21世纪高等院校经济管理类实用数学教材系列

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Linear Algebra

线性代数

同济大学数学系　编著

清华大学出版社

21世纪高等院校经济管理类实用数学教材系列

Linear Algebra

线性代数

同济大学数学系　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书从矩阵的概念入手，系统地介绍了矩阵、行列式、线性方程组的基础知识，讨论了线性空间的相关内容，并翔实地论述了向量的内积、向量组的正交性、方阵的特征值与特征向量、方阵的对角化和实二次型的化简等问题。

全书内容编排上注重由浅入深，强调基本概念及各个概念之间的固有联系，强调数学的基本思想、基本方法，并将抽象内容与具体例子结合，对基本概念和定理的实际应用进行介绍，实用性很强。鉴于信息技术的飞速发展及软件的广泛应用，本书还介绍了运用Matlab数学软件解决相关计算问题的方法和实例，强调与计算机结合，更加符合信息时代的知识需求。

以基本概念和方法技巧为核心，以实用为目的，与时俱进，本书将帮助读者轻松掌握线性代数!

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/同济大学数学系编著. —北京：清华大学出版社，2007.5

ISBN 978-7-302-14317-8

Ⅰ.线… Ⅱ.同… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第154468号

责任编辑：吴颖华(wuyinghua2003@163.com) 张志强
封面设计：张 岩
版式设计：郑铁文
责任校对：纪文远
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社 **地 址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175 **邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015 **客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京市清华园胶印厂
装 订 者：三河市金元印装有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 **印 张**：13.75 **字 数**：283千字
版 次：2007年5月第1版 **印 次**：2007年5月第1次印刷
印 数：1~5000
定 价：19.80元

 产品编号：020467-01

前　言

线性代数是高等院校工程数学的一门重要课程，对本科生学好其他数学课程和后继课程都有重要的意义，尤其对于经济与管理类本科生来说，学好线性代数更加重要。作为体现教学内容和教学方法的知识载体，教材对教学效果起着重要作用。根据线性代数教学大纲的要求，结合我们多年从事这门课程教学工作的实践经验，应清华大学出版社之邀，我们合作编写了这本教材。

本书在编写时努力做到由浅入深，由易及难，由具体到抽象，以及与中学数学内容相衔接。尽量体现线性代数与解析几何的内在联系，强调理论的应用，在相关章节介绍了一些与经济管理类专业关系比较密切的实用例子。

本书第 1 章从介绍矩阵的概念入手，把矩阵行初等变换和初等方阵放在十分重要的地位，引入了阶梯形矩阵首元素的概念，让学生掌握线性代数的基本方法，解决一系列基本问题，例如求矩阵的逆、解线性方程组、确定向量组或矩阵的秩等。第 2 章把行列式看作方阵的行列式，用递归的方法来定义 n 阶行列式，并且从矩阵行初等变换对行列式值所引起的变化出发，引入行列式的基本性质和计算方法。第 3 章特别强调用列向量的形式来表示向量，比较详细地介绍了向量组的线性相关性和线性方程组的解的结构理论。第 5 章系统地介绍了向量的内积、向量组的正交性、方阵的特征值与特征向量、方阵的对角化和实二次型的化简等问题。这些都是线性代数教学的基本内容。第 4 章介绍了线性空间的概念，这是大学数学课程中首次遇到的一种抽象空间，讨论了基变换与坐标变换，进一步引入了线性变换的概念，讨论了线性变换与矩阵之间的关系。这部分内容超出了教学大纲的要求，使用本教材的学校可以酌情处理，特别是可以略去 4.3 和 4.4 两节的内容。在编写本书时，我们对部分章节和部分定理的证明都加了 * 号，例如关于行列式的引理 2.1.1、定理 2.2.1、定理 2.3.1、定理 2.3.2；向量内积的柯西-施瓦茨不等式，即定理 5.1.1、定理 5.3.1、定理 5.4.2 和定理 5.5.1 等的证明以及整个第 4 章等。在实际教学中可以略去不讲，仅让有兴趣的同学自学。

随着计算机技术和应用软件的飞速发展，线性代数中的计算问题几乎都可以运用计算机通过相关的数学软件来实现。因此我们在相关的章节中，介绍了应用 Matlab 数学软件来解决线性代数涉及的计算问题的操作命令和例子，Matlab 虽然提供的是近似的计算结果，但具有强大的解决实际计算问题的功能。在学好本课程的基础理论和基本方法的同时，掌握一些现代工具是十分有益的。

本书在每节末都配备了适量的习题，有少量习题前标有 * 号，这些是相对较难的习题，教师和学生可以根据实际情况选做，书末附有习题解答，包括了全部计算题的答案及大部分证明题的提示或解答。我们希望同学们在做习题前不要去参考这些解答，养成独立完成课外作业的好习惯。

本书不仅可以作为普通高等院校经济与管理类本科生的线性代数课程一学期的教材，也可作为其他专业本科生的工程数学线性代数课程一学期的教材或教学参考书。

本书由蒋志洪负责编写第 1 章和第 2 章的初稿，由濮燕敏负责编写第 3 章和第 4 章的

初稿，由陈承东负责编写第5章的初稿，最后由叶家琛负责协调和统稿。虽然参与编写工作的老师都已从事线性代数教学工作多年，编写过程又前后经过三次反复的修改，但缺点和疏漏之处仍在所难免，恳请使用本书的老师和同学提出批评和建议，以便再版时修改。

最后，我们要对同济大学数学系和清华大学出版社表示衷心的感谢，没有他们的支持和帮助，这本教材是不可能面世的。

编　者

2007年3月

目　　录

第 1 章　矩阵代数 …… 1

1.1　矩阵及其运算 …… 1

1. 矩阵的定义(1)　2. 矩阵的相等(3)　3. 矩阵的加法(4)　4. 矩阵的数量乘法(4)　5. 矩阵的乘法(5)　6. 矩阵乘法的应用(7)　7. 矩阵的转置(10)　8. Matlab 关于数的计算(11)　9. Matlab 关于矩阵的运算(13)　习题 1.1(15)

1.2　矩阵的分块 …… 17

1. 矩阵的分块(18)　2. 分块矩阵的运算(18)　习题 1.2(21)

1.3　矩阵的初等变换和初等方阵 …… 23

1. 矩阵的初等变换(24)　2. 矩阵的等价(25)　3. 阶梯形矩阵(25)　4. 线性方程组求解(高斯消元法)(26)　5. 初等方阵(29)　习题 1.3(31)

1.4　可逆方阵 …… 32

1. 逆矩阵的定义(32)　2. 可逆方阵的性质(33)　3. 逆矩阵存在的条件(33)　4. A^{-1}的计算(35)　5. 矩阵方程(37)　6. 用 Matlab 求逆矩阵和解矩阵方程(38)　习题 1.4(40)

第 2 章　方阵的行列式 …… 42

2.1　n 阶行列式的定义 …… 42

1. 方阵的子阵(42)　2. n 阶方阵的行列式的定义(42)　3. 二阶行列式(43)　4. 三阶行列式(43)　5. 三角方阵的行列式(44)　习题 2.1(46)

2.2　行列式的行初等变换与行展开式 …… 46

1. 第 I 类行初等变换(46)　2. 行列式按行展开(47)　3. 第 II 类行初等变换(49)　4. 第 III 类行初等变换(50)　习题 2.2(52)

2.3　行列式的性质 …… 53

1. 方阵乘积的行列式(53)　2. 转置方阵的行列式(54)　3. 行列式的列初等变换(54)　习题 2.3(57)

2.4　克拉默法则 …… 59

1. 方阵的伴随方阵(59)　2. 克拉默法则(60)　习题 2.4(62)

第 3 章　矩阵的秩与线性方程组 …… 64

3.1　向量组及其线性组合 …… 64

1. 向量的定义与初等性质(64)　2. 向量组的线性组合(65)　3. 向量空间(67)　习题 3.1(69)

3.2 向量组的线性相关性 …… 71

1. 向量组线性相关与线性无关的定义(71) 2. 向量组线性相关与线性无关的判别定理(74) 习题3.2(77)

3.3 向量组的秩 …… 80

1. 向量组的等价(80) 2. 关于向量组及其等价的一些结论(82) 3. 向量组的秩(83) 4. 向量空间的基与维数(85) 习题3.3(86)

3.4 矩阵的秩 …… 88

1. 矩阵的行秩与列秩(88) 2. 矩阵的秩(90) 3. 矩阵乘积的秩(95) 4. 用Matlab求向量组的秩(95) 习题3.4(96)

3.5 线性方程组解的结构 …… 99

1. 线性方程组有解的条件(99) 2. 齐次线性方程组的解的结构(101) 3. 非齐次线性方程组的解的结构(105) 4. 用Matlab解线性方程组(108) 习题3.5(109)

第4章 线性空间* …… 113

4.1 线性空间与子空间 …… 113

1. 线性空间的定义(113) 2. 线性空间的简单性质(114) 3. 子空间(116) 习题4.1(116)

4.2 基变换与坐标变换 …… 117

1. 线性空间的基与维数(117) 2. 向量在一个基下的坐标(118) 3. 基变换公式(120) 4. 坐标变换公式(122) 习题4.2(125)

4.3 线性空间的同构 …… 126

1. 线性空间同构的定义(126) 2. 同构映射的性质(127) 习题4.3(128)

4.4 线性变换及其矩阵表示式 …… 128

1. 线性变换的定义与例子(128) 2. 线性变换的性质(129) 3. 线性变换的矩阵(132) 习题4.4(134)

第5章 向量的内积,二次型 …… 137

5.1 内积,长度,正交性 …… 137

1. 向量的内积(137) 2. 向量的长度(138) 3. 两个向量的夹角,正交的向量(139) 4. 正交向量组(140) 5. 规范正交基(141) 6. 施密特(Schmidt)正交化过程(142) 7. 正交阵(143) 习题5.1(146)

5.2 方阵的特征值与特征向量,相似方阵 …… 147

1. 方阵的特征值与特征向量(147) 2. 特征值的性质(147) 3. 相似方阵(151) 4. 方阵的对角化(152) 5. *代数重数与几何重数(153) 6. 应用:预测商品销售的趋势(153) 7. 用Matlab计算方阵的特征值与特征向量(155) 习题5.2(157)

5.3 与实对称阵正交相似的标准形 …… 158

1. 实对称阵的特征值和特征向量(158) 2. 实对称阵正交相似于实对角阵(160) 习题 5.3(164)

5.4 化二次型为标准形 …… 165

1. 实二次型(165) 2. 二次型的标准形(167) 3. 实对称阵的合同(168) 4. 配方法(170) 5. 实二次型的规范形,惯性定理(174) 6. 用 Matlab 把实二次型化简为标准形(175) 习题 5.4(176)

5.5 正定二次型与正定阵 …… 178

1. 正定二次型(178) 2. 顺序主子式(178) 3. 实二次型正定的等价条件(179) 4. 应用(183) 习题 5.5(184)

习题解答 …… 185

参考文献 …… 209

第1章 矩阵代数

矩阵是代数学的一个重要研究对象，也是数学各分支不可缺少的工具，矩阵论方法在处理许多实际问题时也非常有力．本章将详细讨论矩阵代数的结构，特别强调矩阵行初等变换的作用，并指出解线性方程组的一种方法．

1.1 矩阵及其运算

1. 矩阵的定义

定义 1.1.1. $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 (a_{ij})，有时为了强调矩阵的行数和列数，也记为$(a_{ij})_{m\times n}$．在第 i 行第 j 列位置上的数 a_{ij}称为矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$的元素，其中 i 称为元素 a_{ij}的行指标，j 称为元素 a_{ij}的列指标．一般用英文的大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$表示一个矩阵．

(1)一个 $1\times n$ 矩阵 $(a_1\ a_2\cdots\ a_n)$称为行矩阵，也称为 n 维行向量．

(2)一个 $n\times 1$ 矩阵$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$称为列矩阵，也称为 n 维列向量，简称为 n 维向量．

(3)一个 $m\times m$ 矩阵称为 m 阶方阵．

(4)一个所有元素都是零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记为 $\mathbf{0}_{m\times n}$，简记为 $\mathbf{0}$.

(5)m 阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 m 阶单位阵,记为 $\boldsymbol{E}_m$,简记为 $\boldsymbol{E}$.

(6)m 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

称为 m 阶对角阵,简称为对角阵,记为 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$.

(7) m 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

称为 m 阶上三角方阵,简称为上三角方阵.

(8) m 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

称为 m 阶下三角方阵,简称为下三角方阵.

例 1.1.1. 某商店在第一季度销售情况如表 1-1 所示(单位:千件).

表 1-1

月份	商品 1	商品 2	商品 3	商品 4	商品 5
1 月份	0.23	1.23	2.67	0.67	1.43
2 月份	0.33	1.31	2.89	0.70	1.53
3 月份	0.19	0.97	2.45	0.58	1.33

则该店的第一季度销售情况可以用矩阵

$$\begin{pmatrix} 0.23 & 1.23 & 2.67 & 0.67 & 1.43 \\ 0.33 & 1.31 & 2.89 & 0.70 & 1.53 \\ 0.19 & 0.97 & 2.45 & 0.58 & 1.33 \end{pmatrix}$$

表示.

例 1.1.2. 设图 1-1 是某国的中心城市之间的高速公路网络图,其中 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6 是中心城市,令

$$a_{ij}=\begin{cases}1, C_i \text{ 到 } C_j \text{ 有高速公路}\\ 0, C_i \text{ 到 } C_j \text{ 没有高速公路}\end{cases}$$

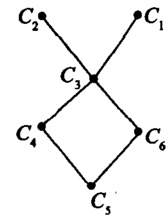

图 1-1

则该国家的高速公路网络可以由方阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

表示.

定义 1.1.2. 一个由 m 个 n 元一次方程所组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{1.1.1}$$

称为线性方程组. 这里 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是未知数(或者称为变量), $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和 $b_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是常数. 由于线性方程组(1.1.1)由常数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和 $b_k(k=1,2,\cdots,m)$ 完全确定,我们可以用一个 $m\times(n+1)$ 矩阵

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

表示线性方程组(1.1.1). $\widetilde{A}$称为该线性方程组的增广矩阵.

2. 矩阵的相等

定义 1.1.3. 两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{l\times s}$,如果彼此行数相等,即 $m=l$,列数相等,即 $n=s$,而且所有对应位置上的元素都相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 A 和 B 相等,记为 $A=B$.

3. 矩阵的加法

定义 1.1.4. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵,令 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

两个矩阵相加就是两个矩阵的对应位置的元素相加,由此可以推出:如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是任意三个 $m\times n$ 矩阵,则

(1)交换律:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2)结合律:$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$;

(3)设 $\boldsymbol{0}$ 是 $m\times n$ 零矩阵,则 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(4)对每个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,必存在唯一的矩阵 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$,使得$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, $-\boldsymbol{A}$称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

利用负矩阵的概念,可以定义矩阵的减法:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 减去矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就定义为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 加上矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的负矩阵,即如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

4. 矩阵的数量乘法

定义 1.1.5. 设 k 是一个数,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$是一个 $m\times n$ 矩阵,令 $b_{ij}=ka_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘法,记为 $\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A}$ 或者 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}k$,即

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

一个数与矩阵相乘等于用这个数来乘这个矩阵的每一个元素,因此可以推出:如果 k,l 是任意两个数,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是任意两个 $m\times n$ 矩阵,则

(1)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(2)$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(3)$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(4)$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(5)$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$;

(6)$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

例 1.1.3. 有一个玩具工厂装配玩具轿车和玩具卡车,一辆玩具轿车需要 1 个轿车躯干,1 个车子底盘,4 个车子轮子,4 个小人放在车子里. 一辆玩具卡车需要 1 个卡车躯干,1 个车子底盘,6 个车子轮子,2 个小人放在车子里. 一天需要装配 125 辆玩具轿车和 75 辆玩具卡车,请问需要多少零件?

解:我们将装配信息用表 1-2 表示.

表　1-2

零件	轿车	卡车
轿车躯干	1	0
卡车躯干	0	1
车子底盘	1	1
车子轮子	4	6
车里的人	4	2

将表 1-2 的第 1 列乘以 125，可以得到装配 125 辆玩具轿车所需要零件：

$$125\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\\4\end{pmatrix}$$

将表 1-2 的第 2 列乘以 75，可以得到装配 75 辆玩具卡车所需要零件：

$$75\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\\6\\2\end{pmatrix}$$

所以合计需要的零件为：

$$125\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\\4\end{pmatrix}+75\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}125\\75\\200\\950\\650\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{轿车躯干}\\\text{卡车躯干}\\\text{车子底盘}\\\text{车子轮子}\\\text{车里的人}\end{matrix}$$

5. 矩阵的乘法

定义 1.1.6.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $n\times s$ 矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可相乘，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 这里乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是 $m\times s$ 矩阵，其中第 i 行第 j 列元素为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

它是左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行

$$(a_{i1}\ a_{i2}\cdots\ a_{in})$$

与右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列

$$\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{pmatrix}$$

的对应位置上的元素乘积的和.

这里把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为左乘矩阵，把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为右乘矩阵，是因为在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 始终在左边，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 始终在右边．在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积中，二者的位置不能轻易交换．

由定义可见，两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘时，要注意它们的行数和列数，只有当左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 才可以相乘．这时，乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数等于右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数，所以乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数和列数可能与矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的行数和列数都不同．

例 1.1.4. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解：

$$c_{11}=1\times1+3\times1+2\times0=4,\qquad c_{12}=1\times1+3\times2+2\times1=9,$$
$$c_{21}=4\times1+(-1)\times1+0\times0=3,\ c_{22}=4\times1+(-1)\times2+0\times1=2.$$

所以

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

例 1.1.5. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -6 & 6\end{pmatrix}.$$

例 1.1.5. 说明矩阵乘法不但交换律未必成立，并且当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ 时，仍可能 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，因此在矩阵运算中，消去律一般也不成立，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 并且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 未必可以推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

尽管矩阵乘法不满足交换律和消去律，但是矩阵乘法满足下面的运算律：

(1) 结合律：$(\boldsymbol{A}_{s\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m})\boldsymbol{C}_{m\times r}=\boldsymbol{A}_{s\times n}(\boldsymbol{B}_{n\times m}\boldsymbol{C}_{m\times r})$；

(2) 乘法对加法的分配律：

$$A_{s\times n}(B_{n\times m}+C_{n\times m})=A_{s\times n}B_{n\times m}+A_{s\times n}C_{n\times m},$$

$$(B_{n\times m}+C_{n\times m})D_{m\times r}=B_{n\times m}D_{m\times r}+C_{n\times m}D_{m\times r};$$

(3) $(kA_{s\times n})B_{n\times m}=A_{s\times n}(kB_{n\times m})=k(A_{s\times n}B_{n\times m})$;

(4) $A_{s\times n}E_n=A_{s\times n}$, $E_nB_{n\times m}=B_{n\times m}$;

(5) $A_{s\times n}0_{n\times r}=0_{s\times r}$, $0_{s\times n}B_{n\times m}=0_{s\times m}$.

上述运算律的验证读者可以自己完成.

对于 n 阶方阵 A,定义 A 的方幂如下:

$$A^0=E,$$
$$A^{k+1}=A^kA=\underbrace{AA\cdots A}_{k+1}.$$

这里 k 为非负整数. 由于矩阵乘法满足结合律,所以 A 的方幂满足下面的运算规律:

(1) $A^kA^l=A^{k+l}$;

(2) $(A^k)^l=A^{kl}$.

关于矩阵乘积,要特别注意:由于矩阵乘法不满足交换律,所以在进行矩阵运算时,一般

$$(AB)^2\neq A^2B^2,(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2.$$

事实上, $(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B$,而 $A^2B^2=(AA)(BB)=A(AB)B$. 同样, $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$. 这就是说,中学数学中熟悉的乘法公式,现在不能随便使用了.

6. 矩阵乘法的应用

定义 1.1.7. 由矩阵乘法的定义可以把线性方程组 (1.1.1) 写成矩阵方程 $AX=B$ 的形式,其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

我们把 A 称为线性方程组(1.1.1)的系数矩阵,把 X 称为线性方程组(1.1.1)的未知数列向量,把 B 称为线性方程组(1.1.1)的常数项列向量.

例 1.1.6. 有一个人的体重为 128kg,他想通过节食和锻炼来减少体重. 表 1-3 为体育锻炼时热量消耗表(大卡/小时).

表 1-3

体重(kg)	102	111	120	128
散步(3km/h)	213	225	237	249
跑步(6km/h)	651	688	726	764
自行车(12km/h)	304	321	338	356
网球	420	441	468	492

根据热量消耗表,他制定了自己的锻炼计划,如表 1- 4 所示(单位:小时).

表 1- 4

练习时间	散步	跑步	自行车	网球
星期一	1.0	0.0	1.0	0.0
星期二	0.0	0.0	0.0	2.0
星期三	0.4	0.5	0.0	0.0
星期四	0.0	0.0	0.5	2.0
星期五	0.4	0.5	0.0	0.0

试问他按这个计划进行锻炼时,每天能消耗多少热量?

解:根据这个人的体重可以看出热量消耗表的第 4 列适合他的情况,我们用一个列矩阵 $\boldsymbol{X}$来表示它. 将他的锻炼计划表示成一个 5×4 矩阵 $\boldsymbol{A}$,则他每天消耗的热量为

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0\\ 0.4 & 0.5 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 2.0\\ 0.4 & 0.5 & 0.0 & 0.0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}249\\764\\356\\492\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}605.0\\984.0\\481.6\\1\,162.0\\481.6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{星期一}\\\text{星期二}\\\text{星期三}\\\text{星期四}\\\text{星期五}\end{array}$$

例 1.1.7. 一个工厂生产三种产品,它的产品成本分成三个部分,单位产品成本如表 1-5 所示(单位:元).

表 1-5

成本	产品 A	产品 B	产品 C
原材料	0.10	0.30	0.15
劳动力	0.30	0.40	0.25
其他	0.10	0.20	0.15

在各个季节,这个工厂生产这几种产品的产量如表 1- 6 所示.

表 1-6

产品	夏	秋	冬	春
产品 A	4 000	4 500	4 500	4 000
产品 B	2 000	2 600	2 400	2 200
产品 C	5 800	6 200	6 000	6 000

请把这个工厂在每个季节的各项费用列在一个表上.

解:将产品的成本表用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示,将产品的产量表用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 来表示,则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.10 & 0.30 & 0.15\\ 0.30 & 0.40 & 0.25\\ 0.10 & 0.20 & 0.15\end{pmatrix},\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000\\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200\\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AM}=\begin{pmatrix}1\,870 & 2\,160 & 2\,070 & 1\,960\\ 3\,450 & 3\,940 & 3\,810 & 3\,580\\ 1\,670 & 1\,900 & 1\,830 & 1\,740\end{pmatrix}.$$

由矩阵乘法的定义可以看出:矩阵 $\boldsymbol{AM}$ 的第 1 列的三个元素表示夏季的三项费用(原材料、劳动力、其他);矩阵 $\boldsymbol{AM}$ 的第 2 列的三个元素表示秋季的三项费用(原材料、劳动力、其他);矩阵 $\boldsymbol{AM}$ 的第 3 列的三个元素表示冬季的三项费用(原材料、劳动力、其他);矩阵 $\boldsymbol{AM}$ 的第 4 列的三个元素表示春季的三项费用(原材料、劳动力、其他). 所以该工厂在各个季节的各项费用如表 1-7 所示(单位:元).

表 1-7

成本	夏	秋	冬	春	年
原材料	1 870	2 160	2 070	1 960	8 060
劳动力	3 450	3 940	3 810	3 580	14 780
其他	1 670	1 900	1 830	1 740	7 140
合计	6 990	8 000	7 710	7 280	29 980

例 1.1.8.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{6\times6}$是例 1.1.2 中定义的矩阵,令 $\boldsymbol{A}^2=(b_{ij})$,证明:$b_{ij}$表示从城市 C_i 出发通过两条高速公路到达城市 C_j 的不同的走法数.

证明:由矩阵乘法的定义得

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{6}a_{ik}a_{kj}.$$

如果 $a_{ik}a_{kj}=1$,则 $a_{ik}=1$,$a_{kj}=1$,这说明城市 C_i 与城市 C_k 之间有一条高速公路直接连接,城市 C_k 与城市 C_j 之间有一条高速公路直接连接,所以从城市 C_i 出发可以经过城市 C_k 并且通过两条高速公路到达城市 C_j. 如果 $a_{ik}a_{kj}=0$,则或者 $a_{ik}=0$,或者 $a_{kj}=0$. 这说明或者是城市 C_i 与城市 C_k 之间没有高速公路直接连接,或者是城市 C_k 与城市 C_j 之间没有高速公路直接连接,所以从城市 C_i 出发不可能通过两条高速公路而且经过城市 C_k 到达城市 C_j. 因此,从城市 C_i 出发通过两条高速公路到达城市 C_j,一共有 b_{ij}种不同的走法.