

超级备考

高考系统复习

(学生用书)

全国重点中学一线骨干教师编写

本册主编 尹祖荣

新课标

与人教AB版配套

数学(理科)

 北京出版集团
 北京教育出版社





恒 谦 教 育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级备考

高考系统复习

名师精心设计 / 科学系统复习 / 把握高考脉搏 / 金榜题名在即

(学生用书)

新课标

与人教AB版配套

数学(理科)

本册主编	尹祖荣		
本册副主编	董玉琦	赵焕强	刘大为
撰稿人	李志慰	向根达	郭俊峰
	刘文平	赵焕强	洗虹雁
	于发智	陈水松	董玉琦
	朱桂凤	唐学宁	刘瑞祥
	包永凤	陈德瑞	



北京出版社出版集团



北京教育出版社



恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级备考

高考系统复习

超级备考 高考系统复习

新课标

数学(理科)

与人教AB版配套

(学生用书)

本册主编 尹祖荣

*

北京出版社出版集团 出版
北京教育出版社

(北京北三环中路6号)

邮政编码: 100011

网 址: www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新华书店 经销

陕西宝石兰印务有限公司印刷

*

880×1230 16开本 24印张 804 000字

2006年6月第1版 2006年6月第1次印刷

印数: 1—10 000

ISBN 7-5303-5026-9

G·4942 定价: 39.80元

(质量投诉电话: 029-82027917 010-58572245 010-58572393)



恒谦教育

www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

使用说明

S H I Y O N G S H U O M I N G

《超级备考高考系统复习》丛书由全国百位一线备考名师执笔，在最新《考试大纲》的指导下，以服务备考师生为理念，科学预测高考命题趋势，将复习备考内容熔于一书，系统、详尽、新颖、实用，是广大备考师生艰辛备考路上的指向标、加油站。本丛书创新编写思路，以信息备考为主线；完善备考功能，以资源备考为平台；突出使用价值，以拔高成绩为目标。针对2007年高考的新形势、新特点，既编写了全国版和自主命题省区地方专用版，又编写了广东、山东、宁夏和海南的高考新课标版。

《超级备考高考系统复习》(新课标版)按学科和教材版本分为14个分册，为便于师生使用同时编写了教师用书和学生用书(两者在内容侧重、题量、包装形式上均有较大区别)，并配备了《高考备考试卷库》系列光盘，使教师用书、学生用书、备考光盘完美匹配，更添助考动力。



按教材章节顺序完整梳理知识，适当整合内容，同步系统复习；

对每节内容以考点为线索，逐一精讲、例析、归纳和总结；

题量充分，解答详尽，分析、答案、点评等紧随题后，便于备课、讲解、查阅；

教师在复习教学时可完全以本书为蓝本，按照回顾、讲解、练测、总结的顺序指导复习。



与教师用书完全匹配，操作性极强；

栏目设置科学、实用，既可随教师一起复习，也可根据需要自己复习，使复习能落到实处；

练测题后留有适当的答题空，便于使用；

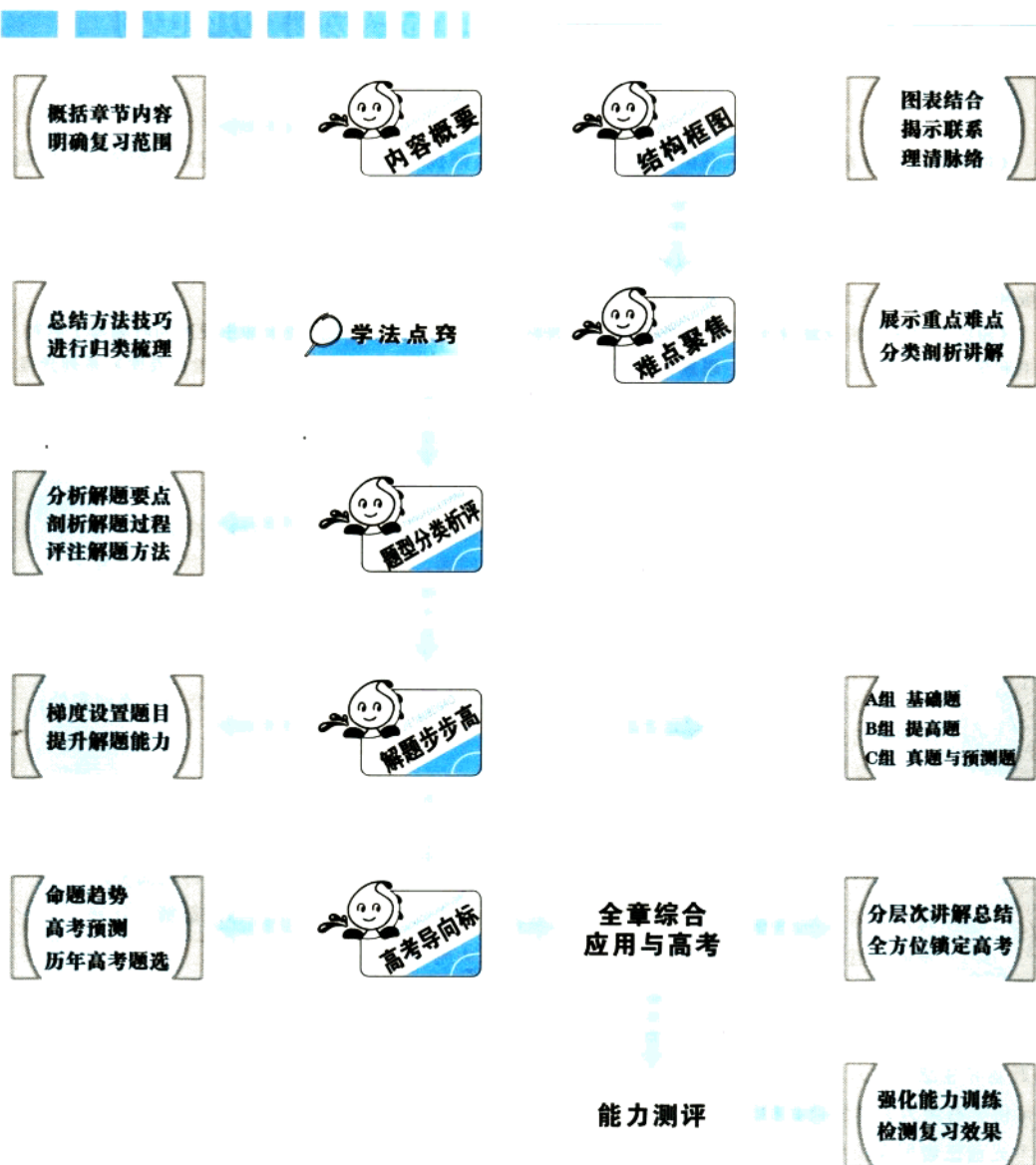
参考答案活页装订，便于对照验证。



精心汇编了2001~2005年全国及自主命题省份的高考真题近500套，再现高考历程，让考生触摸高考考场。对照真题您会发现，本书的编写紧扣高考命题脉搏，让您准确把握高考方向；搜集整理了清华附中、北大附中、

人大附中、黄冈中学等全国近百所名校2005~2006年各科高考模拟试题近千套，全方位紧追高考命题热点，使考生觅到高考的题感和卷感。本光盘主要供高三备课选材或查询资料使用，亦可供学有余力的学生自我检测使用。教师用书、学生用书、备考光盘三者配套使用，犹如从海、陆、空向高考发起进攻，定能起到事半功倍的作用。







前言

会当凌绝顶 一览众山小

登山的动力，来源于对自然风光的憧憬，目标直指山巅！

登山的魅力，是临风而立，将山踩在自己的脚下！于是便有了孔子登东山而小齐鲁，登泰山而小天下之感慨。

恒谦人就是登山者。八年的积淀，八年的追求，八年的攀登，最终获得了“恒谦教育”备考用书编写的全面成功！正是基于在高考备考复习方面的成功经验，并依托北京教育出版社恒谦教育研究院的强大教育资源，我们组织了全国数十所名校的百位名师编写了《超级备考高考系统复习》丛书。

《超级备考高考系统复习》作为高三师生的系统复习用书，与其他此类教辅在选题立意上有根本的区别：第一，编写理念创新。我们在认真研究目前高三师生复习现状和分析市场备考类用书优劣的基础上，理清了备考类用书的一种全新编写理念：系统复习+系统训练+信息追补，即《考试大纲》出台前侧重对教材知识的系统梳理和解题能力的综合训练，解决历年考纲中不变的考试内容；《考试大纲》出台后，侧重对高考信息的追补和考题预测，全真模拟最新款式要求的高考试卷，让考生零距离触摸高考考场。第二，备考思路转变。针对2007年高考的命题趋势，本丛书完全从师生备考的实际需要出发，依据教材或知识系统的先后顺序划分章节，纵向对教材进行复习，注重学科内综合的提炼与复习引导，突出对学科知识延展性和联系性的探究，体现了由“深挖洞”向“广积粮”备考思路的转变。第三，理清两大关系。本丛书严格依据《考试大纲》的最新精神和“新课标”的意图，结合地方自主命题的发展趋势，充分体现中央《考试大纲》对全国高考的统一要求和自主命题省区《考试说明》的地方特色（差异性）。

因为具有差异性，所以才具备存在性。《超级备考高考系统复习》特为备战2007年高考系统复习设计，专供高三师生系统复习时课堂同步使用（也可作为高三学生系统复习的自读类教辅）。丛书在编写上凸现了五大特点：

一、版库完整，备考无忧。考虑到2007年广东、山东、宁夏和海南将迎来新课标的首次高考，我们专门为它们编写了《超级备考高考系统复习》的新课标版；为使丛书能更好地指导自主命题省区2007年高考的备考复习，我们还特地编写了各省区专用版，书稿由自主命题省区的备考名师主笔撰写或审定，以确保内容与各省区高考自主命题的地方特色完全匹配。

二、模式创新，功能齐备。丛书采用教师用书+学生用书的“1+1”模式编写，体现了人性化设计的理念；并且“教师用书”配有备考光盘，容量大、信息全，为教师提供了信息查询和教学资源共享的平台。

三、关注教改，选题权威。集百位全国名师的智慧和心血打造的这套精品教辅，紧跟高考走向，全方位锁定所有考点，从最新考题、模拟题和名师预测题中精选题目，讲解、例题、练测三位一体，具备很高的权威性。



四、细梳知识，整合拔高。 本丛书以教材为蓝本，对显性的基本知识及隐性的教材延伸知识进行多角度、深层次的归纳、整合，再辅之以例举、练习，使考生能整体把握知识，灵活地迁移、转化、运用，最终找出提高分数的最佳方法，在现有基础上把成绩拔高一个档次。

五、注重普遍，照顾特殊。 2006年教育部又核准了四川和陕西两省高考自主命题，自主命题的省区已达16个。自主命题试卷在题型、题量、赋分上会有一些差别，但不会有根本的区别，无论是全国的统一试卷，还是有关省市的自主试卷，都必须根据全国统一的《考试大纲》的要求来命题，即万变不离其宗。《超级备考高考系统复习》一方面根据考纲来编写，注重选题的普遍性；另一方面本丛书的编者还潜心研究了近年的统考卷、有关省市自主卷，对这些试卷的“个性”（即特殊性）有了较好的把握，并把对这些“个性”比较研究的成果都体现在了书中。

会当凌绝顶，一览众山小。恒谦人历时数载，全程跟踪高考自主命题的深化改革，充分关注高中新课标的推广进程，启用百位名师合力打造的力作已经新鲜出炉，她将给支持她的广大读者带来最大的使用价值和预期效果，我们有理由相信如此大手笔的备考用书势必会点亮2006年的教辅市场！

温馨提示：《超级备考高考系统复习》（新课标版）依据广东、山东、宁夏和海南2007年高考模式特点而分别编写了四省区各自的专用版，并在书中整合最新信息，将2007年四省区新高考所涉及的必修内容和选修内容采用单列或杂糅的方式尽数编写了进去，完全可满足所有参加四省区新课标高考的考生。

最后建议读者在使用本丛书时注意：合理、科学地安排复习进度，区别对待重点内容与一般内容；加强复习的针对性，就自身的薄弱环节进行查漏补缺；认真研读“学法点窍”、“解题指导”以及例题或考题后的“点评”、“说明”、“思考”，吸纳名师多年的高考辅导经验与解题智慧。

鉴于本丛书立意新颖，编写难度较大，书中难免存有纰漏，敬请不吝指正。

北京教育出版社恒谦教育研究院
《超级备考高考系统复习》丛书编委会



目 录

第1章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合及其运算	(1)
1.2 简单的逻辑用语与充要条件	(3)
1.3 全章综合应用与高考	(7)
能力测评	(9)

第2章 函 数

2.1 映射、函数	(11)
2.2 函数的定义域和值域	(13)
2.3 函数的单调性及奇偶性	(16)
2.4 二次函数	(18)
2.5 指数、对数及其函数	(20)
2.6 幂函数	(22)
2.7 函数的图象	(24)
2.8 函数的最值	(26)
2.9 函数与方程	(29)
2.10 函数模型及其应用	(30)
2.11 全章综合应用与高考	(32)
能力测评	(37)

第3章 直线 平面 空间几何体

3.1 平面、空间直线	(40)
3.2 直线与平面的平行和垂直	(43)
3.3 平面与平面的平行和垂直	(46)
3.4 几何体中的线面关系	(49)
3.5 空间距离和角的计算	(54)
3.6 空间向量及其运算	(57)
3.7 空间角与距离的向量解法	(60)
3.8 空间位置关系的向量解法	(64)
3.9 全章综合应用与高考	(67)
能力测评	(72)

第4章 直线 圆 空间坐标系

4.1 直 线	(75)
4.2 直线的位置关系	(78)
4.3 圆	(81)
4.4 空间直角坐标系	(84)
4.5 全章综合应用与高考	(85)
能力测评	(88)

第5章 算 法

5.1 算法概念和框图	(90)
5.2 基本算法语句	(93)
5.3 算法案例	(97)
5.4 框 图	(100)
5.5 全章综合应用与高考	(103)
能力测评	(104)

第6章 排列 组合 概率与统计

6.1 两个原理	(107)
6.2 排列、组合	(109)
6.3 排列、组合的综合应用	(111)
6.4 二项式定理及其应用	(113)
6.5 三种事件的概率	(115)
6.6 离散型随机变量的分布列、期望与方差	(118)
6.7 抽样方法、总体特征的估计	(121)
6.8 全章综合应用与高考	(124)
能力测评	(131)

第7章 三角函数

7.1 任意角的三角函数	(133)
--------------------	---------



Contents

7.2 和、差、倍角的三角函数	(135)
7.3 三角函数式的化简、求值与证明	(137)
7.4 三角函数的图象	(139)
7.5 三角函数的性质	(142)
7.6 三角函数的最值	(144)
7.7 全章综合应用与高考	(145)
能力测评	(148)

第 8 章 平面向量

8.1 向量的基本运算	(150)
8.2 实数与向量的积及向量的数量积	(152)
8.3 向量的坐标运算	(154)
8.4 向量的应用	(156)
8.5 正弦定理、余弦定理与解三角形	(158)
8.6 全章综合应用与高考	(161)
能力测评	(164)

第 9 章 数 列

9.1 数列的概念	(166)
9.2 等差(比)数列的性质与应用	(168)
9.3 数列的综合运用	(172)
9.4 数列求和	(174)
9.5 全章综合应用与高考	(177)
能力测评	(181)

第 10 章 不等式

10.1 不等式的概念和性质	(184)
10.2 不等式的证明(1)	(186)
10.3 不等式的证明(2)	(188)
10.4 一元二次不等式及其解法	(190)
10.5 绝对值不等式	(192)
10.6 基本不等式	(194)
10.7 简单的线性规划	(196)

10.8 不等式的综合应用	(199)
10.9 全章综合应用与高考	(201)
能力测评	(204)

第 11 章 圆锥曲线

11.1 椭 圆	(206)
11.2 双 曲 线	(210)
11.3 抛 物 线	(214)
11.4 直线与圆锥曲线的位置关系	(218)
11.5 曲线与方程	(220)
11.6 全章综合应用与高考	(223)
能力测评	(230)

第 12 章 导数及其应用

12.1 导数及其运算	(232)
12.2 导数的应用	(234)
12.3 定积分及其简单应用	(236)
12.4 全章综合应用与高考	(238)
能力测评	(241)

第 13 章 推理与证明

13.1 合情推理与演绎推理	(244)
13.2 直接证明与间接证明	(247)
13.3 数学归纳法	(250)
13.4 全章综合应用与高考	(253)
能力测评	(256)

第 14 章 复 数

14.1 复数的概念及其运算	(258)
14.2 全章综合应用与高考	(260)
能力测评	(262)

(参考答案活页装订, 随书赠送)

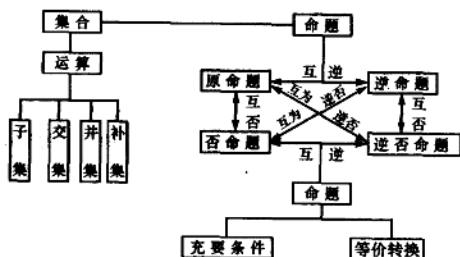
第1章

集合与常用逻辑用语



本章主要包括两大类：一是集合的有关概念和运算；二是简易逻辑知识。涉及到的知识点有：集合的基本概念、集合与集合的关系、集合的基本运算、命题及其基本关系、充分条件与必要条件、简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词。

集合的初步知识与简易逻辑知识，是掌握和使用数学语言的基础，在学习函数及其他后续内容时，将得到充分的运用。



1.1 集合及其运算



复习难点 对集合三大性质的理解和灵活运用，集合语言和集合思想的准确灵活运用。

运用集合的概念及其运算进行解题时，要注意“或”、“且”的区别，真正理解交集、并集的意义，以能准确地进行集合语言与其文字数学语言的转换。



1. 关于集合概念应从如下三方面理解：

- (1) 它的实际意义是什么？
 - (2) 怎样借助图形来表示？
 - (3) 如何用数学方式来表达？
2. 与集合有关的问题主要有：
- (1) 如何用集合来表示我们所研究的问题？
 - (2) 如何判断一个对象属于我们所讨论的集合？
 - (3) 如何判断两个集合间的包含和相等关系？
 - (4) 如何求集合的交、并、补，它们的实际意义何在？

总之，解答集合问题，首先要正确理解集合的有关概念，特别是集合中元素的三要素；对于用描述法给出的集合

$\{x|x \in P\}$ ，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P ；要重视并发挥图示法的作用，通过数形结合直观地解决问题。



例1 已知：集合 $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$ ，若 $A \cap B = \{2, 5\}$ ，求实数 a 的值，并求 $A \cup B$ 。

分析 A 中元素只能是 $a^3 - 2a^2 - a + 7$ 为 5，从而求出 $A \cup B$ 。

解 $\because A \cap B = \{2, 5\}$,
 $\therefore 5 \in A, A = \{2, 4, 5\}$ ，由已知可得 $a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5$.
 $\therefore a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0$,
 $\therefore (a^2 - 1)(a - 2) = 0, \therefore a = 2$ 或 $a = \pm 1$.

(1) 当 $a = 2$ 时， $B = \{-4, 5, 2, 25\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$ 与题设相符；

(2) 当 $a = 1$ 时， $B = \{-4, 4, 1, 12\}$, $A \cap B = \{4\}$ 与题设矛盾；

(3) 当 $a = -1$ 时， $B = \{-4, 2, 5, 4\}$, $A \cap B = \{2, 4, 5\}$ 与题设矛盾。

综上(1)、(2)、(3)知： $a = 2$ ，且 $A \cup B = \{2, 4, 5\} \cup \{-4, 5, 2, 25\} = \{-4, 2, 4, 5, 25\}$ 。

评注 在例1的解题过程中，由题设条件得到 a 的方程并求出 a 为 2 或 ± 1 后，问题是否就解决了呢？ $5 \in A$ 仅是 $A \cap B = \{2, 5\}$ 的一个必要条件，因此有可能产生增根，同样需要将求得 a 的值代入题设条件中检验，看它是否与条件相符。

例2 数集 $X = \{x|x = (2n+1)\pi, n \text{ 是整数}\}$ 与数集 $Y = \{x|x = (4k \pm 1)\pi, k \text{ 是整数}\}$ 之间的关系是()。

A. $X \subseteq Y$ B. $X \supseteq Y$ C. $X = Y$ D. $X \neq Y$

分析 根据题意应从集合的包含、相等、不等的概念出发，考查集合与集合之间其元素的所属关系。

解 $\because \{2n+1, n \in \mathbb{Z}\} = \{\text{奇数}\}$ ，而 $4k \pm 1 (k \in \mathbb{Z})$ 必为奇数，

$\therefore X \supseteq Y$ 。

反之，当 $x \in X$ 时， $x = (2n+1)\pi$ ，

若 n 为奇数，即 $n = 2k-1 (k \in \mathbb{Z})$ ，则

$x = (4k-1)\pi, x \in Y$ ；

若 n 为偶数，即 $n = 2k (k \in \mathbb{Z})$ ，则

$x = (4k+1)\pi, x \in Y$ 。

$\therefore X \subseteq Y$ 。

由 $X \supseteq Y$ 且 $X \subseteq Y$ ，得 $X = Y$ ，选 C。

评注 判定集合与集合之间的关系，基本方法归结为判定元素与集合之间的关系。

例3 设已知集合 $A = \{x|10+3x-x^2 \geq 0\}$, $B = \{x|m+1 \leq x \leq 2m-1\}$ ，如果 $A \cap B = \emptyset$ ，求 m 的取值范围。



分析 先化简集合 A , 再由 $A \cap B = \emptyset$ 建立不等式组求 m 的范围. 这里应特别注意“ $A \cap B = \emptyset$ ”的意思是: 一方面 A 与 B 中的不等式无公共解, 另一方面 B 集合可以为空集.

解 解不等式 $10+3x-x^2 \geq 0$, 得

$$A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}.$$

由 $A \cap B = \emptyset$, 有

$$(1) B = \emptyset, \text{即 } 2m-1 < m+1, \text{解得 } m < 2;$$

$$(2) \begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ 2m-1 < -2, \end{cases} \text{此时无解;}$$

$$(3) \begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ m+1 > 5, \end{cases} \text{解得 } m > 4.$$

综上可知, $m > 4$, 或 $m < 2$.

评注 空集是一个特殊的集合. 当题中隐含着空集参与集合关系及运算时, 我们应像重视数“0”在解题中的作用那样, 重视空集在解集合问题中的作用. 本题若忽视 $B = \emptyset$, 就会漏掉 $m < 2$ 的情况.

**A 组****选择题**

1. 已知集合 A 中有 2 个元素, 集合 B 中有 5 个元素, 那么集合 $A \cup B$ 中元素的个数 p 的值为().

- A. $2 \leq p \leq 7$ B. $5 \leq p \leq 7$
C. $2 \leq p \leq 5$ D. 非上述情况

2. 如图 1-1-1 所示, I 为全集, M, N, S 是 I 的子集, 则图中阴影部分所示的集合是().

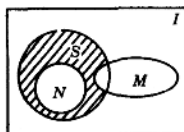


图 1-1-1

- A. $(\complement_I M \cap \complement_I N) \cap S$
B. $\complement_I (M \cap N) \cap S$
C. $(\complement_I N \cap S) \cup M$
D. $(\complement_I M \cap S) \cup N$

3. 已知集合 $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $N = \{0, 2, 4, 8\}$, 集合 $A \subseteq M$ 且 $A \subseteq N$, 则 A 的个数是().

- A. 4 个 B. 6 个 C. 8 个 D. 10 个

4. 已知集合 $A = \{x | \frac{1}{x} \leq 1\}$, 集合 $B = \{x | \sqrt{x-1} \leq 1\}$, 则().

- A. $A \cup B = \mathbb{R}$ B. $A = B$
C. $B \subseteq A$ D. $A \subseteq B$

5. 若不等式 $|ax+2| < 6$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则实数 a 等于().

- A. 8 B. 2 C. -4 D. -8

6. 如果集合 $P = \{y | y = x^2, x \in \mathbb{N}^*\}$, $Q = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{N}^*\}$, 则().

- A. $P \cap Q = \{2, 4\}$ B. $P \cap Q = \{4, 16\}$
C. $P = Q$ D. 以上均错

B 组**填空题**

1. 若集合 $\{(x, y) | x+y-2=0 \text{ 且 } x-2y+4=0\} \subseteq$

$\{(x, y) | y=3x+b\}$, 则 $b =$ _____.

2. 设全集 $I = \{2, 3, a^2+2a-3\}$, $A = \{2, |a+1|\}$, $\complement_I A = \{5\}$, $M = \{x | x = \log_2 |a|\}$, 则集合 M 的所有子集是 _____.

3. 已知 $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, 则实数 p 的取值范围是 _____.

4. 设 ① $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; ② 当 $a \in A$ 时, 必有 $(8-a) \in A$, 则同时满足条件 ①, ② 的非空集合 A 的个数为 _____.

5. 若全集 $I = \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P = \{x | f(x) < 0\}$, $Q = \{x | g(x) \geq 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P, Q 表示为 _____.

选择题

6. 已知集合 $P = \{(x, y) | y = k(x-1) + 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $Q = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2y = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, 那么集合 $P \cap Q$ 中().

- A. 没有一个元素
B. 至多有一个元素
C. 只有两个元素
D. 有一个或两个元素

7. 设数集 $M = \{x | m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\}$, $N = \{x | n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集, 如果 $b-a$ 叫做集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的长度的最小值是().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

8. 设 M, P 是两个非空集合, 定义: $M - P = \{x | x \in M, \text{且 } x \notin P\}$. 若 $M = \{x | 1 \leq x \leq 2004, x \in \mathbb{N}^*\}$, $P = \{y | 2 \leq y \leq 2005, y \in \mathbb{N}^*\}$, 则 $M - P$ 等于().

- A. $\{1\}$ B. $\{2005\}$
C. M D. P

9. 设 A, B 是非空集合, 定义: $A \times B = \{x | x \in (A \cup B) \text{ 且 } x \notin (A \cap B)\}$, 已知 $A = \{x | y = \sqrt{2x-x^2}\}$, $B = \{y | y = 2^x, x > 0\}$, 则 $A \times B$ 等于().

- A. $[0, 1] \cup (2, +\infty)$ B. $[0, 1] \cup (2, +\infty)$
C. $[0, 1]$ D. $[0, 2]$

C 组**真题与预测题**

1. 在某一个班级的学生中, 有 36 人的数学成绩不低于 80 分, 有 20 人的物理成绩不低于 80 分, 且有 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分. 那么, 有多少人在这两科成绩中至少有一科不低于 80 分?

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

3. 若集合 $A = \{x | x^2 + ax + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 集合 $B = \{1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

4. 对于函数 $f(x)$, 若 $f(x) = x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“不动点”; 若 $f[f(x)] = x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“稳定点”, 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B , 即 $A = \{x | f(x) = x\}$, $B = \{x | f[f(x)] = x\}$.

(1) 求证: $A \subseteq B$;

(2) 若 $f(x) = ax^2 - 1 (a \in \mathbb{R})$, 且 $A = B \neq \emptyset$, 求 a 的范围.

1.2 简单的逻辑用语与充要条件



复习难点 关于简单命题和复合命题的理解和认识, 四种命题的关系及真假判断是本节的难点.

逻辑中的“或”可视为集合中的“并”, “且”可视为“交”, “非”可视为“补”. 可见, “或、且、非”是三种基本的逻辑运算, 且可用集合的三种运算来描述. 简单命题与复合命题的分辨不能只从字面上看有没有“或”、“且”、“非”. 因为逻辑联结词还有不少, 如“若……则”, “因为……所以……”等.

判定 A 是 B 的什么条件关键是看“若 A 则 B ”、“若 B 则 A ”是否为真命题. 当“若 A 则 B ”是否为真难以判明时可以判明它的等价命题“若非 B 则非 A ”的真假. 去探求充要条件时一般可先探求其必要条件, 再看其充分性是否成立.

方法点窍

1. 一个语句是否为命题, 关键要看能否判断真假. 陈述句、反诘疑问句都是命题, 而祈使句、疑问句、感叹句都不是命题.

2. 如何运用逻辑联结词, 把几个简单命题构成复合命题? 反之, 如何把一个复合命题分解为几个简单命题?

3. 根据一个命题来构造它的逆命题、否命题和逆否命题的关键在于分清条件和结论. 一个命题的否定与命题的否命题是不同的, 前者只否定结论, 后者既否定条件, 又否定结论.

4. 判断命题的真假要以真值表为依据. 原命题与其逆否命题为等价命题, 逆命题与否命题为等价命题, 一真俱真, 一

假俱假. 当一个命题的真假不易判断时, 可考虑判断其等价命题的真假.

5. 确定一个“若 p 则 q ”形式的命题为真, 一般要由条件“ p ”经过一定的逻辑推理得出结论“ q ”, 确定一个“若 p 则 q ”的命题为假, 一般只需举一个反例说明即可.

判断命题充要条件有如下三种常用方法:

1. 定义法;

2. 等价法: 即利用 $A \Rightarrow B$ 与非 $B \Rightarrow$ 非 A ; $B \Rightarrow A$ 与非 $A \Rightarrow$ 非 B ; $A \Leftrightarrow B$ 与非 $B \Leftrightarrow$ 非 A 的等价关系, 对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题, 一般运用等价法;

3. 利用集合间的包含关系判断, 若 $A \subseteq B$, 则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件; 若 $A = B$, 则 A 是 B 的充要条件.



例1 指出下列语句是不是命题, 若为命题, 指出其中复合命题的基本形式及构成它的简单命题, 并判断复合命题的真假:

(1) π 既大于 3 又是无理数;

(2) 直角不等于 90° ;

(3) $x+1 \geq 2x-3$;

(4) 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分这条弦所对的两条弧.

解 除(3)外, 其余语句都是命题. (1) 这个命题是 p 且 q 的形式, 其中

p : π 大于 3; q : π 是无理数;

(2) 这个命题是非 p 的形式, 其中

p : 直角等于 90° ;

(4) 这个命题是 p 且 q 的形式, 其中

p : 垂直于弦的直径平分这条弦;

q : 垂直于弦的直径平分这条弦所对的两条弧;

(1)、(4) 为真命题, (2) 为假命题.

评注 有的“ p 或 q ”与“ p 且 q ”形式的复合命题语句中, 字面上未出现“或”与“且”字, 如此例中的(1)与(4), 此时应从语句的陈述中搞清含义从而分清是“ p 或 q ”还是“ p 且 q ”形式. 一般地, 若两个命题属于同时都要满足的为“且”, 属于并列的为“或”.

例2 将下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式, 然后写出各命题的否定、逆命题、否命题和逆否命题, 并逐一判断其真假:

(1) 相等向量的模相等;

(2) 顶点在底面上的射影是底面三角形重心的三棱锥是正三棱锥;

(3) 直线和圆相切, 切点与圆心的连线垂直于这条直线.

解 (1) 若 $a=b$, 则 $|a|=|b|$, 是真命题;

命题的否定: 若 $a=b$, 则 $|a| \neq |b|$, 是假命题;

逆命题: 若 $|a|=|b|$, 则 $a=b$, 是假命题;

否命题: 若 $a \neq b$, 则 $|a| \neq |b|$, 是假命题;

逆否命题: 若 $|a| \neq |b|$, 则 $a \neq b$, 是真命题.

(2) 若三棱锥 $A-BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是 $\triangle BCD$ 的重心, 则三棱锥 $A-BCD$ 是正三棱锥, 是假命题;

命题的否定: 若三棱锥 $A-BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是 $\triangle BCD$ 的重心, 则三棱锥 $A-BCD$ 不一定是正三棱锥, 是真命题;



逆命题:若三棱锥 $A-BCD$ 是正三棱锥,则三棱锥 $A-BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是 $\triangle BCD$ 的重心,是真命题;

否命题:若三棱锥 $A-BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影不是 $\triangle BCD$ 的重心,则三棱锥 $A-BCD$ 不是正三棱锥,是真命题;

逆否命题:若三棱锥 $A-BCD$ 不是正三棱锥,则顶点 A 在底面 BCD 上的射影一定不是 $\triangle BCD$ 的重心,是假命题.

(3)若直线和圆相切,则切点与圆心的连线垂直于这条直线,是真命题;

命题的否定:若直线和圆相切,则切点与圆心的连线不垂直于这条直线,是假命题;

逆命题:若圆上点与圆心的连线垂直于过这点的直线,则这条直线与圆相切,是真命题;

否命题:若直线和圆不相切,则直线与圆的公共点与圆心的连线与这条直线不垂直,是真命题;

逆否命题:若圆上一点与圆心的连线与过圆上这点的直线不垂直,则这条直线不是圆的切线,是真命题.

评注 改写命题时,在等价条件下可以使用符号语言,以使问题表述得更清楚简明;命题中使用了判断词“是”,根据对象的分类,其否定可以为“不是”或“不一定是”;检验所改写的命题是否正确的一个有效手段是利用互为逆否命题的两个命题的等价关系进行判断.

例 3 若 $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, 则 $\begin{cases} x+y > a+b \\ (x-a)(y-b) > 0 \end{cases}$ 是

$\begin{cases} x > a \\ y > b \end{cases}$ 成立的().

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

分析 判断命题的充要关系,需从充分性和必要性两个方面进行推理,如果不能推出,要能举出反例加以说明.

解 选 C. (1)若 $\begin{cases} x+y > a+b, \\ (x-a)(y-b) > 0, \end{cases}$

由式②知, $x-a$ 与 $y-b$ 同号;又由式①得 $(x-a)+(y-b) > 0$.

所以, $x-a > 0, y-b > 0$, 即 $x > a, y > b$.
故充分性成立.

(2)若 $\begin{cases} x > a, \\ y > b, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x-a > 0, \\ y-b > 0, \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x+y > a+b, \\ (x-a)(y-b) > 0. \end{cases}$

故必要性成立.

综合(1),(2)知,应选 C.

评注 在判断命题的充要关系时,若由条件出发,每步推理都应用的是充要条件,最后得到的结论与条件是互为充要条件的.

例 4 指出下列条件中 p 是 q 的什么条件, q 是 p 的什么条件,并说明理由.

(1) $p: \begin{cases} a+\beta > 4 \\ a\beta > 4 \end{cases}; q: \begin{cases} a > 2 \\ \beta > 2 \end{cases}$

(2) $p: x\sqrt{2x+3}=x^2; q: 2x+3=x^2$.

(3) $p: \triangle ABC$ 是直角三角形; $q: \triangle ABC$ 是等腰三角形.

(4) $p: \angle C=90^\circ; q: \triangle ABC$ 是直角三角形.

(5) $p: A \cap B = A; q: A \subseteq B$.

(6) $p: \frac{2}{x} \geq 1; q: x^2 < 2x$.

解 (1) $\begin{cases} a > 2 \\ \beta > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\beta > 4 \\ a\beta > 4 \end{cases}$, 反之却不一定成立. 例如取

$a=1, \beta=5$ 时, 虽然满足 $\begin{cases} a+\beta > 4 \\ a\beta > 4 \end{cases}$, 但不满足 $\begin{cases} a > 2 \\ \beta > 2 \end{cases}$, 故 $p \not\Rightarrow q$.

但 $q \Rightarrow p$, p 是 q 的必要而不充分条件, q 是 p 的充分而不必要条件.

(2) 此题的 p 与 q 是两个方程的根, 首先要解方程, 要注意解方程时的同解变形, 把增根舍去. $p: x\sqrt{2x+3}=x^2$, 解得 $x=-1$ 或 $x=0$ 或 $x=3$, 把 $x=-1$ 代入原方程时, 得 $-1=1$, 舍去, 而 $q: 2x+3=x^2 \Leftrightarrow x=-1$ 或 $x=3$, 故 p, q 互为既不充分也不必要条件.

(3) p, q 互为既不充分也不必要条件.

(4) $p: \angle C=90^\circ \Rightarrow q: \triangle ABC$ 是直角三角形. 反之, q 成立时, 有可能 $\angle B$ 或 $\angle A$ 为 90° , 故 $q \not\Rightarrow p$.

所以 p 是 q 的充分而不必要条件, q 是 p 的必要而不充分条件.

(5) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$, 而 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$, 故 p 是 q 的必要而不充分条件, q 是 p 的充分而不必要条件.

(6) 此题的 p, q 是两个不等式的解集, 要注意最后得到的解集之间的包含关系.

$p: \frac{2}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq x^2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$.

还可以这样解: $\frac{2}{x} \geq 1$, 故 $x > 0$,

所以 $2 \geq x$, 从而 $0 < x \leq 2$.

$q: x^2 < 2x \Leftrightarrow 0 < x < 2$,

所以 $\{x | 0 < x < 2\} \subsetneq \{x | 0 < x \leq 2\}$.

故 $p \not\Rightarrow q$ 而 $q \Rightarrow p$, 故 p 是 q 的必要而不充分条件, q 是 p 的充分而不必要条件.

评注 此类题只要判断 $p \Rightarrow q$ 与 $q \Rightarrow p$ 的真假即可, 在推导不成立时, 往往可通过举反例来否定一个命题的成立.

例 5 求证: 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有一个等于 1 的根的充要条件是 $a+b+c=0$.

分析 本命题的条件是“ $a+b+c=0$ ”, 结论是“ $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有一个等于 1 的根”, 所以证必要性即证明“若 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根, 则 $a+b+c=0$ ”, 证充分性即证明“若 $a+b+c=0$, 则 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根”.

证明 (1) 先证必要性

$\because x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,

$\therefore a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$, 即 $a+b+c=0$.

(2) 再证充分性

$\because a+b+c=0$,

$\therefore c=-(a+b)$, 代入方程, 得

$(x-1)(ax+a+b)=0$,

$\therefore x=1$, 或 $x=-\frac{a+b}{a} (a \neq 0)$.

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根等于 1.

评注 充要条件的证明,一般先证必要性,再证充分性,从本例可引申出命题“直线 $ax+by+c=0$ 通过定点 $(1,1)$ 的充要条件是 $a+b+c=0$ (a, b, c 不全为 0)”.

例 6 已知抛物线 $C: y = -x^2 + mx - 1$ 和点 $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, 求抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件.

解 应先根据抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点, 导出结论成立的必要条件, 即求出 m 的范围, 再证明其为充分条件.

(1) 必要性: 由已知得, 线段 AB 的方程为 $x+y=3$ ($0 \leq x \leq 3$), 因为抛物线 C 与线段 AB 有两个不同的交点, 所以方程组

$$\begin{cases} y = -x^2 + mx - 1 \\ x + y = 3 \quad (0 \leq x \leq 3) \end{cases} \text{ 有两组不}$$

同的实数解.

将 $y=3-x$ 代入

$$y = -x^2 + mx - 1,$$

$$\text{得 } x^2 - (1+m)x + 4 = 0 \quad (0 \leq x \leq 3),$$

令 $f(x) = x^2 - (1+m)x + 4$ (如图 1-2-1 所示),

$$\text{则有 } \begin{cases} (1+m)^2 - 4 \times 4 > 0, \\ f(3) \geq 0, \\ 0 < \frac{m+1}{2} < 3, \\ f(0) \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} (1+m)^2 > 4^2, \\ -3m+10 \geq 0, \\ 0 < m+1 < 6. \end{cases}$$

解之, 得 $3 < m \leq \frac{10}{3}$.

(2) 充分性: 令 $f(x) = x^2 - (1+m)x + 4 = 0$,

当 $3 < m \leq \frac{10}{3}$ 时, $\Delta = (1+m)^2 - 16 > 0$

$$x_1 = \frac{1+m-\sqrt{(1+m)^2-16}}{2}$$

$$> \frac{1+m-\sqrt{(1+m)^2}}{2} = 0,$$

$$x_2 = \frac{1+m+\sqrt{(1+m)^2-16}}{2}$$

$$\leq \frac{1+\frac{10}{3}+\sqrt{(1+\frac{10}{3})^2-16}}{2} = 3.$$

所以, 方程 $x^2 - (1+m)x + 4 = 0$ 有两个不同的实根, 且两根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 \leq 3$, 即方程组

$$\begin{cases} y = -x^2 + mx - 1 \\ x + y = 3 \quad (0 \leq x \leq 3) \end{cases} \text{ 有两组不同的实数解.}$$

所以, 抛物线 $y = -x^2 + mx - 1$ 和线段 AB 有两个不同交点的充要条件是 $3 < m \leq \frac{10}{3}$.

评注 本题是求抛物线与线段有两个交点的充要条件. 在求结论成立的必要条件时, 也可以这样分析: 第一, 抛物线首先要与直线 AB 有两个交点; 第二, 这两个交点必符合 $x \in [0, 3]$, 因为 $y = -x^2 + mx - 1$ 开口向下, 所以当 $x=0$ 和 $x=3$

时, 此抛物线上的点不在直线 $x+y=3$ 的上方, 又因为 $x=0$ 时, $y=-1$, 肯定在直线 $x+y=3$ 的下方, 故只考虑 $x=3, y=3m-10$ 时的情形了. 即 $3+(3m-10)-3 \leq 0, m \leq \frac{10}{3}$, 综合考虑第一、第二两点, 可得 $3 < m \leq \frac{10}{3}$.



A 组



选择题

1. 设原命题为“若 $A \cap B = B$, 则 $A \subseteq B$ ”, 则原命题、逆命题、否命题和逆否命题中为真命题的个数是 ().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

2. “ $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ ”的含义是 ().

A. a, b, c 中有两个为零
B. a, b, c 两两互为相反数
C. a, b, c 中至少有一个不为零
D. a, b, c 中至少有两个互为相反数

3. $\angle A > \angle B$ 是 $\sin A > \sin B$ 成立的 () 条件.

A. 充分 B. 必要
C. 充要 D. 既不充分也不必要

4. 已知 A 和 B 是两个命题, 如果 A 是 B 的充分而不必要

条件, 那么非 A 是非 B 的 ().

A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

5. 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个负的实数根的充要条件是 ().

A. $0 < a \leq 1$ B. $a < 1$
C. $a \leq 1$ D. $0 < a \leq 1$ 或 $a < 0$

6. 如果命题“ p 或 q ”是真命题, “非 p ”是假命题, 那么 ().

A. 命题 p 一定是假命题
B. 命题 q 一定是假命题
C. 命题 q 一定是真命题
D. 命题 q 可以真也可以假

7. 如果命题“非 p 或非 q ”是假命题, 给出下列四个结论:

① 命题“ p 且 q ”是真命题;
② 命题“ p 且 q ”是假命题;
③ 命题“ p 或 q ”是真命题;
④ 命题“ p 或 q ”是假命题.

其中正确的结论是 ().

A. ①③ B. ②④
C. ②③ D. ①④

8. 若命题 p 的否命题是 q , 命题 q 的逆命题是 r , 则 r 是 p 的逆命题的 ().

A. 逆命题 B. 否命题
C. 逆否命题 D. 原命题

9. 下列判断不正确的是 ().

A. “ $am^2 < bm^2$ ”是“ $a < b$ ”的充要条件
B. 命题“若 p 则 q ”与命题“若 $\neg q$ 则 $\neg p$ ”互为逆否命题

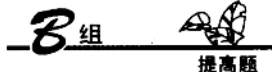


- C. “矩形的两条对角线相等”的否定为假
D. 命题 $\emptyset \subseteq \{1, 2\}$ 或 $4 \in \{1, 2\}$ 为真(其中 $\emptyset$ 为空集)

解答题

10. 写出下列命题的否定, 并判断其真假:

- (1) $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$;
(2) q : 所有的正方形都是矩形;
(3) $r: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$;
(4) s : 至少有一个实数 x , 使 $x^3 + 1 = 0$.



填空题

1. 设命题 A : 小王在看书; 命题 B : 小赵在看书; 命题 C : 小孙在看书.

① 命题“小王、小赵、小孙都在看书”是“A 且 B 且 C”形式的复合命题;

② 命题“小王、小赵、小孙至少一人在看书”是“A 或 B 或 C”形式的复合命题;

③ 命题“小王、小赵都在看书, 只有小孙没有看书”是“A 且 B 或 C”形式的复合命题;

④ 命题“小王、小赵都没有看书, 只有小孙在看书”是“A 或 B 且 C”形式的复合命题.

以上四个命题中正确的是_____. (填上所有正确命题的序号)

2. $x \in \mathbb{R}$ 且 $(1 - |x|)(1 + x) > 0$ 的充要条件是_____.

3. 条件 $p: -1 < m < 5$; 条件 q : 方程 $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ 的两根均大于 -2 小于 4, 则 p 是 q 的_____.

4. 已知条件 $p: |x + 1| > 2$, 条件 $q: 5x - 6 > x^2$, 则非 p 是非 q 的_____条件.

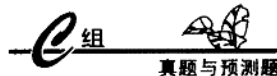
5. 已知下列三个方程 $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$, $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$, $x^2 + 2ax - 2a = 0$ 至少有一个方程有实根, 求实数 a 的取值范围_____.

解答题

6. 已知条件 $p: -2 < b < 0, 0 < c < 1$; 条件 q : 关于 x 的方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有两个小于 1 的正根, 则 p 是 q 的什么条件?

7. (1) 是否存在实数 p , 使“ $4x + p < 0$ ”是“ $x^2 - x - 2 > 0$ ”的充分条件? 如果存在, 求出 p 的取值范围.

(2) 是否存在实数 p , 使“ $4x + p < 0$ ”是“ $x^2 - x - 2 > 0$ ”的必要条件? 如果存在, 求出 p 的取值范围.



选择题

1. (2005 · 北京理) “ $m = \frac{1}{2}$ ”是直线 $(m + 2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m - 2)x + (m + 2)y - 3 = 0$ 相互垂直的().

- A. 充分必要条件
B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

2. (2005 · 重庆理) 已知 α, β 为锐角, 若 $p: \sin \alpha < \sin(\alpha + \beta)$; $q: \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的().

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. (2005 · 湖南文) 设集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\right\}$, $B = \{x \mid |x-1| < a\}$, 则“ $a = 1$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的().

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

4. (2004 · 北京) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充分必要条件是().

- A. $a \in (-\infty, 1]$
B. $a \in [2, +\infty)$
C. $a \in [1, 2]$
D. $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

5. (2004 · 重庆理) 一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0 (a \neq 0)$ 有一正根和一负根的充分而不必要条件是().

- A. $a < 0$
B. $a > 0$
C. $a < -1$
D. $a > 1$

解答题

6. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 求证 $|x + y| = |x| + |y|$ 成立的充要条件是 $xy \geq 0$.

学题,这时解题思想往往很深刻,因而也较难.

2. 高考预测

(1)在复习中首先把握基础性知识,深刻理解本单元的基本知识点、基本数学思想和基本数学方法.重点掌握集合、充分条件与必要条件的概念和运算方法.要真正掌握数形结合思想——用维恩图解题.

(2)涉及本单元知识点的高考题,如前所述,既有小型综合题,也有大型综合题.所以在复习中,要灵活掌握小型综合题型(如集合与映射,集合与自然数集,集合与不等式,集合与方程等;充分条件、必要条件与三角、立体几何、解析几何中的知识点的结合等);也应对有一定难度的大型综合题型进行有针对性的训练与准备.

3. 历年高考题选

● 样题一 (2002·天津·江西)设集合

$$M = \left\{ x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$N = \left\{ x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ 则 } ().$$

- A. $M=N$ B. $M \subseteq N$
C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

命题意图 本题考查实数、集合的基本知识.

解答要点 在 M 中, $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4}$, 在 N 中, $x = \frac{k+2}{4}$. 显然, 由于 $k \in \mathbb{Z}$, 故有对于相同的 k , $2k+1$ 所取实数个数少于 $k+2$ 所取实数的个数.

$\therefore M \subseteq N$, 故应选 B.

考点扫描 本题涉及实数与集合的有关知识, 题目小巧玲珑, 富于思考, 活而不难, 属容易题.

● 样题二 (2003·上海) 设集合 $A = \{x \mid x < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

命题意图 本题主要考查不等式、集合等基本知识.

解答要点 $\because B = \{x \mid x > 3, \text{ 或 } x < 1\}$,

$$A = \{x \mid x < 4\},$$

$$\therefore A \cap B = \{x \mid x < 1, \text{ 或 } 3 < x < 4\}.$$

$$\therefore \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \notin A \cap B\} = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}.$$

考点扫描 本题涉及知识点是解不等式、集合的有关运算. 理解集合的有关含义及会解(简单二次)不等式, 考生均可以得到分数, 属容易题.

● 样题三 (2004·全国) 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是 ().

- A. $(\complement_I A) \cup B = I$
B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$
D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

命题意图 本小题主要考查有关集合的概念及运算.

解答要点 利用图形及已知, 答案 B 是错误的.

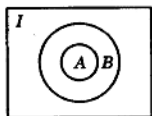


图 1-3-2

故选 B.

● 样题四 (2004·全国·理) 设集合 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 - y = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

命题意图 考查集合的概念与运算以及简单数形结合的数学思想.

解答要点 $M \cap N = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \right\}$

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} - x^2$$

取 $x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故有两组解.

$\therefore$ 选 B.

● 样题五 (2004·天津·文) 设集合 $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$, 那么下列结论正确的是 ().

- A. $P \cap Q = P$ B. $P \cap Q \supseteq Q$
C. $P \cup Q = Q$ D. $P \cap Q \subseteq P$

命题意图 考查集合的运算与概念.

解答要点 $P \cap Q = \{2, 3, 4, 5, 6\} \subseteq P$, 故选 D.

● 样题六 (2004·湖北·理 10) 设集合 $P = \{m \mid -1 < m < 0\}$, $Q = \{m \in \mathbb{R} \mid mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$, 则下列关系中成立的是 ().

- A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$
C. $P = Q$ D. $P \cap Q = \emptyset$

命题意图 考查集合的运算及二次函数、二次不等式之间的关系.

解答要点 $mx^2 + 4mx - 4 < 0$ 恒成立

若 $m=0$, 则 $-4 < 0$ 成立, 故 $m=0$

$$\text{若 } m \neq 0, \text{ 则 } \begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 16m^2 + 16m < 0 \end{cases}$$

$$\therefore -1 < m < 0$$

$$\text{故 } Q = \{m \mid -1 < m \leq 0\}$$

$$\therefore P \subseteq Q.$$

故选 A.

考点扫描 集合的概念, 交、并、补的运算.

集合符号的正确理解与应用, 结合一次、二次不等式是高考客观题中考查集合方面的主要考点.

● 样题七 (2004·天津·理 8) 已知数列 $\{a_n\}$, 那么“对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y = 2x + 1$ 上”是“ $\{a_n\}$ 为等差数列”的 ().

- A. 必要而不充分条件
B. 充分而不必要条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

命题意图 本小题主要考查充要条件的概念.

解答要点 $P_n(n, a_n)$ 在直线 $y = 2x + 1$ 上

$$\Rightarrow a_n = 2n + 1$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ 为等差数列}$$

反之, 若 $\{a_n\}$ 为等差数列.

如 $a_n = 2$ 不满足 $a_n = 2n + 1$