活中会发生各种各样的现象，若从结果能否预知的角度去划分，可分为两大类。一类是在一定条件下必然发生（或必然不发生）的现象，称为**确定性现象**。例如，"早上，太阳总是从东方升起"、"同性电相排斥，异性电相吸引"等。我们已学过的微积分、线性代数等数学学科以确定性现象为研究对象。另一类是我们事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**。例如，抛掷一枚硬币，抛掷前我们不能事先预知将出现正面还是反面；又如某人参与抽奖，此人能否中奖在抽奖前也不能断言。类似的现象在实际生活中还有很多，例如，明天是否会下雨？某种股票明天的价格是多少？近期汽车的价格是否会下调？这些问题往往事先不能准确预测，但却与我们的切身利益密切相关。

由于随机现象的结果事先不能预测，初看起来，似乎毫无规律可言。然而在同一随机现象大量重复出现时，人们发现其结果会呈现出某种规律性。例如，抛掷一枚硬币，我们不能断言，一次抛掷是出现正面还是反面，但多次重复抛掷时，就会发现出现正面和出现反面的次数大致相等。随机现象在大量重复出现时所呈现出的这种规律性，我们称为随机现象的**统计规律性**。概率论和数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门学科。

为了对随机现象的统计规律性进行研究，人们常常是先通过试验来进行观察。例如，观察某射手对固定目标进行射击的情况；观察某地区夏季暴雨次数；记录急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均为试验。上述试验具有以下共同特征：

（1）可重复性：试验可以在相同条件下重复进行；

（2）可观察性：每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

（3）不确定性：每次试验将要出现的结果是不确定的，事先不能准确预知。

在概率论中，我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**，简称**试验**，记为 E。

二、随机事件与样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的，但其所有可能出现的结果是明确的，我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**，用 ω 表示；它们的全体称为**样本空间**，用 Ω 表示。

例 1.1 (1)E_1:抛掷一枚硬币,观察正反面出现的情况,其样本空间为

$$\Omega_1 = \{正面,反面\}。$$

(2)E_2:抛掷一枚匀称的骰子,观察其出现的点数,其样本空间为

$$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}。$$

(3)E_3:记录急救电话一昼夜接到的呼叫次数,其样本空间为

$$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}。$$

(4)E_4:在一批灯泡中任取一个,测试其寿命 t,其样本空间为

$$\Omega_4 = \{t \mid t \geqslant 0\}。$$

在随机试验中,人们通常关心的是满足某种条件的样本点的集合,例如,在 E_4 中若规定使用寿命超过600h 为正品,则满足这一条件的样本点组成 Ω_4 的一个子集:$A = \{t \mid t > 600\}$。我们把随机试验的样本空间的子集,称为**随机事件**,简称**事件**,事件通常用大写英文字母 A,B,C 等表示。在每次试验中,当且仅当这一事件中的一个样本点出现时,称这一**事件发生**。例如,在 E_2 中,可用 A 表示"出现的点数是偶数"这个事件,若试验结果是"出现6 点",就称事件 A 发生。

特别地,如果一个事件只包含一个样本点,则称此事件为**基本事件**。例如,在 E_1 中,有两个基本事件 $\omega_1 = \{正面\}$,$\omega_2 = \{反面\}$。

作为特殊情况,在随机试验中必然发生的事件,称为**必然事件**,在随机试验中一定不发生的事件,称为**不可能事件**。必然事件一定包含样本空间 Ω 中的所有样本点,因此必然事件与样本空间 Ω 相对应,而空集$\varnothing$不包含 Ω 中的任何样本点,所以不可能事件与空集$\varnothing$相对应。这样一来,必然事件就记作 Ω,不可能事件就记作$\varnothing$。

例如,在 E_2 中,若记事件 $A = \{点数是5\}$,$B = \{点数是正数\}$,$C = \{点数大于6\}$,则 A,B,C 都是事件,其中 A 是一个基本事件,B 是一个必然事件,C 是一个不可能事件。

三、事件的关系与运算

由于事件是一个集合,所以事件之间的关系和运算与集合之间的关系和运算类同,只是这些关系和运算在概率论中赋予了新的含义。

设试验 E 的样本空间为 $\Omega,A,B,A_k(k = 1,\cdots,n,\cdots)$ 为 Ω 中的事件。

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致 B 发生,则称**事件 B 包含事件 A**(或称 A 是 B 的子事件),记为:$A \subset B$ 或 $B \supset A$,如图 1-1 所示。若 $A \subset B$,则 A 中的每一个样本点都包含在 B 中。

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称**事件 A 与 B 相等**(或 A 与 B **等价**),记为 $A = B$。

2. 事件的交事件(或积事件)

"事件A、事件B同时发生"的事件称为事件A、事件B的**交事件(或积事件)**,记为$A \cap B$ 或 AB,如图 1-2 所示。显然,$AB = \{\omega \mid \omega \in A 且 \omega \in B\}$。

例如,在例1.1 中的 E_2 中,事件 $A = \{点数不大于3\}$,事件 $B = \{点数为奇数\}$,则 $AB = \{1,3\}$。

类似地，把“n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生”的事件，称为这n个事件的交事件，记为$A_1\cap A_2\cdots\cap A_n$或$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$或$A_1A_2\cdots A_n$。

把“可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生”的事件，称为可列个事件的交事件，记为$A_1\cap A_2\cdots\cap A_n\cdots$或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$或$A_1A_2\cdots A_n\cdots$。

3. 事件的并事件（或和事件）

“事件A与B至少有一个发生”的事件称为事件A、事件B的并事件（或和事件），记为$A\cup B$，如图 1－3 所示。显然，$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$或$\omega\in B\}$。

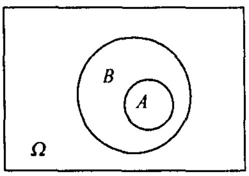


图 1－1　$A\subset B$

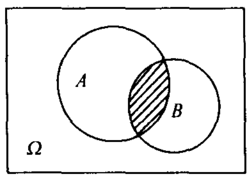


图 1－2　$A\cap B$

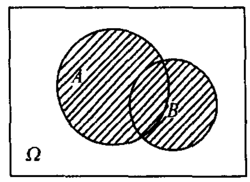


图 1－3　$A\cup B$

例如，在例 1.1 中的E_2中，若$A=\{$点数为奇数$\}$，$B=\{$点数不大于3$\}$，则$A\cup B=\{1,2,3,5\}$。

类似地，把“n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生”的事件称为这n个事件的并事件，记为$A_1\cup A_2\cdots\cup A_n$或$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

把“可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生”的事件称为可列个事件的并事件，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$或$A_1\cup A_2\cup\cdots A_n\cup\cdots$。

4. 差事件

“事件A发生而事件B不发生”的事件称为事件A与事件B的差，记为$A-B$，如图 1－4 所示。显然，事件$A-B=\{w\mid w\in A$但$w\notin B\}$。例如，在例 1.1 中的E_2中，若$A=\{$点数为奇数$\}$，$B=\{$点数为1$\}$，则$A-B=\{3,5\}$。

5. 互不相容事件（互斥事件）

如果在任何一次试验中，事件A与事件B均不能同时发生，即$AB=\varnothing$，则称事件A、事件B是互不相容事件或互斥事件，如图 1－5 所示。例如，在例 1.1 的E_2中，若$A=\{$点数大于3$\}$，$B=\{$点数小于3$\}$，则A、B两事件是互不相容事件。

显然，样本空间中每个样本点构成的基本事件之间是互不相容的。

6. 对立事件（补事件）

若事件A、事件B满足$A\cup B=\Omega$且$AB=\varnothing$，则称事件A、事件B互为对立事件或补事件，记为$B=\overline{A}$，如图 1－6 所示。

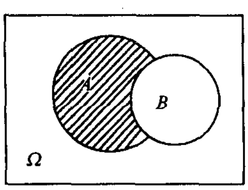


图 1－4　$A-B$

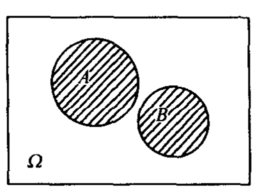


图 1－5　$A\cap B=\varnothing$

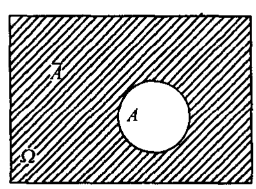


图 1－6　$\overline{A}=\Omega-A$

显然,$\overline{A}$ 表示“事件 A 不发生”,因此差事件 $A-B$ 也可记为 $A\overline{B}$。另外,由对立事件定义可知,对立事件一定是互斥事件,但互斥事件并不一定是对立事件。在例 1.1 的试验 E_2 中,设 $A=\{点数大于3\}$,$B=\{点数小于3\}$,$C=\{点数不大于3\}$,则 C 与 A 是对立事件,而 B 与 A 是互斥但非对立事件。

可以验证,事件作为样本点的集合,也满足如下的运算规律:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$$A(B\cup C)=AB\cup AC;$$

(4) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

对于有限个或可列个事件,对偶律也成立。

例 1.2　在一次抽奖活动中,甲、乙、丙三人各随机抽取一张奖券,设 A 表示“甲中奖”,B 表示“乙中奖”,C 表示“丙中奖”,则下列事件用 A,B,C 的运算关系可表示如下。

(1) 甲未中奖:$\overline{A}$;

(2) 甲、乙中奖,丙未中奖:$AB\overline{C}$;

(3) 甲、乙、丙三人均中奖:ABC;

(4) 甲、乙、丙至少有一人中奖:$A\cup B\cup C$;

(5) 甲、乙、丙恰好有一人中奖:$A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}$;

(6) 甲、乙、丙恰有两人中奖:$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(7) 甲、乙、丙至少有两人中奖:$AB\cup AC\cup BC$;

(8) 甲、乙、丙三人均未中奖:$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(9) 甲、乙、丙至多有一人中奖:$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

例 1.3　证明 $B-A=(\overline{AB})-(\overline{\overline{A}B})$

证明:
$$\begin{aligned}\overline{AB}-(\overline{\overline{A}B})&=\overline{AB}(\overline{\overline{\overline{A}B}})=\overline{AB}(\overline{A}B)\\&=(\overline{A}\cup\overline{B})\overline{A}B=\overline{A}\,\overline{A}B\cup\overline{B}\,\overline{A}B\\&=\overline{A}B\cup\varnothing=\overline{A}B=B-A\end{aligned}$$

习题　1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间与随机事件 A。

(1) 掷两枚硬币,观察出现正、反面的情况;事件 A 表示“恰有一次出现正面”;

(2) 在某段时间内,观察某交通路口过往汽车的数量,事件 A 表示“汽车数量不大于 7”;

(3) 某人向半径为 R 的靶子上射击,观察弹着点的位置,事件 A 表示“弹着点离靶心的距离不大于 $r(r\leqslant R)$。

2. 掷两枚匀称的骰子,观察其出现的点数。A 表示“两枚骰子点数相等”,B 表示“两枚

骰子点数均小于 3”，C 表示“两枚骰子点数均为奇数”，用集合表示下列各事件：$A,B,C,AB,A\cup B,A-C$。

3. A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，试写出事件 A 的对立事件。

4. 用事件 A,B,C 的运算关系式表示下列事件：

(1) A 发生，B,C 都不发生；

(2) A,B 都发生，C 不发生；

(3) 3 个事件都发生；

(4) 3 个事件中至少有一个发生；

(5) 3 个事件都不发生；

(6) 不多于一个事件发生；

(7) 3 个事件至少有两个发生。

5. 一批产品中有合格品也有废品，从中有放回地抽取（将产品取出一件观察后再放回）3 件产品，以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示“第 i 次抽到废品”，试以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示下列事件：

(1) 第 1 次和第 2 次至少抽到一件废品；

(2) 只有第 1 次抽到废品；

(3) 3 次都抽到废品；

(4) 至少有一次抽到合格品；

(5) 只有两次抽到废品。

6. 若事件 A,B,C 满足 $A\cup C=B\cup C$，问 $A=B$ 是否成立？

7. 计算下列随机试验样本空间的样本点（基本事件）总数：

(1) 同时掷 3 枚硬币，观察硬币出现正、反面的情况；

(2) 从 20 名学生中随机挑选 2 名学生参加某项活动，观察挑选的情况；

(3) 甲、乙、丙 3 名学生随机地分配到 6 个房间中去，假设每个房间只允许住一人，观察分配的情况。

8. 证明：

(1) $(A\cup B)-B=A\overline{B}$；

(2) $(A-\overline{B})(\overline{A\cup B})=\varnothing$。

1.2　随机事件的概率

在实际问题中，不仅要知道随机试验可能出现的结果，更重要的是研究各种结果发生的可能性的大小，从而揭示其内在的规律性，“概率”的概念就是源于这种需要而产生的。

一、概率的统计定义

一个随机事件在一次试验中是否会发生，事先不能确定。但是，它发生的可能性大小是可以进行度量的。历史上，研究随机现象统计规律最著名的试验是抛硬币试验，表 1－1 给出了相关试验记录（其中 n_A 表示出现正面的次数，$f_n(A)$ 表示出现正面的频率）。

表 1－1　历史上的抛硬币试验

试验者	抛掷次数 n	n_A	$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从表 1－1 中可以看出，当抛掷硬币次数 n 较大时，“出现正面”的频率 $f_n(A)$ 总是围绕着 0.5 上下波动，且随着 n 的增加越来越稳定于 0.5。

由此可见，频率的稳定值与事件发生的可能性大小有着内在的必然联系，一方面频率的稳定值说明事件发生的可能性大小确实是一种客观存在，这就是前面所讲的随机事件的统计规律性；另一方面，频率的稳定值对事件发生的可能性大小提供了经验解释。由此，引入下面的定义。

定义 1.1　设 E 是随机试验，若试验的重复次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总在区间 $[0,1]$ 上的某一个确定的常数 p 附近作微小摆动，并逐渐稳定于 p，则称常数 p 为事件 A 发生的概率，一般记为 $P(A)$。

不难证明，概率作为频率的稳定值，有如下性质：

(1) 对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

(3) 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$。

二、概率的公理化定义

概率的统计定义虽然简单直观，但在理论上还存在着严重的缺陷。1933 年，苏联数学家柯尔莫戈洛夫在他的《概率论的基本概念》一书中，提出了现在已被广泛接受的概率公理化定义，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上，使概率论也从此确立了它作为一门独立数学分支的地位。

定义 1.2　设 Ω 是给定的随机试验的样本空间，对任意一个事件 $A(A \subset \Omega)$，赋予一个实数 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足：

公理 1(非负性)　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

公理 2(规范性)　$P(\Omega)=1$；

公理 3(可列可加性)　对任意可列个两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ **为随机事件** A **的概率**。

由概率的公理化定义，可以推知概率有如下一些重要性质。

性质 1　$P(\varnothing)=0$。

证明：令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$，且

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com