普通高中课程标准实验教材

决胜双基

PUTONG GAOZHONG KECHENG BIAOZHUN SHIYAN JIAOCAI

JUESHENG SHUANGJI

SHUXUE

数学

高一上

浙江教育出版社

PUTONG GAOZHONG KECHENG BIAOZHUN SHIYAN JIAOCAI
JUESHENG SHUANGJI
SHUXUE

普通高中课程标准实验教材

决胜双基

数学

策划 张莫宙
主编 何文忠 陈守礼 蒋 亮
编委 王晓明 吴建洪 李左杰 蔡洪军 余智军 杨亢尔
马洪炎 赵红庆 邬坚耀 范丽观 陈建忠

高一上

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

普通高中课程标准实验教材决胜双基 数学 高一.上 / 蒋亮编. —杭州：浙江教育出版社，2007.4
ISBN 978-7-5338-6960-1

Ⅰ. 普… Ⅱ. 蒋… Ⅲ. 数学课－高中－习题
Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 046666 号

普通高中课程标准实验教材

决胜双基 数学 高一上

策　　划　张莫宙
主　　编　何文忠　陈守礼　蒋　亮
出版发行　浙江教育出版社
（杭州市天目山路 40 号　邮编：310013）
责任编辑　金馥菊
装帧设计　韩　波
责任校对　汪　晖
责任印务　温劲风
图文制作　杭州富春电子印务有限公司
印刷装订　余杭人民印刷有限公司

开　　本　787 × 1092　1/16
印　　张　11.25
字　　数　335 000
版　　次　2007 年 4 月第 1 版
印　　次　2007 年 4 月第 1 次
印　　数　00 001—10 000
标准书号　ISBN 978-7-5338-6960-1
定　　价　14.00 元

联系电话：0571-85170300-80928
e-mail：zjjy@zjcb.com
网　址：www.zjeph.com

序　言

摩天大楼基于坚固的基础工程,跨海大桥依靠深稳的桥墩建设。“基础扎实,思维敏捷”,则是我们对某同学的数学学习评语。

“坚实的基础,加上创新的思考”是优质教育的主旋律。缺乏基础的创新是空想,不想创新的打基础则是傻练。本书就是想帮助同学们在打好基础的前提下,谋求发展,获得良好的数学成绩,提高数学文化素质。

一门学科的基础,是历史地形成的。前人的经验告诉我们,要学好一门功课,必须掌握一些最重要的基本知识,形成必要的基本技能。打基础往往是枯燥乏味的,并没有捷径可走。学美术,要从最简单的素描开始画;学书法,要一笔一画地反复写;弹钢琴,必须按照规定的指法练;学数学,则必须严格地按照数学规则做好练习。

无数的事实证明,必要的记忆是通向理解的前提,熟练的运算是提高思维效率的关键,严密的逻辑演绎是形成正确思维的保证,有变化的重复是获得创新发展的手段。这是编写本书的各位老师在两年多的研修学习中形成的共识。他们把这些理论认识化成了可以实际操作的教学过程,我们期待着他们的成功。

“基础”重要,毕竟不是目的。我们的目的是为了发展。一味地打基础,好比在花岗岩的基础上搭建“茅草房”,乃是一种浪费。因此,这本书注意基础和发展之间的平衡。本书的特色是:在打好基础的前提下求发展,在发展的指导下打基础。

中国的中学生在国际数学奥林匹克竞赛中屡获冠军,在大范围数学成绩调查中曾经位居第一。这是广大中小学教师和学生共同努力的结果。我们不能躺在这些成绩上徘徊不前,要积极参与数学教育的改革,使得数学学习更加主动,更加有数,更加具有创新性。但是,永远不要忘了:“万丈高楼平地起”,打好基础,掌握数学双基的要求是绝对不会过时的。

愿我们共同创建更加灿烂的数学明天!

张奠宙

华东师范大学数学研究所

2007年初春

目 录

第一章　集合与函数概念

集合论是数学的一个基本分支，其基本概念已渗透到数学的所有领域. 创始人康托尔也以其集合论的成就被誉为对20世纪数学发展影响最深的学者之一.

20世纪初，在英国数学家贝利和德国数学家克莱因等人的大力倡导和推动下，函数进入了中学数学. 克莱因提出了"以函数概念和思想统一数学的内容"的重要思想，他认为，函数概念应该成为数学教育的灵魂，以函数概念为中心，将全部数学教材集中在它的周围，并充分地综合.

"集合"与"函数"对学好高中数学具有基础性的作用，新教材以此为开篇，足见其在数学中的重要性.

本章内容包括：集合，函数及其表示，函数的基本性质.

基础知识 JICHU ZHISHI

集合　函数及其表示　函数的基本性质

集合

集合的基础知识主要体现在对集合概念的认识和理解.

1. 集合的概念

(1) 集合的定义：一组确定对象的全体组成一个集合. 组成集合的对象叫元素.

集合是数学中最原始的不加定义的概念，其定义也是一种描述性的说明.

集合的定义有两层含义：

①定义的对象必须明确，不能模棱两可；

②包含的对象具备完备性和纯粹性，即只要符合条件的对象必在集合之中，不具备条件的对象一定不在集合中.

(2) 集合的元素的四大特性：

①互异性：元素各不相同；

②无序性：元素之间没有顺序之分；

③确定性：元素必须是确定的；

④任意性：元素可以是任何对象.

(3) 集合的表示方法：列举法、描述法、图示法.

①用列举法表示集合时，元素不重复，不计次序，无遗漏地一一写在大括号内，且元素与元素之间用","隔开.

②用描述法表示集合时，首先要弄清集合的元素构成的规律，然后把集合元素所具有的属性描述出来，并写在大括号内. 描述法有两种形式：文字描述法和符号描述法. 文字描述法就是用文字来叙述元素所具有的属性；符号描述法的一般形式是$\{x|p(x)\}$，括号内"|"前表示的是元素所具有的一般形式，"|"后表示的是元素所具有的属性.

③图示法又称韦恩图，图形的形状与集合的性质没有任何关系，图示法作为集合的一种直观表示可帮助我们理解和分析问题.

列举法的优点是元素清晰可见，一目了然，缺点是不易看出元素的属性；描述法则突出了元素所具有的属性，其中文字描述通俗易懂，符号描述简洁概括，但相对抽象；图示法则形象直观，它特别适合于表示抽象集合(即元素不明确的集合).

2. 元素与集合的关系

集合中的每个对象叫做这个集合的元素，元素与集合之间的关系用“$\in$”(属于)与“$\notin$”(不属于)表示，二者必有其一.

3. 集合的分类

根据集合中元素的个数，我们将集合分为空集$\varnothing$(没有元素)、有限集(有限个元素)、无限集(无限多个元素).

特殊的数集：非负整数集(或自然数集)记作 $\mathbf{N}$，正整数集记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$，整数集记作 $\mathbf{Z}$，有理数集记作 $\mathbf{Q}$，实数集记作 $\mathbf{R}$.

4. 集合与集合的关系

对于两个集合，一般情况下没有什么关系，特殊的有子集和相等两种关系.

子集：对于两个集合 A，B，若集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ $(B\supseteq A)$；若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$.

用集合语言描述子集，可以叙述为：对于集合 A，B，若任意 $x\in A$，都有 $x\in B$，则 $A\subseteq B$ $(B\supseteq A)$；若任意 $x\in A$，都有 $x\in B$，且存在 $x_0\in B$，使得 $x_0\notin A$，则 $A\subsetneqq B$ $(B\supsetneqq A)$.

显然，空集是任何一个集合的子集，是任何一个非空集合的真子集.

相等：对于集合 A，B，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

特别提示

(1) 元素与集合之间的关系用符号“$\in$”或“$\notin$”连接，集合与集合之间的关系用符号“$\subsetneqq$”、“$\subseteq$”、“$=$”连接，两者不能混淆.

(2) 在证明两集合的关系时，通常作如下等价转化：

要证明：$A\subseteq B$ $(B\supseteq A)\Leftrightarrow$证明：任意 $x\in A$，都有 $x\in B$；

要证明：$A\subsetneqq B$ $(B\supsetneqq A)\Leftrightarrow$证明：任意 $x\in A$，都有 $x\in B$，且存在 $x_0\in B$，使得 $x_0\notin A$；

要证明：$A=B\Leftrightarrow$证明：$A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

5. 集合的运算

和数集上定义加法、减法等运算一样，我们在集合之间也定义了三种运算：并、交、补.

(1) 并运算：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A，或 x\in B\}$.

(2) 交运算：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A，且 x\in B\}$.

(3) 补运算：若 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 U 中子集 A 的补集，记作 $\complement_U A=\{x\mid x\in U，且 x\in A\}$.

特别提示

(1) 我们把集合 U 称为全集，因此，补运算的前提是必须明确全集范围.

(2) 关于补运算有下列性质：设 U 为全集，则 $\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

(3) 教科书上未讨论集合运算的结合律、分配律、交换律等，因此，诸如 $A\cap B\cap C$，$A\cup B\cup C$ 等书写都是不允许的.

函数及其表示

函数是中学数学的最重要的基本概念之一，函数的知识在数学和其他许多学科中有着广泛的应用. 初中阶段把函数看成是两个变量之间的相互依赖关系(变化

崇),高中阶段则把函数看成是两个变量之间的对应关系(映射学)."映射学"利用集合语言定义函数,使函数的概念更加"数学化",比起初中的"变化学"(用文字语言定义函数)能更加深刻地揭示函数的本质.

1. 函数的概念

设A,B是非空的数集,如果按照某个确定的对应关系f,使对于集合A中的任意一个数x,在集合B中都有惟一确定的数$f(x)$和它对应,那么就称$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个函数.记作$y=f(x)$,$x\in A$.其中x叫自变量,x的取值范围A叫做函数$y=f(x)$的定义域;与x的值相对应的$f(x)$的值叫做函数值,函数值的集合$C=\{f(x)|x\in A\}$ $(C\subseteq B)$叫做函数$y=f(x)$的值域.

从函数的定义可以知道函数概念中有三大要素,即定义域A、值域C和对应法则f.当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则确定后,函数的值域也随之确定.因此,定义域和对应法则为函数的两个基本要素,当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时,这两个函数才是同一个函数.

2. 函数的定义域

函数的定义域是函数中自变量的取值范围,是构成函数的基本要素,函数的一切性质都建立在定义域基础之上,因此,研究函数时,务必先确定定义域.

当一个函数用解析式表示时,其定义域有下列三种表示方法:

(1) 默认型:用这种类型表示的定义域经常被省略不写,其定义域为使得函数表达式有意义的自变量的取值范围.值得注意的是,我们不能把定义域省略,即在解题过程中,在求出函数解析式的同时,必须写出定义域.

(2) 实际型:根据问题的实际意义所确定的自变量的取值范围.这种类型的定义域不能省略.

(3) 规定型:无条件规定的自变量的取值范围.这种类型的定义域也不能省略.

3. 函数的对应法则

函数的对应法则是构成函数的又一基本要素,其表示方法有下列三种:

(1) 解析法:把两个变量的对应关系,用一个等式来表示,这个等式叫函数的解析表达式,简称解析式.

(2) 列表法:以表格的形式来表示两个变量之间的对应关系.

(3) 图象法:借助于平面直角坐标系,用点(x,y)的图象(如曲线)来表示两个变量之间的对应关系.

4. 分段函数

某些函数,对于自变量x的不同取值范围,其对应法则也不同,这样的函数称为分段函数.分段函数的特点是按x的不同取值进行分段表述.

分段函数是一个函数,而不是几个函数.只是由于该函数在自变量取值的各个阶段其对应关系不一样才以分段形式给出,因此它的定义域、值域应是各段相应集合的并集.

处理分段函数时,首先要确定自变量的取值属于哪个范围,然后选取相应的对应关系.要注意分段函数的正确书写格式.

5. 区间的概念

区间是实数轴上某一线段或射线上的点所对应的实数的集合.闭区间$[a,b]$表示满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合;开区间(a,b)表示满足不等式$a<x<b$的实数x的集合;满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的实数x的集合叫做半开半闭区间,分别表示为$[a,b)$,$(a,b]$;实数集$\mathbf{R}$可以用区间表示为$(-\infty,+\infty)$;满足$x\geqslant a$,$x>a$,$x\leqslant b$,$x<b$的实数x的集合分别表示为$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,b)$.

区间是实数集的另一种表示方式,它首先是一个集合,因此,区间与区间之间以及区间与集合之间仍可用集合的运算符号连接.

6. 映射的概念

当函数定义中的两个数集扩展到任意集合时,就可得到映射的概念.设A,B是两个非空的集合,如

果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素与它对应，那么这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$. 给定一个集合 A 到集合 B 的映射 f，且 $a\in A$，$b\in B$，如果元素 a 与元素 b 对应，那么我们把元素 b 叫做元素 a 的象，元素 a 叫做元素 b 的原象.

特别提示

(1) 集合 A，B 及对应法则 f 是一个整体，三者缺一不可.

(2) 对应法则具有"方向性"，即强调从集合 A 到集合 B 的对应，它与从集合 B 到集合 A 的对应关系一般是不同的.

(3) 集合 A 中每一个元素，在集合 B 中都有象，并且象是惟一的，这是映射区别于一般对应的本质特征.

(4) 集合 A 中不同的元素，在集合 B 中与其对应的象可以是同一个.

(5) 不要求集合 B 中的每一个元素在集合 A 中都有原象.

7. 一一映射

一一映射是一个特殊的映射. 一般地，设 A，B 是两个集合，$f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射下，满足：

(1) 对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象；

(2) 集合 B 中每一个元素都有原象.

那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射.

一一映射在判断函数是否存在反函数时，有着非常重要的作用.

函数的基本性质

函数的性质是函数的精华所在. 我们用函数观点观察世界、解决现实问题，从某种程度上也就是函数性质在实际问题中的应用.

1. 函数的单调性

函数的单调性定义：在定义域 A 内某个区间，对于自变量 x 的任意两个值 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

若都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则就说函数 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；

若都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则就说函数 $f(x)$ 在这个区间上是减函数.

若函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数(或减函数)，则就说函数 $f(x)$ 在这个区间上具有(严格的)单调性，这个区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

若函数 $f(x)$ 在这个区间上是增函数，则称此区间为增区间；若函数 $f(x)$ 在这个区间上为减函数，则称此区间为减区间.

特别提示

(1) 函数的单调性是对于函数定义域内的某个子区间而言，有些函数在整个定义域内可能是单调的，有些函数在定义域内的部分区间上是增函数，而在另一部分区间上是减函数，还有的函数是非单调的.

(2) 若要证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数，就需证明对于区间 $[a,b]$ 上任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立. 若要证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不是增函数，只需举出反例即可，即只要找到两个特殊的 x_1，x_2，若 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 成立.

(3) 书写函数的单调区间时，区间端点的开或闭没有严格规定，习惯上，若函数在区间端点处有定义，则写成闭区间；若函数在区间端点处没有定义，则必须写成开区间.

(4) 函数的单调性定义中的 x_1,x_2 有三个特性：一是"任意 x_1,x_2"；二是有大小，通常规定 $x_1<x_2$；三是同属于一个单调区间.

(5) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内的两个区间 A、B 上都是增(减)函数，但不能简单地认为函数 $f(x)$ 在 $A\cup B$ 上也是增(减)函数.

(6) 函数的单调性反映在图象上就是：若函数 $f(x)$ 是区间 D 上的增(减)函数，则图象在区间 D 上的部分从左到右是上升(下降)的.

2. 函数的奇偶性

(1) 函数的奇偶性定义：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数；如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数.

由函数的奇偶性定义知，若 x 是函数定义域中的一个数值，则 $-x$ 也必然在函数定义域中，因此，函数 $y=f(x)$ 是奇函数、偶函数的前提是：函数定义域关于原点对称. 若所给的函数定义域不关于原点对称，则这个函数必不具备奇偶性.

函数具有奇偶性必须满足的另一个条件是函数式满足 $f(-x)=-f(x)$（奇函数）或 $f(-x)=f(x)$（偶函数）.

(2) 从图形上刻画函数的奇偶性：偶函数的图象关于 y 轴对称，反过来，如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数；奇函数的图象关于原点对称，反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数.

奇函数 $y=f(x)$ 若在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

3. 函数的最值

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：

(1) 对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$ （$f(x)\geqslant M$）；

(2) 存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$.

那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值(最小值).

若函数在闭区间内具有单调性，则这个函数在区间的端点处达到最值.

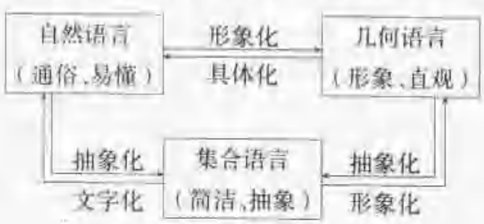
基本技能　JIBEN JINENG

集合的基本技能　函数的基本技能

集合的基本技能　集合语言是现代数学的基本语言，使用集合语言，可以简洁、准确地表达数学含义. 集合的基本技能主要表现在运用集合语言与集合思想来表达和解决实际问题的能力.

1. 会运用集合语言描述实际问题

集合语言就是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言，集合语言与其他语言的关系，以及它的构成如下图所示：



新教科书将集合内容当作一种语言来学习，因此，使用集合语言来描述数学中的一些内容，以发展运用数学语言进行交流的能力，应该贯穿高中学习的全过程.

2. 用解析式描述集合时，会正确地选取元素的表示形式

如：x，(x,y)，(x,y,z).

3. 能根据题意，选择文字语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的数学问题

4. 能用集合的符号语言进行有关集合的并、交、补的运算

5. 能计算一个集合的子集的个数

一般地，若一个集合含有 n 个元素，则它有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.

6. 能用区间准确表示集合

区间的实质是实数轴上某一段的点所对应的实数的集合，因此要善于利用区间的“数轴表示”准确表示集合.

7. 能运用韦恩图解决有关问题

能用韦恩图(Venn)表示集合之间的关系，并利用图形进行元素位置分析和元素个数的计算；重视数形结合的思想方法的应用(如：数轴、几何图形、Venn 图等)，促进抽象思维和形象思维的有机结合.

8. 能进行一些集合与集合之间的关系的证明

如：证明 $A\subseteq B$，$A=B$ 等. 有兴趣的同学可以证明如下公式(即集合运算的结合律、分配律、反演律)：

(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(2) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(3) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

9. 强化对空集$\varnothing$的讨论意识

如：$A\subseteq B$，应首先讨论 $A=\varnothing$的特殊情况. 如：$A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，若 $B\subseteq A$，则 $m=0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}$.

10. 强化补集思想

若一个问题直接求解比较难，则先把所研究的对象的全体视为一个全集，求使问题反面成立的集合 A，然后求 $\complement_U A$，得出原问题的结论，也就是“正难则反”原则.

11. 集合中的数学思想

(1) 数形结合思想：将抽象的集合语言与直观的图形(韦恩图)结合起来，使抽象思维和形象思维相结合，实现抽象概念与具体形象的联系和转化，即把数量关系转化为图形的性质来确定，或者把图形的性质问题转化为数量关系问题来研究.

(2) 分类讨论思想：先根据集合对象的本质属性的相同点和不同点，进行合理的分类，然后对每一类分别进行求解，并综合得出结果.

函数的基本技能

函数是中学数学各主干知识的交汇点，是数学思想、数学方法的综合点，函数思想的实质就是用联系、变化的观点提出数学对象，建立函数关系，使得问题得以解决. 因此，函数的基本技能就是强化函数思想的应用意识.

1. 会熟练求出函数的定义域

若一个函数没有标明定义域，则默认其定义域为使得该函数的解析式有意义的 x 的取值范围.

特别提示

(1) 分式中分母应不等于 0.

(2) 偶次根式中被开方数应为非负数.

(3) 实际问题中还需考虑自变量的实际意义.

(4) 若函数解析式由若干个因式组成，则函数定义域为使得各个因式都有意义的集合的交集.

(5) 函数的定义域是一个集合，因此，其结果需用集合或区间来表示.

2. 会求简单函数的解析式

求函数解析式的常用方法有：代入法、拼凑法、换元法、待定系数法、方程组法等.

(1) 代入法：已知函数 $y=g(x)$，$y=f(x)$，求函数 $y=f(g(x))$ 的解析式时，只需用函数 $g(x)$ 代替函数 $f(x)$ 的解析式中的 x 即可.

(2) 拼凑法：先对函数 $y=f(g(x))$ 的解析式通过拼凑，用函数 $g(x)$ 表示出来，然后用 x 代替两边所有的函数 $g(x)$ 即可.

(3) 待定系数法：待定系数法适用于已知函数类型，用这种方法求函数的解析式通常需要比较自变量 x 的相应项的系数，从而得到关于待定系数的方程组，解方程组即可.

(4) 方程组法：根据给出的关于函数 $f(x)$ 和函数 $f(g(x))$ 所满足的关系式，利用换元得到另一些关于函数 $f(x)$ 和函数 $f(g(x))$ 的方程，解相应方程组即可.

3. 掌握下列这些简单幂函数类的图象和性质

(1) $y=x$ 和 $y=ax+b$；

(2) $y=x^2$ 和 $y=ax^2+bx+c$；

(3) $y=x^3$ 和其他一些简单的三次函数；

(4) $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x+\frac{1}{x}$.

4. 会根据函数解析式的特点，求函数的值域

求函数的值域问题常用的方法有：观察法、配方法、图象法、换元法、利用单调性等. 如有多种解决方法时，应注意选择最优解法.

(1) 观察法：先将函数分解成几个常见的函数，然后利用这些熟知函数的值域来求出原函数的值域.

(2) 配方法：这是求二次函数的值域问题的最基本的方法. 一般地，形如：$F(x)=a[f(x)]^2+bf(x)+c$ 的函数的值域问题均可考虑用配方法.

(3) 图象法：若所给函数经化简恰好是我们所熟知的初等函数，结合这些函数的图象，能形象直观地求出原函数的值域.

(4) 换元法：利用换元将原来较为复杂的函数化为我们熟知的简单函数求解. 在利用换元法求函数的值域时，一定要注意中间变量的取值范围，忽视了这一点，就容易造成错误.

(5) 利用单调性：利用函数的单调性，能勾勒出函数的图象，通过数形结合的方法，形象直观地求出函数的值域.

5. 会证明函数在某区间内的单调性

证明函数单调性最常见的方法是利用导数，在本单元中仅要求学会用定义法证明函数的单调性.

证明函数 $y=f(x)$ 的单调性的一般步骤是：

(1) 设值：在给定区间上任取 x_1，x_2，通常规定 $x_1<x_2$；

(2) 作差：通常将 $f(x_1)-f(x_2)$ 的值与 0 比，以便判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小；

(3) 变形：通常将 $f(x_1)-f(x_2)$ 进行因式分解或配方，以方便定号；

(4) 定号：通过对 $f(x_1)-f(x_2)$ 各因式的符号的讨论，最后决定 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负号；

(5) 结论：若 $f(x_1)-f(x_2)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在给定区间上是增函数；若 $f(x_1)-f(x_2)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在给定区间上是减函数.

6. 掌握函数单调性的应用

利用函数的单调性可以解决有关方程、不等式、值域等问题. 综合函数的单调区间和函数在这些单调区间的端点的函数值，我们便能初步确定函数在定义域上的图象(曲线)，这样，函数与 x 轴的交点(方程问题)，函数在 x 轴的上、下方(不等式问题)，函数的最大值、最小值(值域问题)等问题均可通过数形结合得到解决.

7. 能利用映射的定义解决有关问题

会运用映射的定义判定一个对应是不是映射，并能计算两个有限集之间不同映射的个数. 会运用一一对应思想证明两个集合具有相同的元素个数.

8. 能根据函数的解析式判定函数的奇偶性

判断函数的奇偶性通常从下列两个方面考虑：

(1) 定义域关于原点对称；

(2) 满足 $f(-x)=f(x)$(偶函数)或 $f(-x)=-f(x)$(奇函数).

9. 能从图象的对称性说出函数的奇偶性，能从已知函数在对称轴或对称中心的一边的解析式求其另一边的解析式.

范例与练习 FANLI YU LIANXI

例题　练习

例题

例 1　已知集合 $A=\{x\mid -4+a<x<4+a\}$，$B=\{x\mid x<-1$，或 $x>5\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，试求实数 a 的取值范围.

解　集合 $A=\{x\mid -4+a<x<4+a\}$，$B=\{x\mid x<-1$，或 $x>5\}$，要使 $A\cup B=\mathbf{R}$，只需 $\begin{cases}4+a>5,\\ a-4<-1,\end{cases}$ 解得 $1<a<3$.

评析　本例属基础题，涉及的基础知识有：集合的概念，并集的概念. 涉及的基本技能有：求解一元一次不等式组，能用数轴表示相应的数集.

例 2　设 $f(n)=2n+1\ (n\in\mathbf{N})$，$P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$，记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$，$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$，则 $(\hat{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{P})$ 等于(　　).

(A) $\{0,3\}$　　(B) $\{1,2\}$　　(C) $\{3,4,5\}$　　(D) $\{1,2,6,7\}$

解　$\because$ $\hat{P}=\{0,1,2\}$，$\hat{Q}=\{1,2,3\}$，

$\therefore$ $\hat{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{Q}=\{0\}$，$\hat{Q}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{P}=\{3\}$，$(\hat{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=\{0,3\}$，故选 A.

评析　本例选自浙江省 2005 年高考理科第 9 题. 涉及的基础知识有：集合的概念，集合的描述性表示形式. 涉及的基本技能有：能熟练进行集合的并、交、补等运算.

例 3　如图 1-1，在边长为 4 的正方形 $ABDC$ 上有一点 P，点 P 沿着折线 $BDCA$ 由点 B(起点)向点 A(终点)移动. 设点 P 移动的路程为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 $y=f(x)$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式，并指出这个函数的定义域；

(2) 作出这个函数的图象，并由函数图象说出函数的单调区间、函数的最大值及函数图象的对称轴.

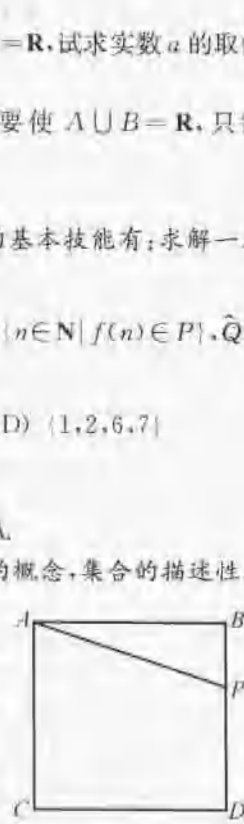


图 1-1

解　(1) 该函数的定义域为$(0,12)$.

当$0<x\leqslant 4$时,$S=f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot x=2x$;

当$4<x\leqslant 8$时,$S=f(x)=8$;

当$8<x<12$时,$S=f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot(12-x)=24-2x$.

所以这个函数的解析式为$f(x)=\begin{cases}2x, & x\in(0,4],\\ 8, & x\in(4,8],\\ 24-2x, & x\in(8,12).\end{cases}$

(2) 作出的函数图象如图 1-2 所示.

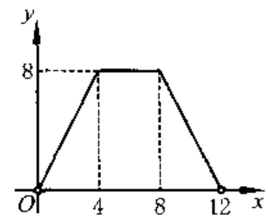


图 1-2

从函数图象可知,函数在区间$(0,4]$上单调递增,在区间$[8,12)$上单调递减,函数的最大值为 8,函数的图象关于直线$x=6$对称.

评析　本例涉及的基础知识有:分段函数的概念,分段函数的表达式,函数的定义域,函数的单调区间.涉及的基本技能有:会作出分段函数的图象,能根据函数的图象确定函数的单调区间,会通过函数图象研究函数的最大值、对称轴.能从几何直观(观察图象)入手,运用自然语言描述函数的图象特征,最后抽象用数学符号刻画相应的数量特征,这是数学学习与研究常用的方法.

例 4　已知函数$f(x)=x^2-2x+3$在区间$[0,a]$ $(a>0)$上最大值为 3,最小值为 2,求实数a的取值范围.

解　由$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$,可得:

(1) 当$0<a<1$时,函数$f(x)$在区间$[0,a]$上单调递减,其最大值为$f(0)=3$,最小值为$f(a)=a^2-2a+3$.由$0<a<1$知,$a^2-2a+3=(a-1)^2+2>2$,显然不合题意.

(2) 当$a\geqslant 1$时,函数$f(x)=x^2-2x+3$在区间$[0,1]$上单调递减,在区间$[1,a]$上单调递增,其最小值为$f(1)=2$.由$a\geqslant 1$,且$f(0)\geqslant f(a)$,即$\begin{cases}a\geqslant 1,\\ a^2-2a\leqslant 0.\end{cases}$得$1\leqslant a\leqslant 2$.

所以当函数$f(x)=x^2-2x+3$在区间$[0,a]$上的最小值为 2,最大值为 3 时,实数a的取值范围是$[1,2]$.

评析　本例涉及的基础知识有:二次函数的图象与性质,二次函数在闭区间上的最值问题.涉及的基本技能有:能根据二次函数的图象,对对称轴$x=1$及动区间进行分类讨论.涉及的基本数学思想有:数形结合思想、分类讨论思想.解答本例时,要综合考虑分类的条件与题设,才能正确求解实数a的取值范围.

例 5　已知函数$f(x)=|x-a|$,$g(x)=x^2+2ax+1$ (a为非负常数).

(1) 当a为何值时,函数$f(x)+g(x)$是偶函数;

(2) 当a为何值时,函数$f(x)$与函数$g(x)$的图象在y轴上的截距相等,并求出此时函数$f(x)+g(x)$的单调递增区间.

解　(1) $\because$　$f(x)+g(x)=|x-a|+x^2+2ax+1$,其定义域$x\in\mathbf{R}$关于原点对称,由$f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)$,可得$a=0$,故当$a=0$时,函数$f(x)+g(x)$为偶函数.

(2) 根据题意,由$f(0)=g(0)$,可得$|a|=1$.又$a>0$,　$\therefore$　$a=1$.

因此函数$f(x)+g(x)=|x-1|+x^2+2x+1$,

即$f(x)+g(x)=\begin{cases}x^2+3x, & x\in[1,+\infty),\\ x^2+x+2, & x\in(-\infty,1).\end{cases}$

当$x\geqslant 1$时,$f(x)+g(x)=x^2+3x$在区间$[1,+\infty)$上单调递增;

当 $x<1$ 时，$f(x)+g(x)=x^2+x+2$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增.

作出该分段函数的图象如图 1-3 所示，结合图象，可得函数在区间 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

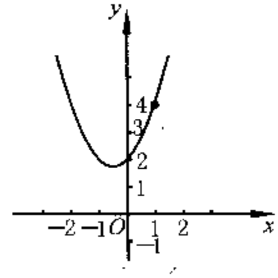


图 1-3

评析 本例涉及的基础知识有：函数的单调性，函数的奇偶性，二次函数的图象和性质. 涉及的基本技能有：会利用函数的图象处理函数的单调区间. 一般地，若函数 $f(x)$ 在其定义域内的两个区间 A,B 上都是增（减）函数，不能简单地认为函数 $f(x)$ 在 $A\cup B$ 上也是增（减）函数. 但在本例中，函数在区间 $\left[-\frac{1}{2},1\right)$ 和区间 $[1,+\infty)$ 上都是增函数，通过观察函数图象得出函数在区间 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上也是增函数. 涉及的基本数学思想有：分类讨论思想，数形结合思想.

例 6 定义在非零实数集上的函数 $y=f(x)$ 满足：

$f(xy)=f(x)+f(y)-c$ （$xy\neq0$，且 $c>0$）.

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 当 $0<x<1$ 时，有 $f(x)>c$，试判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

解 (1) 令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)+f(1)-c$，$f(1)=c>0$.

(2) 任取 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2$，

则 $f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)-c$，即 $f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)+2c$.

$\therefore\ f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-\left[-f\left(\frac{1}{x_2}\right)+2c\right]=f(x_1)+f\left(\frac{1}{x_2}\right)-2c=f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)-c$.

$\because\ 0<\frac{x_1}{x_2}<1,\ f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)>c$，$\therefore\ f(x_1)-f(x_2)>0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

评析 本例考查了抽象函数的单调性的证明，具有一定的代表性. 涉及的基础知识有：函数单调性的定义. 涉及的基本技能有：会用赋值法求函数的值，会用函数的单调性定义证明函数的单调性. 在本例中，要判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号，需对表达式 $f(xy)=f(x)+f(y)-c$ 进行拼凑，从而达到因式分解或化简的目的.

未给出表达式的函数我们称之为抽象函数. 抽象函数是一类深刻挖掘了函数的定义及基本性质的函数模型，赋值法可以使抽象函数问题变得比较明朗，它是解决这类问题常用的方法. 对于抽象函数的单调性的证明，从拼凑到变形，通常围绕着抽象函数所满足的恒等式展开.

练习

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid 0<x<1\}$，$P=\{x\mid -2<x<2\}$，则（　　）.

(A) $M\cap P=\varnothing$　　(B) $M\cap P=M$　　(C) $M\cup P=M$　　(D) $M\cup P=\mathbf{R}$

2. 设集合 $I=\{1,2,3\}$，选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法有（　　）.

(A) 5 种　　(B) 6 种　　(C) 7 种　　(D) 8 种

3. 已知集合 $M=\{x\mid x<3\}$，$P=\{x\mid x>2\}$，则 $M\cap P$ 等于（　　）.

(A) $\varnothing$　　(B) $\{x\mid 0<x<3\}$　　(C) $\{x\mid 1<x<3\}$　　(D) $\{x\mid 2<x<3\}$

4. （2006・全国卷Ⅱ）若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=3-2x$ 的图象关于坐标原点对称，则 $y=f(x)$ 的

表达式为(　　).

(A) $y=2x-3$　　(B) $y=2x+3$　　(C) $y=-2x+3$　　(D) $y=-2x-3$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{3x+1}$的定义域是(　　).

(A) $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　(B) $\left[-\dfrac{1}{3},1\right)$　　(C) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$

6. (2006・浙江卷)设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$,则 $A\cap B$ 等于(　　).

(A) $[0,2]$　　(B) $[1,2]$　　(C) $[0,4]$　　(D) $[1,4]$

7. (2006・浙江卷)函数 $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$,满足 $f(f(x))=f(x)$,则这样的函数个数共有(　　).

(A) 1 个　　(B) 4 个　　(C) 8 个　　(D) 10 个

8. 对 $a,b\in\mathbf{R}$,若记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b,\\ b,a<b,\end{cases}$则函数 $f(x)=\max\{x,1-x\}$ $(x\in\mathbf{R})$的最小值是(　　).

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 0　　(D) 2

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x-|a|$ $(x\in\mathbf{R})$为奇函数,则 a 等于(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) ±1

10. (2006・江苏卷)若 A,B,C 为三个集合,$A\cup B=B\cap C$,则一定有(　　).

(A) $A\subseteq C$　　(B) $C\subseteq A$　　(C) $A\neq C$　　(D) $A=\varnothing$

11. (2006・辽宁卷)设集合 $A=\{1,2\}$,则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$的集合 B 的个数是(　　).

(A) 1　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 8

12. (2006・辽宁卷)设 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的任意函数,则下列叙述正确的是(　　).

(A) $f(x)\cdot f(-x)$是奇函数　　(B) $f(x)\cdot|f(-x)|$是奇函数

(C) $f(x)-f(-x)$是偶函数　　(D) $f(x)+f(-x)$是偶函数

13. 有限集 U 中元素的个数记为 $\mathrm{card}(U)$,设 A,B 都为有限集合,下列结论正确的是(　　).

(A) $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$

(B) $A\subseteq B\Leftrightarrow\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$

(C) $A=B\Leftrightarrow\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$

(D) $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)\Rightarrow A\subseteq B$

14. (2006・重庆卷)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{3,4,5\}$,则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$(　　).

(A) $\{1,6\}$　　(B) $\{4,5\}$　　(C) $\{2,3,4,5\}$　　(D) $\{1,2,3,6,7\}$

15. (2006・山东卷)定义集合运算:$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$. 设集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和是(　　).

(A) 0　　(B) 6　　(C) 12　　(D) 18

16. (2006・山东卷)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$,则 $f(6)$的值是(　　).

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

17. (2006・陕西卷)已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$,集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-6=0\}$,则 $P\cap Q$ 等于(　　).

(A) $\{-2,3\}$　　(B) $\{-3,2\}$　　(C) $\{3\}$　　(D) $\{2\}$

18. (2006・陕西卷)函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\in\mathbf{R})$的值域是(　　).

(A) $[0,1]$　　(B) $[0,1)$　　(C) $(0,1]$　　(D) $(0,1)$