



国家工科数学课程教学基地系列改革教材

GUOJIA GONGKE SHUXUE KECHENG JIAOXUE JIDI XILIE GAIGE JIAOCAI

高等 数学

GAODENG SHUXUE

傅英定 钟守铭 主编

上册

4



电子科技大学出版社

013
393
:1
2007

国家工科数学课程教学基地系列改革教材

GUOJIA GONGKE SHUXUE KECHENG JIAOXUE JIDI XILIE GAIGE JIAOCAI

高等 数学

上册

傅英定 钟守铭 主编



电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册 / 傅英定, 钟守铭主编. —成都: 电子科技大学出版社, 2007.1

(国家工科数学课程教学基地系列改革教材)

ISBN 978-7-81114-382-9

I. 高... II. ①傅...②钟... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第015110号

国家工科数学课程教学基地系列改革教材

高等数学

(上册)

傅英定 钟守铭 主编

出 版: 电子科技大学出版社(成都市一环路东一段159号电子信息产业大厦
邮编: 610051)

策划编辑: 谢晓辉

责任编辑: 文 利

主 页: www.uestcp.com.cn

电子邮件: uestcp@uestcp.com.cn

发 行: 新华书店经销

印 刷: 成都金龙印务有限责任公司

成品尺寸: 185mm×230mm 印张 22.75 字数 382 千字

版 次: 2007年2月第一版

印 次: 2007年2月第一次印刷

书 号: ISBN 978-7-81114-382-9

定 价: 29.80 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 邮购本书请与本社发行部联系。电话:(028) 83202323, 83256027

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

◆ 课件下载在我社主页“下载专区”。

内 容 提 要

本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会于 2004 年最新颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，按照电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列改革教材《高等数学》的内容并遵循一般本科院校的特点而编写的。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续；一元函数微分学及其应用；一元函数积分法及其应用；微分方程。下册包括空间解析几何；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数。每节配有 A、B 两类习题，每章后配有综合复习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨，论证简明，叙述清晰，例题典型，便于自学。本书可作为一般本科院校学生使用的高等数学课程教材，也可作为大专层次和网络本科以及工科各类成人教育的高等数学课程教材或参考书。

前 言

本书是电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列改革教材之一，是“基地”教学改革项目“关于提高大学数学课程的教学质量的研究”成果之一。

本书按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会于 2004 年最新颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，由电子科技大学长期工作在基础数学课程教学第一线且具有丰富教学经验的教师集体编写而成。本书的特色是：注重课程体系结构与教学内容的整体优化，着力于数学素质与能力的培养；充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力；以育人为本、学生为本、质量为本；突出数学思想与方法，适当淡化运算技巧；注重教学的适用性。

本书分为上、下两册，上册包括函数、极限与连续；一元函数微分学及其应用；一元函数积分法及其应用；微分方程。下册包括空间解析几何；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数。每节配有 A、B 两类习题，每章后配有综合复习题，书末附有习题答案。

高等数学是大学理工科各专业的公共基础课程，在培养高素质科学技术人才中具有独特的、不可替代的重要作用。高等数学课程教学的基本要求，是工科院校本科生学习本课程应当达到的合格要求。根据近几年一般本科院校学生的特点，本书严格按照课程的基本要求编写，其高等数学的基础理论以必需、够用为度，以理解概念、强化应用、培养能力为重点。

本书知识的覆盖面在保持高等数学自身的系统性、逻辑性的基础上，与其他要求较高的本科高等数学相比，对难点作了一定的削减，尤其是对难度较大的部分基础理论，不作过多的严密证明。加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法。注重基本概念和运算的训练，不追求太多复杂的计算和较高技巧。

本书根据一般本科院校学生的实际情况，着重处理好如何理解一些本课程中的基本理论、重点和难点之间的关系。精选例题和习题，难易适度，具有启发性和典型性。文字叙述通俗易懂，深入浅出，详略得当，清晰流畅，便于自学。

本书学时数为 130~150 学时, 少量带*号的内容可根据需要进行取舍。

本书可作为一般本科院校学生使用的高等数学课程教材, 也可作为大专层次和网络本科以及各类成人教育的高等数学课程教材或参考书。

对于每节后的 A、B 两大类习题的使用, 编者建议对大专层次和各类成人大专的学生, 至少应完成 A 类习题及部分综合复习题; 对一般本科院校学生及网络本科学生, 应完成 A、B 两大类习题及各章综合复习题。

本书第一章、第四章、第五章由陈良均编写; 第二章、第三章、第八章由傅英定编写; 第六章、第十章由钟守铭编写; 第七章、第九章由吕恕编写。

本书由傅英定、钟守铭主编。

本书经谢云荪教授主审, 并认为这是一本适合一般本科院校学生、大专层次和网络本科以及各类成人教育学生使用的好教材。同时谢云荪教授也对本书提出了十分宝贵的意见和建议。本书的编写得到了电子科技大学应用数学学院、继续教育学院领导和应用数学学院全体老师的大力支持和帮助, 在此编者一并表示衷心的感谢!

限于编者水平, 书中难免有不妥之处, 敬请批评指正。

编者

2007 年 2 月



目 录

第一章 函数、极限、连续	1
§1.1 函数	1
一、集合、区间与邻域	1
二、函数的概念	3
三、函数的表示法	5
四、函数的几种简单性态	8
五、基本初等函数	9
六、反函数 复合函数 初等函数	10
七、建立函数关系举例	22
习题 1-1	24
§1.2 数列的极限	27
一、数列	27
二、数列极限概念	28
三、数列极限存在的必要条件	32
四、极限的四则运算法则	33
习题 1-2	34
§1.3 函数的极限	35
一、“ $n \rightarrow +\infty$ ”、“ $n \rightarrow -\infty$ ”、“ $n \rightarrow \infty$ ”时的函数的极限	35
二、“ $x \rightarrow x_0$ ”时函数的极限	37
三、左极限、右极限	40
习题 1-3	42
§1.4 无穷小量及其性质	43
一、无穷小量的概念	43
二、无穷小的运算性质	44
三、函数及其极限与无穷小之间的关系	45
四、无穷大量的概念	46



习题 1-4	48
§ 1.5 极限的性质及运算法则	48
习题 1-5	54
§ 1.6 两个重要极限	55
一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	55
二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	58
习题 1-6	60
§ 1.7 无穷小量的比较	61
习题 1-7	65
§ 1.8 函数的连续性与间断点	66
一、函数连续的概念	66
二、函数的间断点	69
习题 1-8	73
§ 1.9 初等函数的连续性	75
习题 1-9	77
§ 1.10 闭区间上连续函数的性质	78
习题 1-10	81
第一章复习题	81
第二章 导数与微分	83
§2.1 导数的概念	83
一、导数的定义	83
二、求导数举例	86
三、导数的几何意义	88
四、函数可导性与连续性的关系	89
习题 2-1	91
§ 2.2 导数的运算	92
一、函数四则运算的求导法则	92



二、复合函数的求导法则	94
三、反函数求导法则	96
四、初等函数的导数	99
习题 2-2	100
§ 2.3 高阶导数	103
习题 2-3	105
§ 2.4 隐函数及由参数方程确定的函数的导数	106
一、隐函数求导法	106
二、参数方程所确定的函数的求导法	108
习题 2-4	111
§ 2.5 微分	112
一、微分的概念	112
二、基本微分公式和运算法则	115
习题 2-5	117
第二章复习题	118
第三章 导数的应用	120
§3.1 微分中值定理	120
习题 3-1	126
§3.2 未定式的极限 (洛必塔法则)	126
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	127
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	129
三、泰勒公式	132
习题 3-2	137
§3.3 函数的单调性	138
一、函数单调性的判别法	138
二、函数单调性的应用	141
习题 3-3	142
§3.4 函数的极值 最大 (小) 值	143



一、函数的极值.....	143
二、函数的最大值、最小值.....	146
习题 3-4	148
§3.5 曲线的凹凸性与拐点.....	149
习题 3-5	151
§3.6 曲线的渐近线及函数图形的描绘.....	152
一、曲线的渐近线.....	152
二、函数图形的描绘.....	154
习题 3-6	156
*§3.7 曲率.....	157
一、弧微分.....	157
二、曲率.....	158
习题 3-7	163
§3.8 方程的近似解.....	164
习题 3-8	166
第三章复习题.....	166
第四章 不定积分.....	168
§ 4.1 原函数与不定积分的概念.....	168
习题 4-1	171
§ 4.2 不定积分的性质和基本积分公式.....	172
一、不定积分的性质.....	172
二、基本积分公式.....	173
习题 4-2	175
§ 4.3 换元积分法.....	177
一、第一类换元积分法.....	177
二、第二类换元积分法.....	182
习题 4-3	188
§ 4.4 分部积分法.....	190
习题 4-4	194





* § 4.5 两种特殊类型积分举例	195
一、有理函数的积分	195
二、三角函数有理式的积分	200
习题 4-5	203
第四章复习题	203
第五章 定积分及其应用	205
§5.1 定积分的概念及性质	205
一、引例	205
二、定积分的定义	207
三、定积分的几何意义 函数可积的充分条件	209
四、定积分的性质	211
习题 5-1	215
§5.2 微积分基本公式	216
一、变上限定积分	217
二、牛顿 (Newton)-莱布尼兹 (Leibniz) 公式	219
习题 5-2	222
§5.3 定积分的换元法与分部积分法	225
一、定积分的换元积分法	225
二、定积分的分部积分法	228
习题 5-3	231
*§5.4 广义积分	233
一、无穷区间上的广义积分	233
二、无界函数的广义积分	235
习题 5-4	237
§5.5 定积分的应用	238
一、微元分析法	239
二、定积分在几何上的应用	241
三、定积分在物理学中的应用举例	251
习题 5-5	255



第五章复习题.....	257
第六章 常微分方程.....	259
§6.1 微分方程的基本概念.....	259
习题 6-1	263
§6.2 一阶微分方程.....	265
一、可分离变量的方程.....	265
二、齐次方程.....	269
三、一阶线性方程.....	274
四、贝努里 (J. Bernoulli) 方程.....	279
习题 6-2	281
§6.3 可降阶的高阶微分方程.....	283
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	283
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程.....	284
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程.....	286
习题 6-3	288
§6.4 二阶常系数齐次线性微分方程.....	289
一、二阶齐次线性微分方程解的性质与结构.....	289
二、二阶常系数齐次线性微分方程的解法	292
习题 6-4	295
§6.5 二阶常系数非齐次线性微分方程.....	296
一、二阶非齐次线性微分方程解的性质和结构.....	297
二、二阶常系数非齐次微分方程的解法	299
三、二阶欧拉方程*	307
习题 6-5	310
第六章复习题.....	311
附录 常用曲线图.....	313
习题答案与提示.....	316



第一章 函数、极限、连续

高等数学课程研究的内容包括一元函数及多元函数的微积分学、空间解析几何、无穷级数和微分方程. 因为主要内容为一元及多元函数的微积分学, 所以, 有时高等数学也称为微积分学.

初等数学研究的对象基本上是不变的量, 而高等数学研究的对象基本上都是变量, 贯穿高等数学的基本观点是变化的观点, 用变化的观点考虑问题, 认识事物. 函数是高等数学研究的基本对象, 它反映了变量之间的依赖关系. 极限理论是研究高等数学的基本工具. 本章主要讨论函数的概念、函数的极限和函数的连续性.

§ 1.1 函 数

一、集合、区间与邻域

集合是近代数学最基本的概念之一, 读者在中学已经学过. 集合的创始人康托 (G. Cantor) 1897 年指出: “把一定的并且彼此可以明确识别的事物 (这种事物可以是直观的对象) 放在一起, 称为一个集合.” 比如, 一个教室里的学生构成一个集合, 某一批产品构成一个集合, 满足某种条件的全体实数构成一个集合等等. 一般地, 具有某种特定性质的, 并且可以彼此区别的事物的总体, 称为**集合** (简称为**集**). 集合中的每一个事物称为集合的元素. 对于一个给定的集合, 集合中的元素是确定的、互异的. 任意取定一个事物, 对于某一集合, 我们能够判定它是否属于该集合, 即是否为该集合的元素.

集合通常用英文大写字母表示, 集合的元素通常用英文小写字母表示. 若某个元素 x 属于集合 A , 则记作 $x \in A$; 若某个元素 x 不属于集合 A , 则记作 $x \notin A$ 或 $x \bar{\in} A$.



全体自然数的集合记作 N , 全体整数的集合记作 Z , 全体有理数的集合记作 Q , 全体实数的集合记作 R .

集合有两种表示法:

(1) 列举法: 在大括号内列出全体元素, 每个元素之间用逗号隔开. 例如, 由有限个元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A , 可记作

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$$

只有一个元素 x_0 的集合称为单元素集, 记成 $\{ x_0 \}$.

(2) 描述法: 无法一一列举或者不需要一一列举它的元素的集合, 可以在大括号内的左边写出元素的记号, 右边写出元素满足的条件, 中间用一直线隔开.

例 设集合 A 为方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的全体实根所组成的集合, 用列举法表示为 $A = \{ 2, 3 \}$, 用描述法表示为

$$A = \{ x \mid x \in R, x^2 - 5x + 6 = 0 \}.$$

例 xOy 平面上坐标适合方程 $x^2 + 4y^2 = 1$ 的点 (x, y) 的全体所组成的集合 M , 可记作

$$M = \{ (x, y) \mid x, y \text{ 为实数}, x^2 + 4y^2 = 1 \}.$$

本书中常用的集合为**数集**, 即元素是数的集合, 除特别声明外, 以后提到的数总是指实数. 常用的集合还有**点集**, 即直线上、平面上或空间内具有某种性质的全体点所成的集合.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 即若 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A).

如果集合 A 、 B 的元素相同, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记作 ϕ . 例如

$$\{ x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0 \} = \phi.$$

常用的实数集合是区间及邻域.

若实数 $a < b$, 满足条件 $a < x < b$ 的全体实数所成的集合称为**开区间**, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}.$$

满足条件 $a \leq x \leq b$ 的全体实数所成的集合称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}.$$





类似地可以定义半开区间

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

以上这些区间称为有限区间, 数 $b-a$ 是这些区间的长, 从数轴上看, (a, b) 表示由点 a 到点 b 但不包括端 a, b 在内的线段.

还可以定义无限区间 $(-\infty, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$.

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}.$$

符号“ ∞ ”读作“无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, 它们都仅仅是记号, 后面将会讲到.

有时我们要考虑一点 x_0 附近的所有点的集合, 设 $\delta > 0$, 以 x_0 为中心的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $N(x_0, \delta)$, 点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 即

$$N(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

有时需要考虑一点 x_0 的附近但不包括 x_0 在内的所有点的集合, 即将 x_0 的邻域去掉中心, 称为 x_0 的空心邻域, 点 x_0 的空心邻域可以表示成

$$N(x_0, \delta) - \{x_0\} \text{ 或 } \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

$$\text{或 } (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

简记为

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

二、函数的概念

我们在观察、研究某一现象或某一运动过程时, 会遇到许多量, 有的量保持不变, 称为常量; 有的量是变化的, 称为变量. 变量之间往往不是孤立的, 而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间的确定关系, 在数学上就称为函数关系, 下面先举三个例子.

例 1 观察一物体以初速度为零从 h 的高度自由落下到地面这一运动过程.



物体下落的时间 t 与下落的路 s 是两个变量, 由物理学知道, s 与 t 满足下列关系, 即

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 称为重力加速度.

上式刻画了变量 t 与 s 之间的相互关系, 其中 t 视为主动地变化, 而 s 是由于 t 的变化而引起的变化. 当 $s = h$ 时, 运动终止, 终止时刻由上式可求得 $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. 由此可见, 当 t 从时刻 $t = 0$ 到时刻 $t = T$ 之间取某一值 t 时, 路程 s 按照上式有确定值和它对应. t 的变化范围为 $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$, s 的变化范围为 $0 \leq s \leq h$.

例 2 在每天下午定时观察仓库的某种规格的产品库存量, 表 1.1 给出观察一周的结果.

表 1.1

第 t 天	1	2	3	4	5	6	7
库存量 W 吨	23.5	20	18	12	40	38	35.5

此表反映了变量 t 与库存量 W 的对应关系. 对于表中给出的 t 值 (t 只能取 1, 2, $\dots$, 7), 都有一个确定的 W 值与之对应. 例如 $t = 4$ 时, $W = 12$ 吨.

例 3 温度记录仪描绘了某地某天气温 $T(^{\circ}\text{C})$ 随时间 $t(\text{h})$ 的变化范围是 $0 \leq t \leq 24$. 对于这个范围内的每一时刻 t , 都可以在图形上量出对应的气温 T 的值. 例如当 $t = 3.5\text{h}$ 时, $T = 8^{\circ}\text{C}$; 当 $t = 15\text{h}$ 时, $T = 18^{\circ}\text{C}$.

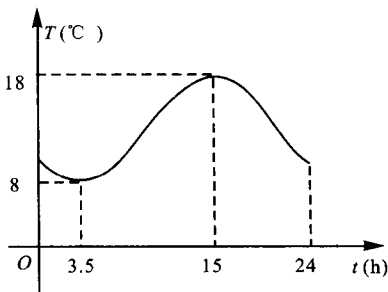


图 1.1

抽出上面例子中所考虑的量的实际意义, 从数量关系的角度看, 它们都有着共同的本质东西, 即在变化过程中都有两个变量, 变量之间存在某种对应关系, 当一个变量在其变化范围内任意取定一





个数值时,另一个变量就按照同一规则有唯一确定的数值与之对应.因此,我们引入函数的定义.

定义 1 设 X 和 Y 为两个非空实数集, 若存在某一对应规律 (或法则) f , 使得对于 X 中的任意一个数 x , Y 中都有唯一确定的实数 y 与它对应, 则称 f 为定义在 X 上的函数, 记为 $f: X \rightarrow Y$ 或简记为 $y = f(x)$.

x 称为自变量, y 称为因变量, 习惯上也称 y (或 $f(x)$) 为 x 的函数. 自变量所能取值的范围 X , 称为函数的定义域, 记为 D_f , 当 $x_0 \in D_f$ 时, 与 x_0 对应的数值 $y_0 = f(x_0)$, 称为函数值, 所有函数值构成的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\} \subset Y$, 称为函数的值域.

在函数定义中, 要求 x 有明确的取值范围 D_f , 还要有确定的对应规律 f , 通过它能唯一确定 y 的值, 此时 x 和 y 之间才能构成一个函数关系. 因此, 定义域 D_f 和对应规律 f 是确定函数关系的两大要素, 考查两个函数是否相等, 只需研究定义域 D_f 和对应规律 f 是否相同即可.

例如 $f(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 与 $g(x) = \frac{x}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是不相同的函数; 而 $f(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 与 $h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, x \in (-\infty, +\infty)$ 是相同的函数.

在函数定义中, 对 D_f 内任取一个确定数值 x 时, 由 f 有唯一确定的 y 与之对应, 这里强调“唯一确定”. 如果对某一 $x \in D_f$, 有两个 y 或两个以上的 y 与之对应, 按照我们的定义就不是函数. 但是为了方便起见, 有时我们也称为多值函数, 多值函数可以分成若干单值支来研究. 例如反三角函数如 $y = \text{Arcsin} x$ 就是多值的, 若限定取主值 (如 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) 便是单值函数. 在本书范围内, 我们只讨论单值函数.

三、函数的表示法

1. 表格法

在测量数据、实验结果、生产报表等实际应用中, 变量之间的关系常把自变量的一系列值和对应函数值列成表格, 表示变量之间的对应关系, 这种方法称为**表格法**. 上面例 2 中的表, 初等数学中的平方根表、三角函数表、对数表等等就是用表格法表示函数. 它的优点是使用方便, 便于查找, 但是对应数值不完全, 不便