梯田

高等教育自学考试同步辅导·同步训练（二）

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学

（工专）

课程代码 0022

[2006年版]

组编 全国高等教育自学考试指定教材辅导用书编委会

中央民族大学出版社

梯田

高等教育自学考试同步辅导·同步训练（二）

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学

（工专）

课程代码 0022

[2006年版]

组编 全国高等教育自学考试指定教材辅导用书编委会

编者/杨腾飞

中央民族大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等教育自学考试同步辅导/同步训练系列．2，公共课．2/邓肯主编．—北京：中央民族大学出版社，2006.11

ISBN 7-81108-169-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.邓…　Ⅲ.高等教育—自学考试—自学参考资料

Ⅳ.G726.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 132909 号

高等教育自学考试同步辅导/同步训练(公共课)

总 主 编　邓　肯

责任编辑　郑玉琴

封面设计　于　冰

出 版 者　中央民族大学出版社

北京市海淀区中关村南大街 27 号　邮编:100081

电话:68472815(发行部)　传真:68932751(发行部)

68932218(总编室)　68932447(办公室)

发 行 者　全国各地新华书店

印 刷 者　北京拓瑞斯印务有限公司

开　　本　880×1230(毫米)　1/32　印张:27

字　　数　600 千字

印　　数　3000 册

版　　次　2006 年 11 月第 1 版　2006 年 11 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 7-81108-169-5/G・423

定　　价　53.00 元

出 版 说 明

"梯田"系列自考辅导图书是全国自考命题研究中心力邀北京大学、清华大学、中国人民大学、北京师范大学、中国政法大学、北京外国语大学、武汉大学、华东师范大学、浙江大学、南开大学、山东大学等主考院校的权威专家执笔，紧扣"自学考试大纲"和"指定教材"编写，遵循自学的学习特点和规律，以教育测量学的重要理论为指导，为莘莘学子打造的专门用于备考的辅导用书。

本书是全国高等教育自学考试最新指定教材《高等数学（工专）》（公共课程）（2006年版）的配套辅导用书。

本书的编写依据：

全国高等教育自学考试指导委员会组编的最新指定教材《高等数学（工专）[附：高等数学（工专）自学考试大纲]》（吴纪桃、漆毅主编，北京大学出版社出版，2006年版）。

编写具体内容所做的重要基础工作：

1．深入分析研究考试大纲的要求和新命题精神；

2．深入分析研究最新高等教育自学考试全国统一命题考试的题型、分值分布、答题要求及评分标准；

3．广泛分析自考生在学习和实际解答试卷中存在的问题，有针对性地进行全面辅导和同步训练。

本书结构及显著特点：

本书共分两部分：第一部分教材内容同步辅导/同步训练，第二部分考试预测试卷。对于考生来说，可以说一册在手，全部拥有。

第一部分（教材内容同步辅导/同步训练）是与指定教材同步，按考试大纲规定的考核知识点及能力层次要求为线索分章辅导，考点解析先提炼本章的重要知识点，再举例题分析，详细解答；指定教材习题解答是对指定教材课后习题进行逐一解答，解答过程思路清晰，方法简便，易于考生理解和掌握；同步练习是将该章中的重要考点按大纲要求的各种题型编写而成，同时配有参考答案。编写中力求做到点面结合，突出重点。

第二部分（考试预测试卷）是作者综合全书、结合考试大纲要求精选出的数道“押题”，题型、题序、题量与大纲要求完全一致，一定程度上反映了考试趋势，同时亦检测考生对于本课程的掌握程度。考生学完全书，再通过试题强化训练，可以科学地进行自我考核、自我评估及自我调整复习方向，攻克弱点及不足，从而达到事半功倍的效果。

编写高质量的全国高等教育自学考试辅导用书，是一项长期的、艰难而具有深刻意义的社会助学工作，编写过程中不断得到社会各界的大力支持与关怀，在此深表谢意。

使该书在使用中不断提高和日臻完善，是我们永远的目标。

敬请读者批评指正。

编　者

目 录

第一部分 教材内容同步辅导/同步训练

第二部分　考试预测试卷

第一部分 教材内容
同步辅导/同步训练

第一章 函数

考点解析

考点一:函数,反函数,复合函数的概念和定义

【例题】设$f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,且它们可以构成复合函数$f[f(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$,$g[g(x)]$,则其中为奇函数的是

(A)$f[f(x)]$ (B)$f[g(x)]$

(C)$g[f(x)]$ (D)$g[g(x)]$

【答案】D

【解析】奇函数即满足在定义域内$F(x)=-F(-x)$的函数,因此我们对答案进行逐个解析.①$f[f(x)]$,将$-x$代入得$f[f(-x)]$,$\because f(x)$为偶函数,$\therefore f(-x)=f(x)$ $\therefore f[f(-x)]=f[f(x)]$,A不正确;②$f[g(x)]$,将$-x$代入得$f[g(-x)]$,$\because g(x)$为奇函数,$\therefore f[g(-x)]=f[-g(x)]=f[g(x)]$,B不正确;③$g[f(x)]$,将$-x$代入得,$g[f(-x)]=g[f(x)]$,$\therefore$ C不正确;④$g[g(-x)]$,将$-x$代入得,$g[g(-x)]=g[-g(x)]=-g[g(x)]$,满足奇函数的定义,$\therefore$ D正确.

【考查级别】★★★☆☆

考点二:各基本初等函数的性状,初等函数概念

【例题】函数$y=sin(2x+x^2)$是

(A)偶函数 (B)奇函数

(C) 非奇非偶函数　　　　　　(D) 即是奇函数，又是偶函数

【答案】C

【解析】设 $f(x)=\sin(2x+x^2)$，$\because f(-x)=\sin(x^2-2x)$ 而 $\sin(x^2-2x)\neq\sin(2x+x^2)$，$\sin(x^2-2x)\neq-\sin(x^2+2x)$，即 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq-f(x)$. $\therefore$ 函数为非奇非偶函数. $\therefore$ C 正确.

【考查级别】★★★★☆

考点三：函数的复合及其定义域的判断

【例题】设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

【解析】这是函数记号的运算，基本思路是弄清定义域与函数值之间的关系.

$\because |g(x)|=|e^x|$，故

当 $x<0$ 时，$|g(x)|<1$，$f[g(x)]=1$

当 $x=0$ 时，$|g(x)|=1$，$f[g(x)]=0$

当 $x>0$ 时，$|g(x)|>1$，$f[g(x)]=-1$

则有 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$ 而 $g[f(x)]=e^{f(x)}$ 所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1.\\ e, & |x|>1\end{cases}$$

考点四：函数间的对比判断

【例题】判断下列各对函数是否相同：

(1) $f(x)=(\sqrt{x})^2$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2x}$，$g(x)=\sin x$；

(3) $f(x) = lg(x+\sqrt{x^2-1})$, $g(x) = -lg(x-\sqrt{x^2-1})$;

(4) $f(x) = 3x^2+2x-1$, $g(t) = 3t^2+2t-1$.

【解析】确定函数的要素是其定义域及对应法则，因此，要判断两个函数是否相同，只要比较它们的定义域及对应法则.

(1) $f(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，两者不相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，但 $f(x) = |sinx|$，$g(x) = sinx$，两者的对应法则不尽相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同；

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $[1, +\infty)$，且由

$$lg\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = lg\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= lg(x+\sqrt{x^2-1})$$

知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则也相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同；

(4) 显然 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的区别只是变量采用不同的符号，其定义域及对应法则都相同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数.

【考查级别】★★★★★

考点五：函数的单调性的证明

【例题】设 $\varphi(x)$，$\Phi(x)$ 及 $f(x)$ 都是单调增函数，且 $\varphi(x) \le f(x) \le \Phi(x)$，证明：$\varphi[\varphi(x)] \le f[f(x)] \le \Phi[\Phi(x)]$.

【证明】由于 $\varphi(x)$，$\Phi(x)$，$f(x)$ 都是单调增函数，且有

$\varphi(x) \le f(x) \le \Phi(x)$

可得

$f[\varphi(x)] \le f[f(x)] \le f[\Phi(x)]$

而 $\varphi[\varphi(x)] \le f[\varphi(x)]$，$f[\varphi(x)] \le \Phi[\Phi(x)]$

从而有 $\varphi[\varphi(x)] \le f[f(x)] \le \Phi[\Phi(x)]$.

【考查级别】★★★★★

考点六：函数的周期性的判断

【例题】下列函数是不是周期函数：

(1) $f(x)=|\sin x|+\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$；

(2) $g(x)=\sin x\cdot\cos\frac{\pi x}{2}$；

(3) $h(x)=\sin(\sqrt{x})^2$.

【解析】(1) 两个周期函数的和或积是不是周期函数，取决于这两个周期函数是否有公约数(即两周期比是否为有理数)，由 $|\sin x|$ 的周期 $T_1=\pi$，$\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$ 的周 $T_2=2\pi$，它们的最小公倍数为 2π，故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数；

(2) $g(x)$ 中两因子的周期分别为 $T_1=2\pi$，$T_2=4$，$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{2}$ 为无理数，故 $g(x)$ 不是周期函数；

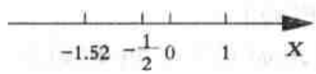
(3) 周期函数的定义域 D 应具下述特性；若 $x\in D$，则 $x\pm T\in D$，从而 $x\pm nT\in D$，故 D 必定即无上界又无下界，而 $h(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，有下界，故 $h(x)$ 不是周期函数.

【考查级别】★★★★★

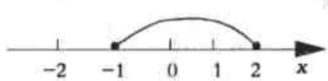
指定教材习题解答

习题 1.1

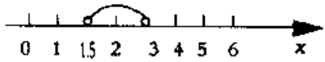
1. 解



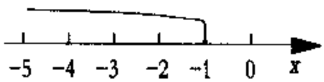
2. 解　(1) $x\in[-1,2]$；



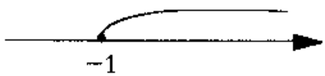
(2) $x\in(1.5,3)$;



(3) $x\in(-\infty,1]$;

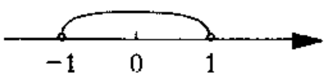


(4) $x\in[1,+\infty)$;



(5) $|x|<1$;

即 $-1<x<1, x\in(-1,1)$

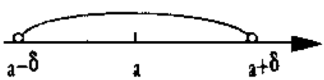


即 $-1<x<1 \quad x\in(-1,1)$

(6) $0<|x-a|<\delta(\delta>0)$

即 $\quad -\delta+a<x<\delta+a$

$x\in(-\delta+a,a+\delta)$.



3. 解　(1) $|x+1|<2$

$$-1<x+1<2$$

$$-2<x<1;$$

(2) $|1+2x|\leqslant 3$

$$-3\leqslant 1+2x\leqslant 3$$

$$-4\leqslant 2x\leqslant 2$$

$$-2\leqslant x\leqslant 1;$$

(3) $|5-\frac{1}{x}|<1$

$$-1<5-\frac{1}{x}<1$$

$$-6 < -\frac{1}{x} < -4$$

$$4 < \frac{1}{x} < 6$$

$$\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4};$$

(4) $x^2 - 4x + 3 > 0$

$(x-3)(x-1) > 0$

$$\therefore \begin{cases} x-3>0 \text{ 且 } x-1>0 \\ \text{或} \\ x-3<0 \text{ 且 } x-1<0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x>3 \\ \text{或} \\ x<1 \end{cases};$$

(5) $\dfrac{2x-1}{x+2} < 1$

$\dfrac{2x+4-5}{x+2} < 1$　即　$\dfrac{2(x+2)-5}{x+2} < 1$

$\therefore 2 - \dfrac{5}{x+2} < 1$　即　$-\dfrac{5}{x+2} < -1$　即 $\dfrac{5}{x+2} > 1$

当 $x+2>0$ 即 $x>-2$ 时　$5 > x+2$　$x<3$

$\therefore\ -2 < x < 3$　当　$x+2<0$ 即 $x<-2$ 时

$5 < x+2$　$x>3$　无解　$\therefore\ -2<x<3$;

(6) $0 < (x-2)^2 \leqslant 4$

$\because (x-2)^2 > 0$　$\therefore x-2>0$ 或 $x-2<0$

$\therefore x>2$ 或 $x<2$①

$\because (x-2)^2 \leqslant 4$　$-2 \leqslant x-2 \leqslant 2$

$\therefore 0 \leqslant x \leqslant 4$②　①、②合并可得

$0 \leqslant x < 2$ 或 $2 < x \leqslant 4$.

4. 解　$\left|\dfrac{a}{b}\right| > 0$, $-\dfrac{a}{|b|} < 0$　$\therefore A$ 错

$\left|\dfrac{a}{b}\right| > 0$, $\dfrac{a}{b} < 0$　$\therefore B$ 错

$\left|\frac{a}{b}\right| > 0, \frac{|a|}{b} < 0 \quad \therefore D$ 错

$\frac{a}{b} < 0 \quad \therefore \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} \quad |b| < 0 \quad \therefore \frac{a}{|b|} = -\frac{a}{b}$

$\therefore C$ 对.

习题 1.2

1. **解** (1) $y = x^{\frac{3}{2}}$

$y = \sqrt{x^3}$

$\therefore x^3 \geqslant 0 \quad \therefore$ 定义域为$[0, +\infty)$

$\therefore y\epsilon[0, +\infty]$ 值域为$[0, +\infty)$;

(2) $y = \frac{1}{x}$

分母不能为零,$x \neq 0$,$\therefore$ 定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

值域亦为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

(3) $y = arctan|x|$

为反三角函数 $x\epsilon(-\infty, +\infty)$ 定义域为$(-\infty, +\infty)$

$\because |x| > 0, \therefore y\epsilon[0, \frac{\pi}{2})$ 值域为$[0, \frac{\pi}{2})$;

(4) $y = \ln^{(1-x)}$

为对数函数,$1 - x > 0 \quad \therefore x < 1$

$\therefore$ 定义域为$(-\infty, 1)$ 值域为$(-\infty, +\infty)$;

(5) $y = cos(x + 1)$

为三角函数

$-\infty < x + 1 < +\infty \quad \therefore x\epsilon(-\infty, +\infty)$

定义域为$(-\infty, +\infty)$ 值域为$[-1, 1]$;

(6) $y = |x|x$

定义域 $x\epsilon(-\infty, +\infty)$,

$\because |x| > 0$ 值域为$(-\infty, +\infty)$;

(7) $y=\begin{cases}e^x, x\geqslant 0\\ 0 \quad x<0\end{cases}$

$\because$ 当 $x\geqslant 0$ 时　$e^x\geqslant 1$,

$\therefore$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$　值域为 $[1,+\infty)\cup\{0\}$.

2. **解**　(1) 不表示同一函数

当 $x<0$ 时的对应法则不同；

(2) 不表示同一函数，当 $x<0$ 时 $f(x)$ 有定义，而 $g(x)$ 无定义；

(3) 不表示同一函数

当 $x<0$ 时 $f(x)$ 有定义，而 $g(x)$ 无定义；

(4) 不表示同一函数

当 $x=0$ 时 $f(x)$ 有定义，而 $g(x)$ 无定义.

3. **解**　(1) $f(0)=\sqrt{1+0}=1$

$f(1)=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$

$f(a)=\sqrt{1+a^2}=\sqrt{a^2+1}$

$f(1-a)=\sqrt{1+(1-a)^2}=\sqrt{1+1-2a+a^2}$

$=\sqrt{a^2-2a+2}$;

(2) $f(x)=sinx$，求 $f(1+h)$，$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$f(1+h)=sin(1+h)$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{sin(1+h)-sin1}{h}=\frac{2sin\frac{h}{2}\cdot cos\frac{h+2}{2}}{h};$$

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{2}, x\geqslant 1\\ 1, \quad x<1\end{cases}$ 求 $f(-1)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(3)$

当 $x=-1$ 时　$x<1$，$\therefore f(-1)=1$

$x=1$ 时，$f(1)=\frac{1^2-1}{2}=0$

当 $x=0$ 时　$x<1$，$\therefore f(0)=1$

当 $x=3$ 时 $x>1$,$\therefore f(3)=\dfrac{3^2-1}{2}=4$;

(4) $f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\leqslant 1\\ x^2+1, & |x|>1\end{cases}$

化简为

$f(x)=\begin{cases}1-2x, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^2+1, & x<-1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$

因此

当 $x=0$ 时,$f(x)=1-2x=1$

当 $x=1$ 时,$f(x)=1-2x=-1$

当 $x=1.5$ 时,$f(x)=x^2+1=1.5^2+1=2.25+1=3.25$

当 $x=1+k$ 时

则$\begin{cases}\text{若 } -1\leqslant 1+k\leqslant 1 \quad \text{即} \quad -2\leqslant k\leqslant 0 \text{ 时}\\ f(x)=1-2(1+k)=-1-2k\\ \text{若 } 1+k<-1 \text{ 或 } 1+k>1 \text{ 即 } k>0 \text{ 或 } k<-2 \text{ 时}\\ f(x)=(1+k)^2+1=k^2+2k+2\end{cases}$

4. **解** 当 $x\leqslant 120m^2$

房款 $k=xl$, 税款 $c=0.015\cdot xl$

$\therefore$ 总房价 $y=xl+0.015xl=1.015xl \quad (x\leqslant 120m^2)$

当 $x>120m^2$

房款 $k=xl$,税款 $c=120\cdot l\cdot 0.015+(x-120)\cdot l\cdot 0.03$

$\therefore$ 总房价 $y=xl+1.8l+(x-120)\cdot l\cdot 0.03$.

习题 1.3

1. **解** (1) 有界,因为 $|\cos x|\leqslant 1$,当 $x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) 无界,当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时,$y=\tan x$,可大于任何正数;

(3) 有界,因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$

即 $\arctan x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$;

(4) 有界，因为当 $x\in[-1,1]$ 时，$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}$

即 $\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$；

(5) 有界，因为当 $x\in[0,1]$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x+1}\leqslant 1$　即 $y\in[-\frac{1}{2},1]$；

(6) 无界，因为当 x 趋近于 -1 的过程中，$y=\frac{1}{1+x}$ 或大于任何正数；

(7) 有界，因为当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$|\sin\frac{1}{x}|\leqslant 1$；

(8) 无界，当 $x\in(0,+\infty)$　$y=\ln^x$　$y\in(-\infty,+\infty)$.

2. 解　(1) $y=2x+1$

设 $x_2>x_1$，设 $y=f(x)=2x+1$

$f(x_2)-f(x_1)=2x_2+1-2x_1-1=2(x_2-x_1)$

$x_2>x_1$　$\therefore f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)>0$

$\therefore y$ 单调增加；

(2) $y=2^x$

设 $x_2>x_1$，设 $y=f(x)=2^x$

$f(x_2)-f(x_1)=2^{x_2}-2^{x_1}=2^{x_1}(2^{x_2-x_1}-1)$

当 $x_1\in(-\infty,+\infty)$ 时，$2^{x_1}>0$，

$\because x_2>x_1$

$\therefore 2^{x_2-x_1}>1$

即 $2^{x_2-x_1}-1>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=2^{x_1}(2^{x_2-x_1}-1)>0$

$\therefore y$ 单调增加；

(3) $y=e^{-x}$

设 $x_2>x_1$，设 $y=f(x)=e^{-x}$

$f(x_2)-f(x_1)=e^{-x_2}-e^{-x_1}=e^{-x_1}(e^{-x_2+x_1}-1)$

当 $x_1\in(-\infty,+\infty)$，$e^{-x_1}>0$，$\because x_1<x_2$，$\therefore e^{-x_2+x_1}<1$

$\therefore e^{-x_2+x_1}-1<0$，$\therefore f(x_2)-f(x_1)=e^{-x_1}(e^{-x_2+x_1}-1)<0$