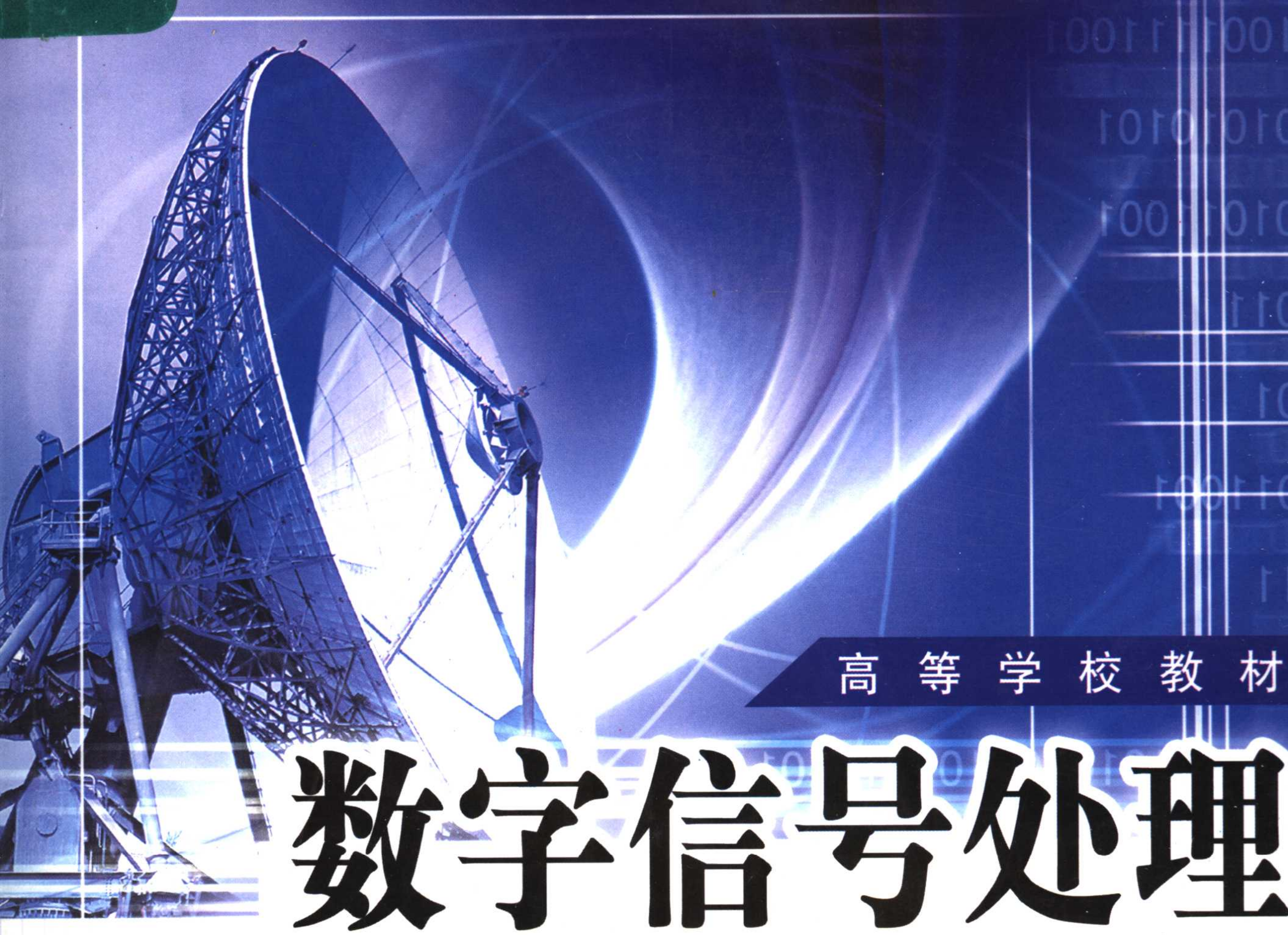

高等学校教材

数字信号处理

DIGITAL SIGNAL PROCESSING

李芬华 常铁原
潘立冬 田晓燕 编著

3

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

DIGITAL SIGNAL PROCESSING

策划编辑：王哲明　田建华
责任编辑：王哲明
封面设计：华审视觉

ISBN 978-7-5026-2647-1

9 787502 626471 >
定价： 27.00元

高等学校教材

数字信号处理

李芬华　常铁原
潘立冬　田晓燕　编著

中国计量出版社

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理/李芬华等编著．—北京：中国计量出版社，2007.8
高等学校教材
ISBN 978-7-5026-2647-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数字信号—信号处理—高等学校—教材　Ⅳ．TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 067624 号

内 容 提 要

本书主要论述了数字信号处理的基础理论、基本概念和算法，主要内容包括：z 变换；离散时间信号和离散时间系统；离散傅立叶变换；数字滤波器的结构；无限长单位脉冲响应数字滤波器的设计；有限长单位脉冲响应数字滤波器的设计；快速傅立叶变换；多率数字信号处理；有限字长效应分析；数字信号处理器的应用。同时，提供了大量的习题并附参考答案。

本书着重基础理论的论述，并配有相当数量的例题，条理清楚，深入浅出，可作为电信工程、通信工程、自动化等电子类工科专业本科教学的教材，也可供有关专业研究生及其他从事数字信号处理方面工作的科研技术人员参考。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码　100013
电话（010）64275360
http：//www.zgjl.com.cn
北京市迪鑫印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*

787 mm×1092 mm　16 开本　　印张 15.75　字数 384 千字
2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月第 1 次印刷

*

印数 1—3 000　　**定价：** 27.00 元

前　言

本书较为系统地介绍了数字信号处理的基本概念、基础理论和算法。共分为10章，主要内容包括：z变换；离散时间信号和离散时间系统；离散傅立叶变换；数字滤波器的结构；无限长单位脉冲响应数字滤波器的设计；有限长单位脉冲响应数字滤波器的设计；快速傅立叶变换；多率数字信号处理；有限字长效应分析；数字信号处理器的应用。第1章到第9章每章都附有一定量的习题，供读者练习。书本附有习题答案，供读者参考。

本书在内容编排方面有以下特点：第一，把'z变换及z反变换'作为单独的一章，先讲z变换再讲傅立叶变换，由一般到具体，使读者容易接受。这部分内容也可以少讲或不讲，可根据实际情况决定。第二，在讲完离散傅立叶变换后，接着讲数字滤波器的结构与设计，再讲快速傅立叶变换，将算法作为掌握基本理论之后进一步深化的内容，注意到了数字信号处理理论整体的连贯性。第三，注意基本概念、基本技巧的训练。书中配有大量的例题，能及时地使读者对理论概念有一个形象化的理解。另外，把参考其他教材中属于课外作业的有代表性的分析方法（如延长序列的DFT，用DFT的共轭对称性提高计算效率，全通系统与最小相位系统等）归纳到课堂教学中讲授，可加深读者对基本概念的理解。第四，在讲解基本理论的同时，介绍了数字信号处理的新进展，增加了多率数字信号处理，数字信号处理器的应用等内容，以适应21世纪教学的需要。

本书着重基础，突出重点，内容分布合理，可以作为电信工程、通信工程、自动化等电子类工科专业本科教学的教材，可在50～70学时左右讲授。本书也可供有关专业研究生及其他从事数字信号处理方面工作的科研技术人员参考。

本书第1，2，3，4，5，7，9章由李芬华教授编写，第6，8章由常铁原副教授编写，第10章由潘立冬副教授编写，全书插图由田晓燕老师制作。在教材的编写过程中，侯正信教授、邹国良教授对许多章节的编写提出了详细的建议，王凤先教授、王兰勋副教授、陈永甫教授、张春华教授、龙海南副教授、赵杰教授、李昆仑副教授对本书的出版给与了热情的关注，王素玉、黄永平、高芳、庞娇、王虹等老师在校稿过程做了许多工作，在此一并表示真诚的感谢。

因编者水平所限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2007年7月

目　　录

第 1 章　z 变换

在分析时域连续信号时，用到的数学工具是连续函数傅立叶变换和拉普拉斯变换，要分析数字信号，同样也要用到数学工具，这就是序列的傅立叶变换和 z 变换。本章主要内容是 z 变换、z 反变换以及用 z 变换解差分方程。

1.1　序　　列

z 变换是对序列而言的。所谓序列就是有序排列的一组离散值，这些离散值可以是实数，也可以是复数。数字信号是携带某种信息的数字序列。下面介绍序列的表示方法及常用序列。

1.1.1　序列的表达方式及运算

序列可以用下列方式表示

$$x=\{x(n)\}$$

或

$$\{x(-\infty),\ \cdots,\ x(-1),\ x(0),\ x(1),\ \cdots,\ x(n),\ \cdots,\ x(\infty)\} \tag{1-1}$$

式中，$x(n)$ 表示序列 x 的第 n 个序列值。为了方便，常用序列的一般项 $x(n)$ 表示整个序列。

序列也可以用图形表示。如图 1－1 所示，横坐标表示序列值的顺序，纵坐标线段长度表示相应序列值的大小，线段的端点画一黑点或一小圆圈。

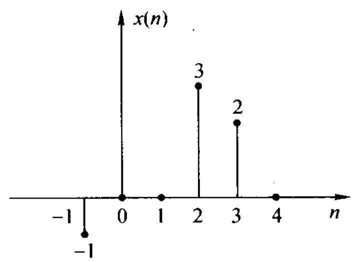

图 1－1　序列的图形表示

需要说明的是，图上的横坐标画成一条直线，但 $x(n)$ 仅对整数 n 才有意义，而对非整数 n 没有意义。

数字信号处理中的序列，有的是数字处理器的输出，有的是从连续信号采样得到的，但在处理运算过程中，信号值只与它在序列中所排序号有关，而与实际时间无关。因此，用 $x(n)$ 表示数字信号序列不失一般性。

数字信号处理中用到的序列之间的运算有以下几种：

（1）两序列的积

$$x(n)y(n)=w(n)=\{x(n)y(n)\}$$

（2）两序列的和

$$x(n)\pm y(n)=w(n)=\{x(n)\pm y(n)\}$$

(3) 序列的标乘

$$ax(n)=w(n)=\{ax(n)\}$$

序列的积和和都是两序列中同一序号的序列值之间相乘或相加。

(4) 序列的移位(或延时)

$$y(n)=x(n-n_0)$$

序列 $y(n)$ 的每一序列值都是由序列 $x(n)$ 移 n_0 位后得到,n_0 为正整数时 $x(n)$ 序列右移,n_0 为负整数时 $x(n)$ 序列左移。若 $n_0=1$,叫做单位延时。对序列求 z 变换后,在 z 域可用移位算子 z^{-1} 表示。

(5) 序列的卷积

两序列的卷积定义为

$$z(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)$$

卷积结果得到一个新的序列 $z(n)$,卷积关系用"*"号表示,即

$$z(n)=x(n)*y(n)$$

1.1.2 常用典型序列

1. 单位脉冲序列

其定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1-2}$$

该序列只在 $n=0$ 处有一个单位值 1,其余点上值皆为 0,因此也称为"单位取样序列",如图 1-2 所示。这种序列是最常用的最重要的序列,它在离散时间系统中起的作用,类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$ 所起的作用。但 $\delta(t)$ 的脉宽为 0,幅度为无穷,完全是一种数学极限,并非任何现实的信号,而 $\delta(n)$ 是一个完全现实的序列,它的脉冲幅度是有限值 1。

单位脉冲序列的移位

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1, & n=n_0\\0, & n\neq n_0\end{cases} \tag{1-3}$$

$\delta(n-n_0)$ 是单位脉冲序列的延迟序列,只有在 $n=n_0$ 时,取值为 1,对于其他的 n,皆取 0 值,如图 1-3 所示。任何序列都可以表示成各延迟单位脉冲序列的加权组合,更一般地,任何序列都可表示为

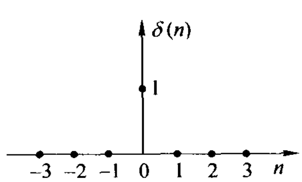

图 1-2 单位脉冲序列

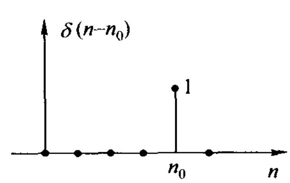

图 1-3 单位脉冲序列的移位

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k) \tag{1-4}$$

例 1—1 序列 $x(n)$ 如图 1—4 所示，求 $x(n)$ 的表达式。

解 图中线段的长短即纵坐标表示序列值的大小，横坐标表示该序列值的序号数，得 $x(n)$的表达式为

$$x(n)=\delta(n+2)+2\delta(n+1)+\delta(n)-\delta(n-2)$$

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列的定义为

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1-5}$$

如图 1—5 所示，单位阶跃序列类似于连续时间信号的单位阶跃函数。

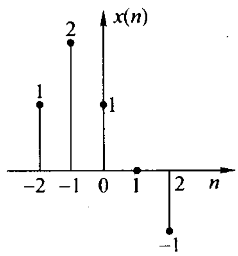

图 1—4 例 1—1 图

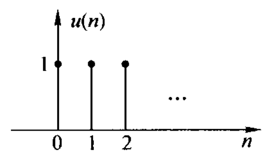

图 1—5 单位阶跃序列

单位脉冲序列与单位阶跃序列之间的关系为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1-6}$$

而单位阶跃序列等于各延迟单位取样之和，即

$$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k) \tag{1-7}$$

令 $n-k=m$，代入上式可得

$$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m) \tag{1-8}$$

可以看出，式（1—7）比式（1—8）直观，易理解。

3. 矩形序列

矩形序列的定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{1-9}$$

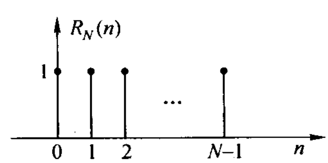

图 1—6 矩形序列

如图 1—6 所示。显然，$R_N(n)$ 是有限长序列，序列长度为 N，它与 $\delta(n)$，$u(n)$ 的关系为

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

或

$$R_N(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta[n-(N-1)]=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m) \tag{1-10}$$

4. 实指数序列

实指数序列的定义为

$$x(n)=a^n u(n) \tag{1-11}$$

式中，a 为实数，当 $0<|a|<1$ 时序列是收敛的，而当 $|a|>1$ 时，序列是发散的，如图1－7所示。

5. 正弦序列

正弦序列的定义为

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi) \tag{1-12}$$

式中，A 为信号幅度；ω_0 为数字域频率；φ 为初始相位，图 1－8 所示为 $\varphi=0$ 时的正弦序列。

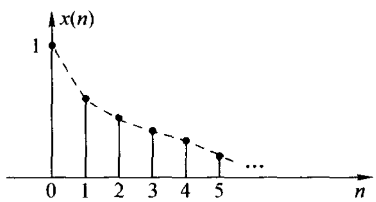

图 1－7　实指数序列

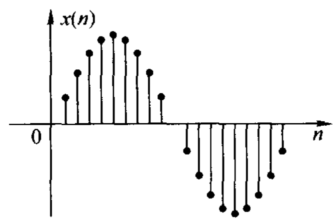

图 1－8　正弦序列

6. 复指数序列

复指数序列定义为

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}$$

也可以表示为

$$x(n)=e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n)+je^{\sigma n}\sin(\omega_0 n) \tag{1-13}$$

当 $\sigma=0$ 时，复指数序列的实部和虚部都是随 n 按正弦规律变化的，它的周期性特性与正弦序列的周期性特性一样。

1.1.3　序列的周期性

如果序列对于所有的 n 值，下式成立

$$x(n)=x(n+N) \tag{1-14}$$

式中，N 为满足上式的最小正整数。则称序列 $x(n)$ 为周期序列，且其周期为 N。

下面讨论正弦序列的周期性。

据定义，若 $x(n)=\sin(\omega_0 n)=\sin[\omega_0(n+N)]=\sin[\omega_0 n+\omega_0 N]$成立，则正弦序列为周

期序列，其周期 N 为正整数。显然，若要上式成立，必须有 $\omega_0 N=2k\pi$，这里的 k 也是整数，于是有

$$N=\frac{2\pi}{\omega_0}k \tag{1-15}$$

根据 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的取值，分三种情况讨论：

(1) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，只需 $k=1$，就能保证 N 为整数，显然此时 $N=\frac{2\pi}{\omega_0}$；

(2) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是整数，而 $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{Q}{P}$，且 Q，P 是互素的整数时，只要取 $k=P$，则有 $N=Q$，正弦序列仍为周期序列，周期 $N=P\frac{2\pi}{\omega_0}$；

(3) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是无理数时，无论怎样取 k 值，都不能使 N 为正整数。此时的正弦序列不是周期序列。

对于复指数序列，它的周期性也分上述三种情况讨论。

1.1.4 序列的能量

序列的能量定义为

$$\varepsilon=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 \tag{1-16}$$

1.2 z 变换及其收敛域

序列 $x(n)$ 的 z 变换定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{1-17}$$

$X(z)$ 是以 z 为变量的函数。z 是复变量，它具有实部和虚部，是一个以实部为横坐标，以虚部为纵坐标的平面上的变量，这个平面就是 z 平面。

常用 $Z[x(n)]$表示对序列 $x(n)$进行 z 变换，即

$$Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=X(z) \tag{1-18}$$

式中，n 的取值范围为 $(-\infty,\infty)$，这种变换叫做双边 z 变换。假如在 $n<0$ 时，有 $x(n)\equiv 0$，上式可写为

$$Z[x(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{1-19}$$

这种 z 变换称为单边 z 变换。

若 $n<0$ 时有 $x(n)=0$，则称 $x(n)$是因果序列。对于因果序列单边 z 变换与双边 z 变换是一样的，而对于非因果序列，单边 z 变换与双边 z 变换不同。单边 z 变换可看做双边 z 变

换的特殊情况，所以单边 z 变换的大多数特性与双边 z 变换相同，只有少数特性不同。

例 1—2 求单位阶跃序列的 z 变换。

解 $x(n)=u(n)$

$$X(z)=Z[u(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots \tag{1—20}$$

这是一个 z^{-1}的无穷几何级数，当$|z^{-1}|<1$时，级数收敛，$X(z)$ 可以用封闭形式表示

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z^{-1}|<1 \text{ 或 } |z|>1 \tag{1—21}$$

这说明 $u(n)$ 的 z 变换只在 z 平面的一定区域内收敛，区域$|z|>1$称为其 z 变换的收敛域。

任意序列的 z 变换都可以写成级数的形式，但只有在其收敛域内才可能写成封闭形式。根据级数理论，级数收敛的充要条件是满足绝对可和，即要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\infty$$

适当选择 z 的取值范围使上式成立，则 $X(z)<\infty$。一般情况下 z 变换的收敛域是环状区域，可表示为

$$R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

式中，R_{x-}，R_{x+} 为收敛半径。这说明收敛域是以 R_{x-}，R_{x+} 为半径，以原点为中心的两个圆之间的环状区域。在 z 平面上收敛域的位置与序列有着密切关系，下面主要介绍有限长序列、右边序列、左边序列、双边序列几种情况。

1.2.1 有限长序列

有限长序列 $x(n)$ 只在有限长度 $n_1\leqslant n\leqslant n_2$ 之间有值，在此区间外，序列值皆为零，即

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n_1\leqslant n\leqslant n_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1—22}$$

其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n} \tag{1—23}$$

显然，$X(z)$ 是有限项的和，只要级数每一项有界，有限项和也有界，级数就收敛。所以，要求

$$|x(n)z^{-n}|<\infty,\quad n_1\leqslant n\leqslant n_2$$

又因为序列 $x(n)$ 是有界的，只要$|z^{-n}|<\infty$级数就收敛，根据 n 的取值推导出

$$n>0,\ |z|>0;\quad n<0,\ |z|<\infty$$

即

$$0<|z|<\infty$$

这就是说，有限长序列 z 变换的收敛域为 $(0,\infty)$。

在一定情况下，收敛域还会扩大。即：

当 $n_1 \geqslant 0$ 时，收敛域扩大为 $0<|z| \leqslant \infty$；

当 $n_2 \leqslant 0$ 时，收敛域扩大为 $0 \leqslant |z|<\infty$。

例 1－3 求矩形序列 $x(n)=R_N(n)$ 的 z 变换及其收敛域。

解 $X(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) z^{-n} = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(N-1)} = \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, \quad 0<|z| \leqslant \infty$

脉冲序列 $\delta(n)$ 对应有限长序列 $n_1=n_2=0$ 的特殊情况，其 z 变换的收敛域为 $0 \leqslant |z| \leqslant \infty$，即整个 z 平面。

1.2.2 右边序列

若序列 $x(n)$ 在 $n \geqslant n_1$ 时有值，而当 $n<n_1$ 时 $x(n)=0$，则此序列称为右边序列。其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1-24}$$

上式中的 n_1 可正可负，分两种情况讨论：

(1) $n_1 \geqslant 0$，假设这时的级数 $X(z)$ 在 $|z|=|z_1|$ 处绝对收敛，则有

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n) z_1^{-n}| < \infty$$

因为 $n_1 \geqslant 0$，当 $|z|>|z_1|$ 时，下式成立

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n) z^{-n}| < \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n) z_1^{-n}| < \infty$$

$n_1 \geqslant 0$ 时，右边序列的收敛域可以写成 $|z_1| \leqslant |z| \leqslant \infty$，包括闭域 ∞。

(2) $n_1<0$，z 变换可写为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

上式中第一项是有限长序列，第二项属于 (1) 中 $n_1 \geqslant 0$ 的情况，综合两序列的收敛域，得总的收敛域为 $|z_1| \leqslant |z| < \infty$。

总之，右边序列的收敛域是某个圆外的区域，可以写为 $R_{x-}<|z|<\infty$。收敛域是否包括 ∞，要视它是否为因果序列而定。

例 1－4 求指数序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的 z 变换及其收敛域。

解 $X(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$

只有 $|az^{-1}|<1$ 时，$X(z)$ 才可以写成封闭形式

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$$

从 $X(z)$ 的封闭式可以看出，$X(z)$ 在 $z=a$ 有一个极点，在 $z=0$ 有一个零点，收敛域是极点所在圆的外部区域，显然收敛域包括 ∞，如图 1－9 所示。

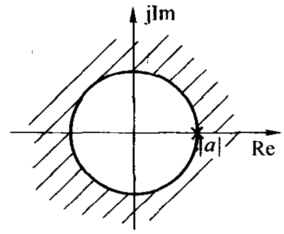

图 1－9　右边序列的收敛域

1.2.3　左边序列

若序列 $x(n)$ 只在 $n\leqslant n_2$ 有值，当 $n>n_2$ 时，$x(n)=0$，则称 $x(n)$ 为左边序列。其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n} \tag{1-25}$$

(1) 若 $n_2\leqslant 0$，假设 $X(z)$ 在 $|z|=|z_2|$ 上收敛，则有

$$\sum_{n=-\infty}^{n_2}|x(n)z_2^{-n}|<\infty$$

对于 $|z|<|z_2|$ 级数也必然收敛，收敛域可以写为 $|z|<R_{x+}=|z_2|$。

(2) 若 $n_2>0$，可做如下考虑

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}+\sum_{n=1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

$X(z)$ 有两项，两项级数的共同收敛域即 $X(z)$ 的收敛域，即

$$\begin{cases}|z|<R_{x+}\\0<|z|\leqslant\infty\end{cases}\Rightarrow 0<|z|<R_{x+}$$

总之，当 $n_2\leqslant 0$ 时，$X(z)$ 收敛域为某个圆内的整个区域；而当 $n_2>0$ 时，收敛域为某个圆内除 $z=0$ 点以外的整个区域。

例 1－5　求指数序列 $x(n)=-b^n u(-n-1)$ 的 z 变换及其收敛域。

解　$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-b^n u(-n-1)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-b^n z^{-n}=1-\sum_{n=0}^{\infty}b^{-n}z^n$

对于上式中的级数，若公比 $|b^{-1}z|<1$，即 $|z|<|b|$ 时，级数收敛

$$X(z)=1-\frac{1}{1-b^{-1}z}=\frac{z}{z-b},\quad |z|<|b|$$

$X(z)$ 在 $z=0$ 有一个零点，在 $z=b$ 有一个极点，序列的收敛域为圆内整个区域，但不包括 $z=b$ 所在的圆，如图 1－10 所示。

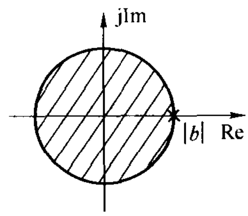

图 1－10　左边序列的收敛域

1.2.4　双边序列

一个双边序列可以看成一个左边序列和一个右边序列之和，其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=X_1(z)+X_2(z) \tag{1-26}$$

左边序列的 z 变换 $X_1(z)$ 的收敛域为 $0\leqslant|z|<R_{x+}$，右边序列的 z 变换 $X_2(z)$ 的收敛域为 $R_{x-}<|z|\leqslant\infty$，其公共区域即 $X(z)$ 的收敛域。如果 $R_{x+}>R_{x-}$，$R_{x-}<|z|<R_{x+}$；如果 $R_{x-}>R_{x+}$，没有公共区域，$X(z)$ 不收敛。

例 1－6 求序列 $x(n)=b^{|n|}$ 的 z 变换及收敛域。

解 $x(n)$ 是双边序列，其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}b^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}b^{n}z^{-n}=X_1(z)+X_2(z)$$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}b^{-n}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}b^{n}z^{n}=\frac{bz}{1-bz},\quad |z|<\frac{1}{|b|};$$

$$X_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b^{n}z^{-n}=\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{z}{z-b},\quad |z|>|b|$$

若 $\frac{1}{|b|}>|b|$，则

$$X(z)=\frac{bz}{1-bz}+\frac{z}{z-b},\quad |b|<|z|<\frac{1}{|b|}$$

其收敛域如图 1－11 所示。显然只有当 $|b|<1$ 时，才会有公共区域，否则 $X(z)$ 的收敛域不存在。

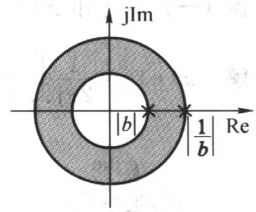

图 1－11 双边序列的收敛域

常用序列的 z 变换及其收敛域见表 1－1。

表 1－1 常用序列的 z 变换表

序列	z 变换	收敛域
$\delta(n)$	1	$0\leqslant\lvert z\rvert\leqslant\infty$
$u(n)$	$1/(1-z^{-1})$	$\lvert z\rvert>1$
$R_N(n)$	$(1-z^{-N})/(1-z^{-1})$	$\lvert z\rvert>0$
$nu(n)$	$z^{-1}/(1-z^{-1})^2$	$\lvert z\rvert>1$
$a^n u(n)$	$1/(1-az^{-1})$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$az^{-1}/(1-az^{-1})^2$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$e^{jn\omega_0}u(n)$	$1/(1-e^{j\omega_0}z^{-1})$	$\lvert z\rvert>1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$z^{-1}\sin\omega_0/(1-z^{-1}2\cos\omega_0+z^{-2})$	$\lvert z\rvert>1$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$(1-z^{-1}\cos\omega_0)/(1-z^{-1}2\cos\omega_0+z^{-2})$	$\lvert z\rvert>1$
$e^{-an}\sin(\omega_0 n)u(n)$	$z^{-1}e^{-a}\sin\omega_0/(1-z^{-1}e^{-a}2\cos\omega_0+e^{-2a}z^{-2})$	$\lvert z\rvert>e^{-a}$
$e^{-an}\cos(\omega_0 n)u(n)$	$(1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0)/(1-z^{-1}2e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a})$	$\lvert z\rvert>e^{-a}$

1.3 z 反变换

已知函数 $X(z)$ 及其收敛域，求原序列 $x(n)$ 的变换称为 z 反变换，表示为

$$x(n)=Z^{-1}[X(z)] \tag{1-27}$$

求 z 反变换的方法一般有以下三种：留数定理法，部分分式法，长除法。

1.3.1 留数定理法

当 $X(z)$ 是 z 的有理函数时，可利用留数定理来计算围线积分。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k] \qquad (1-28)$$

式中，$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]$表示 $X(z)z^{n-1}$在极点 z_k 上的留数值；$\sum\limits_k$ 表示对围线内的所有极点集合 $\{z_k\}$ 处的留数求和；C 为 $X(z)$ 收敛域内逆时针环绕原点的闭合围线。

例 1—7 已知 $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$，求 $x(n)$。

解 $x(n)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_c \dfrac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_c \dfrac{z^n}{z-a}\mathrm{d}z$

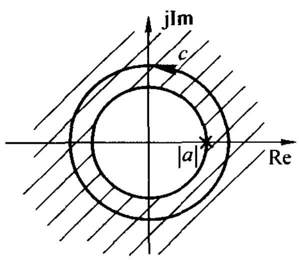

图 1—12 例 1—7 图

$X(z)z^{n-1}$的零极点图如图 1—12 所示。当 $n\geqslant 0$ 时，围线 C 内只有极点 a，$n<0$ 时，除 $z=a$ 的极点外，在 $z=0$ 处有 $-n$ 阶极点，因此

$$x(n)=\begin{cases}\mathrm{Res}[\dfrac{z^n}{z-a},a], & n\geqslant 0\\ \mathrm{Res}[\dfrac{z^n}{z-a},a]+\mathrm{Res}[\dfrac{z^n}{z-a},0], & n<0\end{cases}$$

当 $n\geqslant 0$ 时，$\dfrac{z^n}{z-a}$只在 $z=a$ 处有单极点，留数为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-a},a\right]=z^n\Big|_{z=a}=a^n$$

当 $n<0$ 时，$\dfrac{z^n}{z-a}$除在 $z=a$ 处有单极点，留数为 a^n 外，在 $z=0$ 处有 $-n$ 阶极点，留数为

$$\mathrm{Res}[\frac{z^n}{z-a},0]=\frac{1}{(-n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{-n-1}}{\mathrm{d}z^{-n-1}}\left[z^{-n}\frac{z^n}{z-a}\right]\Bigg|_{z=0}=(-1)^{-n-1}(z-a)^n\big|_{z=0}=-a^n$$

所以

$$x(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ a^n-a^n, & n<0\end{cases}$$

即

$$x(n)=a^n u(n)$$

1.3.2 部分分式展开法

对于大多数单极点的 $X(z)$，常常可以用部分分式展开法，直接利用例 1—7 结果求解。