高等教育"十一五"规划教材

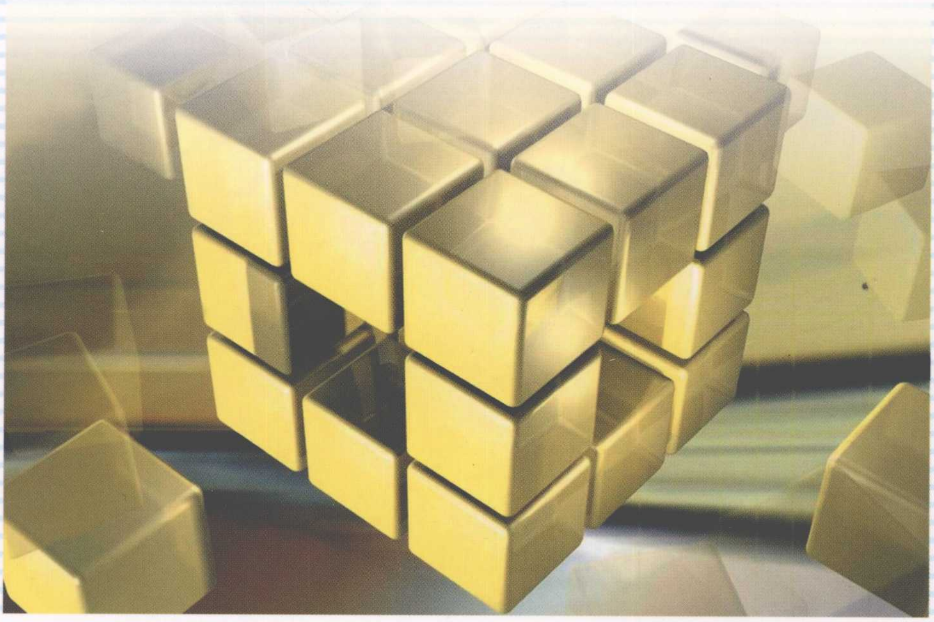
公共课教材系列

高等数学

（下册）

孙晓梅◎主编

郝祥晖 董儒贞 张 驿◎副主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

高等数学

（下册）

孙晓梅　主编

郝祥晖　董儒贞　张　驿　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是中国科学院普通高等教育“十一五”部级规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合作者多年的教学实践并吸收、学习同行的先进经验的基础上编写的. 书中配有大量的例题、习题，难易程度适中，符合国家对高职高专培养目标的要求.

本书分为上、下两册. 下册共五章，内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程、线性代数简介. 书末附有习题答案与提示.

本书的编写在保持结构完整的基础上，尽量通俗简易化，例题较多，便于自学. 本本适用于高等职业学校、高等专科学校、职业技术学院工科各专业的数学课程使用，也可作为各类技术人员及学生的自学教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/孙晓梅主编. —北京：科学出版社，2007
(高等教育“十一五”规划教材 公共课教材系列)
ISBN 978-7-03-019546-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 孙… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 119915 号

责任编辑：王　彦　赵卫江 / 责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007年8月第　一　版　开本：787×1092 1/16
2007年8月第一次印刷　印张：9 3/4
印数：1—3 000　字数：225 000

定价：30.00元(上下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)
销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62147541 (VP04)

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 9 章　多元函数微分学

前面几章中我们讨论的函数都只有一个自变量，称之为一元函数. 但在许多自然现象和实际问题中，往往需要研究多个因素引起的变化，从数学的角度来讲，就是一个变量依赖多个变量的情形，这就提出了多元函数以及多元函数的微积分问题. 本章在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用，且以二元函数为主，这是因为从一元函数推广到二元函数，“一”与“多”的差异已经能充分地显现出来，而从二元函数推广到三元函数及一般的 n 元函数只是形式上的不同，却无本质上的差别.

9.1　多元函数的极限与连续

9.1.1　多元函数

在很多自然现象和实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下.

例 9.1　正圆锥体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

V 随着 r、h 的变化而变化，当 r、h 在一定范围($r>0,h>0$)内取定一对值时，V 的值就随之确定. 即当取定二元有序数组(r,h)时，V 便有确定的值与之对应.

例 9.2　根据物理学知识，一定量的理想气体的压强 P、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$P=\frac{RT}{V}\quad (R\ 为常数)$$

这样，当 V、T 在它的变化范围($V>0,T>0$)内取定一对(V,T)时，就有唯一确定的 P 与之对应.

例 9.3　长方体的体积 V 与它的长 x、宽 y、高 z 三个量对应，其对应规律为

$$V=xyz$$

例 9.4　在一个有空调的房间里，考虑某时刻的温度分布，在选定空间直角坐标系后，房间内的每一点(x,y,z)处都有唯一确定的温度 u 与之对应. 即温度 u 随 x,y,z 的变化而变化，可记为

$$u=u(x,y,z)$$

若考察房间中不同时刻 t 的温度分布，则可表示为 $u=u(x,y,z,t)$.

上述几例都是多元函数的实例，抛开其具体意义，仅从数量关系来研究，它们有着共同的属性，据此可概括出二元函数以及 n 元函数的定义. 在给出定义之前，先介绍一点集合的知识.

在解析几何中，我们已经知道一个二元有序数组(x,y)对应于平面上的一个点，这种

点的集合称为平面点集. 类似地,一个三元有序数组(x,y,z)对应于空间中的一个点,这种点的集合称为空间点集. 令$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$为点$P(x,y)$与点$P_0(x_0,y_0)$之间的距离,则满足$\rho<\delta$的点集称为点$P_0(x_0,y_0)$的$\delta$邻域($\delta>0$为常数),记为$U(P_0,\delta)$,即$U(P_0,\delta)=\{P(x,y)\mid |P_0P|<\delta\}$. 几何上,$U(P_0,\delta)$就是表示以$P_0$为中心、$\delta$为半径的圆内点的全体.

1. 二元函数的定义

定义 9.1 设有变量x,y和z,如果当变量x,y在一定范围内任意取定一对值时,变量z按着一定的法则总有确定的值与它们对应,则称z为x,y的二元函数,记作$z=f(x,y)$或$z=z(x,y)$,其中x,y称为自变量,z称为因变量或函数. 自变量的取值范围称为函数的定义域.

二元函数在点(x_0,y_0)所取得的函数值记为

$$z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z\Big|_{(x_0,y_0)}\quad \text{或}\quad f(x_0,y_0)$$

类似地,可以定义三元函数$u=f(x,y,z)$以及n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,多于一个自变量的函数统称为多元函数. 如例 9.1、例 9.2 得到的是二元函数,例 9.3 得到的是三元函数,而例 9.4 得到的则是四元函数.

因为数组(x,y)表示平面上的一点P,所以二元函数$z=f(x,y)$也可以记为$z=f(P)$,而数组(x,y,z)表示空间一点P,所以三元函数$u=f(x,y,z)$也可以记为$u=f(P)$,同样n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也可以记为$u=f(P)$,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为点P的坐标. 当P是数轴上的点x时,$u=f(P)$就表示一元函数. 以点P表示的函数称为点函数,这样,不论是一元函数还是多元函数,我们都可以统一地表示为点P的函数$u=f(P)$.

一元函数$y=f(x)$的定义域一般来说是一个或几个区间,二元函数$z=f(x,y)$的定义域是平面点集,它通常是由平面上一条或几条光滑曲线所围成的具有连通性的部分平面,这样的部分平面称为区域. 而如果一个区域内任意两点都可以用完全属于此区域内的折线连接起来,这样的区域称为连通区域,即二元函数$z=f(x,y)$的定义域通常是平面区域. 围成区域的曲线称为边界,边界上的点称为边界点,包含边界的区域称为闭区域,不包含边界的区域称为开区域. 一个区域D,如果能包含在一个以原点为圆心的有限圆内,即存在集合$E=\{(x,y)\mid \sqrt{x^2+y^2}<R\}$,使得$D\subset E$,那么称$D$是有界区域,否则称$D$为无界区域.

例 9.5 求$z=\ln(9-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-1}$的定义域.

解 为使上式有意义,必须$\begin{cases}9-x^2-y^2>0\\ x^2+y^2-1\geqslant 0\end{cases}$,即$1\leqslant x^2+y^2<9$. 所以定义域是以圆点为圆心的环形域,是有界区域(图 9-1).

例 9.6 求$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域.

解 显然要使得上式有意义,必须满足$\begin{cases}x-\sqrt{y}\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$,即$\begin{cases}y\leqslant x^2\\ y\geqslant 0\end{cases}$. 定义域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^2\}$是一无界区域(图 9-2).

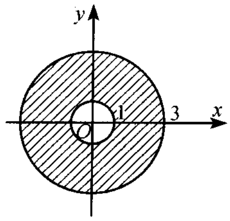


图 9-1

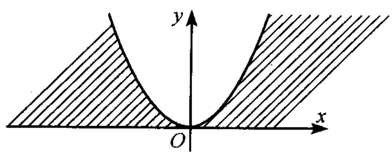


图 9-2

多元函数也有单值性与多值性的概念. 例如：$x^2+y^2+z^2=R^2$，当 $P(x,y)\in D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，由方程可确定 z 的值，但 z 的值不止一个，这时 z 是多值函数. 单值分支为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

2. 二元函数的几何意义

我们知道，一元函数的图像一般是平面上的一条曲线，对于二元函数 $z=f(x,y)$，设其定义域为 D，当 $M(x,y)\in D$ 时，相应的函数值为 $z=f(x,y)$. 于是，有序数组 (x,y,z) 确定了空间中的一点 $P(x,y,z)$ 而点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y,z),(x,y)\in D\}$ 就是二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形（图 9-3），它是空间中的一张曲面 Σ，定义域 D 即为曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域.

例如，由空间解析几何的知识，我们知道线性函数 $z=1-x-y$ 的图形是一张平面（图 9-4），而 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面（图 9-5）.

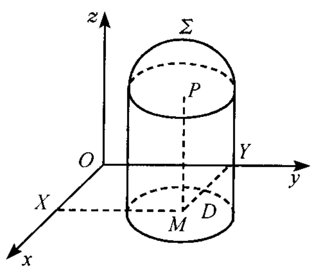


图 9-3

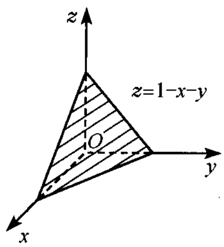


图 9-4

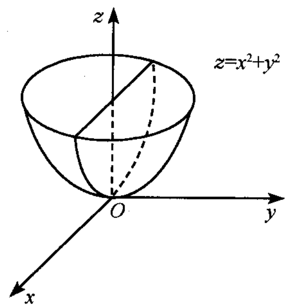


图 9-5

9.1.2　二元函数的极限

极限是研究当自变量变化时，函数的变化趋势. 类似于一元函数的极限，我们考虑当 $P(x,y)$ 趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 的变化趋势. 点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程可以用 $x\to x_0, y\to y_0$ 来表示.

与一元函数的极限比较，“$z=f(x,y)$ 无限接近 A”这句话没有多大区别，区别在于 $P(x,y)$ 无限接近 $P_0(x_0,y_0)$ 较为复杂. 表现在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的方式很多，P 可以取直线趋于 P_0，可以取折线趋于 P_0，也可以取一条复杂的曲线趋于 P_0，尽管这些方式有很多种，

但有一点是共同的,即只要 P 趋于 P_0,就是 P 与 P_0 之间的距离 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 趋近于零. 由此,给出二元函数极限的如下定义.

定义 9.2 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义(可不包括 P_0),如果动点 $P(x,y)$ 沿任意方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,对应的函数值 $f(x,y)$ 总是趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限,或称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处收敛于 A,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

这种极限称为二重极限. 需要注意的是,二重极限中 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 是在平面 xOy 上以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时,$f(x,y)$ 都趋于 A,只要在一个方式上 $f(x,y)$ 不趋于相同的 A,则二重极限就不为 A. 另外,一元函数求极限的方法及运算法则(除洛必塔法则外)对多元函数依旧成立. 如两个重要极限、等价无穷小法则等.

例 9.7 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{\tan xy}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{\tan xy}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\frac{xy}{\tan xy}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\tan xy}}=e^1=e$

例 9.8 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的极限.

解 沿 x 轴趋于 0 时,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f(x,y)=0$;沿 y 轴趋于 0 时,$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}}f(x,y)=0$;虽然 (x,y) 沿两坐标轴趋于原点时得到了相同的极限,但并不能说明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在. 因为当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 0 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

该极限值与 k 有关不等于定常数,所以此函数在 $(0,0)$ 点的极限不存在.

9.1.3 二元函数的连续性及性质

与一元函数的极限类似,可以给出二元函数连续的定义.

定义 9.3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续,$P_0(x_0,y_0)$ 称为 $z=f(x,y)$ 的连续点,否则称该点为不连续点.

设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,且 D 为开(或闭)区域,若对每一点 $(x,y)\in D$,$z=f(x,y)$ 都连续,则称 $z=f(x,y)$ 在 D 内(上)连续,这时称 $z=f(x,y)$ 是 D 内(上)的连续函数. 与闭区间上连续的一元函数相类似,有界闭区域上连续的多元函数也有如下重要性质.

性质 9.1(最大值和最小值) 若函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上有界,并且能取得最大值与最小值.

性质 9.2(介值定理)　设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in D$，且 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，则对任何满足不等式 $f(x_1,y_1)<\mu<f(x_2,y_2)$ 的实数 μ，总存在 $P_0(x_0,y_0)$ 点，使得 $f(x_0,y_0)=\mu$. 特别地，函数可以取得其最大值与最小值之间的一切值.

前面我们已经指出：一元函数中关于极限的运算法则对于多元函数仍然适用. 利用这些运算法则可以证明二元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零时，二元连续函数的商是连续函数；二元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似，二元初等函数是可用一个式子所表示的函数，而这个式子分别由 x,y 的基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算构成. 并且可以证明：二元初等函数在其定义区域内是连续的. 因此我们也可利用函数连续性来求极限.

例 9.9　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$.

解　$f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$ 是连续函数，点 $(1,3)$ 是定义域内的点，所以

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)}\frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=f(1,3)=\frac{1}{3}$$

思考题

1. 比较一元函数与二元函数的极限、连续概念的异同.
2. 参考二元函数的定义，试写出三元函数的定义.

9.2 偏　导　数

在研究一元函数时，我们从研究函数的变化率引入了导数概念. 但多元函数的自变量不止一个，因变量与自变量的关系比一元函数复杂得多. 在这一节里，我们首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率.

9.2.1　偏导数的定义

1. 改变量

设 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$，$P_1(x_0+\Delta x,y_0)$，$P_2(x_0,y_0+\Delta y)$，$P_3(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$，则称 $f(P_1)-f(P_0)$ 为 $f(x,y)$ 在 P_0 点关于 x 的偏改变量，记为 $\Delta_x z$，即 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$.

同理，$\Delta_y z=f(P_2)-f(P_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 在 P_0 点关于 y 的偏改变量，而 $\Delta z=f(P_3)-f(P_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 在 P_0 点的全改变量.

2. 偏导数

一般地，设 $z=f(x,y)$ 是二元函数，若先将 y 固定，即 y 取定常数，这时 z 就是 x 的一

元函数，该函数对 x 的导数就称为二元函数对 x 的偏导数. 定义如下：

定义 9.4　设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，$P_1(x_0+\Delta x,y_0)\in U(P_0,\delta)$，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ 存在，则称之为 $z=f(x,y)$ 在 P_0 点关于 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$，即

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

同理，极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 称为 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点关于 y 的偏导数，记作 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

由偏导数定义知，求 $z=f(x,y)$ 关于某个变量的偏导数时，只要先把其他变量看做常数，这时只有一个变量，仍旧是一元函数的求导问题，所以不必再建立偏导数的法则.

若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点 (x,y) 处对 x(或 y)的偏导数都存在，则这个偏导数为 x,y 的函数，此函数称为 $z=f(x,y)$ 对 x(或 y)的偏导函数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 或 $f_x(x,y)$(或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$f_y(x,y)$). 由偏导数的概念可知，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x(或 y)的偏导数就是偏导函数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$(或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$)在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的函数值，以后在不至于混淆的情况下也把偏导函数简称为偏导数.

例 9.10　求 $z=x^y$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

例 9.11　求 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$ 的偏导数.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)_x=\frac{y^2}{y^2+x^2}\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)_y=\frac{y^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

例 9.12　设 $f(x,y)=(y-1)\sqrt{1+x^2}\sin(x,y)+x^3$，求 $f_x(2,1)$.

解　如果先求 $f_x(x,y)$，运算是比较繁杂的，我们可以先代入 $y=1$，得到 $f(x,1)$，然后对 x 求导数得 $f_x(x,1)$，再代入 $x=2$ 得到 $f_x(2,1)$.

$$f(x,1)=x^3$$

$$f_x(2,1)=\frac{\mathrm{d}f(x,1)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=2}=3x^2\Big|_{x=2}=12$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 9.13　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$.

解　$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{0}{x^2+0}-0}{x}=0.$

同理 $f_y(0,0)=0$.

这个例题说明了函数不连续而偏导数仍存在.

二元函数偏导数定义可推广到三元及三元以上的函数.

例 9.14　设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

例 9.15　设 $z=(1+xy)^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}y=y^2(1+xy)^{y-1}.$

为求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，方程 $z=(1+xy)^y$ 两边取对数，得 $\ln z=y\ln(1+xy)$，两边对 y 求导，得

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\ln(1+xy)+y\frac{1}{1+xy}x$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right].$

例 9.16　理想气体的状态方程为 $PV=RT$，求证：$\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P}=-1.$

解　$P=\dfrac{RT}{V},\dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2};V=\dfrac{RT}{P},\dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{R}{P};T=\dfrac{PV}{R},\dfrac{\partial T}{\partial P}=\dfrac{V}{R}.$

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P}=-\dfrac{RT}{V^2}\dfrac{R}{P}\dfrac{V}{R}=-\dfrac{RT}{PV}=-1.$

本例说明 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 是一个完整的记号，不像 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以看成 $\mathrm{d}y$ 除以 $\mathrm{d}x$.

偏导数与导数的另一个重要区别是：一元函数在某一点具有导数，则它在该点必连续；但对于二元函数来说，即使在某一点的两个偏导数都存在，也不能保证在该点连续，如例 9.4.

3. 偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 表示曲面：$\Sigma=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$. 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上的一点，过 M_0 作平面 $y=y_0$，这个平面在曲面上截得一曲线：

$$C_x:\begin{cases}z=f(x,y_0)\\ y=y_0\end{cases}$$

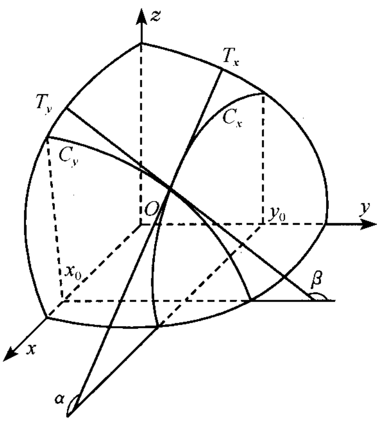


图 9-6

这条曲线在 M_0 点的切线 M_0T_x 的斜率为 $f_x(x_0,y_0)$，即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示交线 C_x 在 M_0 点的切线 M_0T_x 关于 x 轴的斜率，即 $f_x(x_0,y_0)=\tan\alpha$.

同理 $f_y(x_0,y_0)$ 表示交线

$$C_y:\begin{cases} z=f(x_0,y) \\ x=x_0 \end{cases}$$

在 M_0 点的切线 M_0T_y 关于 y 轴的斜率，即 $f_y(x_0,y_0)=\tan\beta$(图 9-6).

9.2.2 高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数，那么 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 都是 x,y 的函数，若 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 的偏导数都存在，则称之为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 按照对变量求导的顺序不同，$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xx}(x,y)=z_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xy}=z_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yx}=z_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yy}(x,y)=z_{yy}$$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为二阶混合偏导数. 同理可定义三阶、四阶……n 阶偏导数.

注意：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\neq\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}$.

例 9.17 设 $z=x^3+2x^2y^3+y^2$，求二阶偏导数.

解 函数的一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy^3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6x^2y^2+2y$$

二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+4xy^3)=6x+4y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+4xy^3)=12xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2+2y)=12xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(6x^2y^2+2y)=12x^2y+2$$

此例中，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，这不是偶然的，事实上，可以证明下面的定理.

定理 9.1　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

这个定理指出了在偏导数连续的前提下，偏导数与对变量的求导顺序无关.

例 9.18　设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{u}$$

思考题

1. 举例说明：一元函数的复合函数求导法则对具体的二元函数求偏导仍然适用.

9.3　全　微　分

9.3.1　全微分的概念

类似于一元函数的微分概念，对于多元函数就是全微分的概念. 我们知道，一元函数的微分就是自变量增量的线性近似，对于多元函数，我们把全增量依赖于每一个自变量增量的关系线性化，就可得如下定义.

定义 9.5　若二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 的全增量 Δz 可表示为 $A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

(A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$) 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，且把 $A\Delta x+B\Delta y$ 叫做 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 的全微分，记为 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都可微，则称 $z=f(x,y)$ 在 D 内可微.

根据可微的定义，可以得到下面的定理.

定理 9.2 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微，那么

(1) 函数在 $P(x,y)$ 处连续；

(2) 函数在该点处的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，并且有

$$A=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad B=\frac{\partial f}{\partial y}$$

由此定理可知，如果函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处不连续，则 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处就不可微. 如果 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微，则必有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

同一元函数一样，规定 $\Delta x=\mathrm{d}x,\Delta y=\mathrm{d}y$，则有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=z_x\mathrm{d}x+z_y\mathrm{d}y \tag{9.1}$$

一元函数中，可微与可导是等价的，但在多元函数中这一结论并不成立，例如由例 9.8 及例 9.13，我们知道 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数存在，但在该点处并不连续，由定理 9.2 知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微. 因此，偏导数存在只是函数可微的必要条件，下面的定理说明了函数全微分存在的充分条件.

定理 9.3 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微（证明略）.

以上关于二元函数全微分的定义及可微分的充分条件，可以类似地推广到二元以上的多元函数. 例如对可微的三元函数 $u=f(x,y,z)$，其全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

例 9.19 求函数 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $(10,8)$ 处当 $\Delta x=0.2,\Delta y=0.3$ 时的全增量及全微分.

解 $\Delta z=[2(10+0.2)^2+3(8+0.3)^2]-[2\times 10^2+3\times 8^2]=22.75$，

$z_x\Big|_{\substack{x=10\\y=8}}=4x\Big|_{x=10}=40$，

$z_y\Big|_{\substack{x=10\\y=8}}=6y\Big|_{y=8}=48$，

$\mathrm{d}z=40\times 0.2+48\times 0.3=22.4$.

例 9.20 设 $u(x,y)=x\ln y+y\ln x-1$，求 $\mathrm{d}u$.

解 $u_x=\ln y+\frac{y}{x},u_y=\frac{x}{y}+\ln x$，所以

$$\mathrm{d}u=\left(\ln y+\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{y}+\ln x\right)\mathrm{d}y$$

例 9.21 设 $z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$，(1) 求 $\mathrm{d}z$；(2) 求 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}$.

解　$z_x=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x$，　$z_y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2y$，于是

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$$

$$\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{\sqrt{5}}(2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

例 9.22　求 $u=xyz$ 的全微分.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\frac{\partial u}{\partial y}=xz,\frac{\partial u}{\partial z}=xy,\mathrm{d}z=yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$.

*9.3.2　全微分在近似计算中的应用

若二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处的两个偏导数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 连续，并且 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 都较小时，就有近似公式

$$\Delta z\approx\mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y \tag{9.2}$$

式(9.2)也可以写成

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y \tag{9.3}$$

与一元函数类似，我们可以利用式(9.3)对二元函数作近似计算，举例如下.

例 9.23　计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值.

解　设 $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$，取 $x=1,y=1,\Delta x=0.03,\Delta y=-0.02$. 则

$$z_x\Bigg|_{(1,1)}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\Bigg|_{(1,1)}=\frac{1}{3},\quad z_y\Bigg|_{(1,1)}=\frac{\frac{1}{4}\sqrt[4]{y^{-3}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\Bigg|_{(1,1)}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\times0.03+\frac{1}{4}\times(-0.02)=0.005$$

故 $f(1.03,0.98)\approx f(1,1)+\mathrm{d}z=0.005$.

例 9.24　有一圆柱体，受压后发生形变，其半径由 20cm 增大到 20.05cm，高由 100cm 减少到 99cm，求此圆柱体体积变化的近似值.

解　设圆柱体的半径、高和体积分别为 r,h 和 V，则有

$$V=\pi r^2h$$

记 r,h 和 V 的增量依次为 $\Delta r,\Delta h$ 和 ΔV，于是有

$$\Delta V\approx\mathrm{d}V=V_r\Delta r+V_h\Delta h=2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h$$

把 $r=20,h=100,\Delta r=0.05,\Delta h=-1$ 代入，得

$$\Delta V\approx2\pi\times20\times100\times0.05+\pi\times20^2\times(-1)=-200\pi(\mathrm{cm}^3)$$

即此圆柱体在受压后体积大约减少了 $200\pi\mathrm{cm}^3$.

思考题

1. 试说明偏导数、全微分和连续偏导数之间的关系.
2. 举例说明如何用微分形式不变性求函数的全微分.

9.4 多元复合函数的求导法则

对于一元复合函数求导，我们有链式法则，那么，多元复合函数求导又如何呢？我们不妨从一种特殊情况开始讨论.

定理 9.4 设一元函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 处可导，二元函数 $z=f(u,v)$ 在 x 对应的点 (u,v) 处有连续的偏导数，则复合函数 $z=f[(u(x),v(x)]$ 是 x 的一元函数，它在点 x 处可导. 且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{9.4}$$

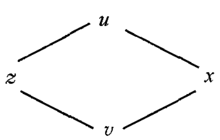


图 9-7

式(9.4)称为 z 关于 x 的全导数，函数的复合关系见图 9-7.

证 由于 $z=f(u,v)$ 有连续的偏导数，由定理 9.3 知 $z=f(u,v)$ 可微，所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$$

又 u,v 关于 x 可导，从而 $\mathrm{d}u=u'(x)\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}v=v'(x)\mathrm{d}x$. 代入即可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

例 9.25 设 $z=(1+x^2)^{\sin 3x}$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 设 $u=1+x^2$，$v=\sin 3x$，则 $z=u^v$.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=vu^{v-1},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=u^v\ln u,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=3\cos 3x$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=2xvu^{v-1}+3\cos 3xu^v\ln u\\&=2x(1+x^2)^{\sin 3x-1}(\sin 3x)+3(1+x^2)^{\sin 3x}(\cos 3x)\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

从本例看出，全导数实际上是一元函数的导数，只是求导的过程是借助于偏导数来完成而已.

例 9.26 $z=\arcsin(u-v)$，其中 $u=3t$，$v=4t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{\sqrt{1-(u-v)^2}}-\frac{12t^2}{\sqrt{1-(u-v)^2}}=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$

例 9.27 设 $z=f(x^2,\mathrm{e}^{2x})$，f 可微，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 设 $u=x^2$，$v=\mathrm{e}^{2x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x,\qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=2\mathrm{e}^{2x}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=2xf_u(u,v)+2\mathrm{e}^{2x}f_v(u,v)=2(xf_1+\mathrm{e}^{2x}f_2)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com