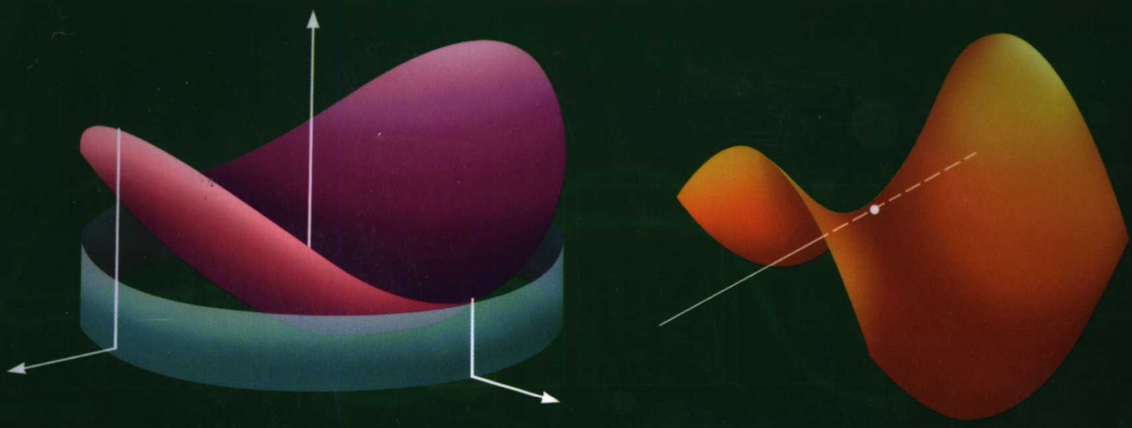


21世纪高职高专数学系列规划教材

高等应用数学

高等应用数学学习指导与技能训练

翁方愚　何闰丰　主编

本教材特色：

1.编写原则：以应用为目的，必需、够用为度

2.紧密联系生产、生活实践，从生产、生活实例导入数学概念

3.内容简明易懂，注重数学概念、定理和公式的理解、应用

4.加强知识性、趣味性，培养数学思想和数学素养

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪高职高专数学系列规划教材

高等应用数学·高等应用数学学习指导与技能训练

主　编　翁方愚　何闰丰
副主编　高玉芹　王　莉　包玉娥　王　清
主　审　彭　涓

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本教材是根据高职教育的目的和特点，针对当前高职学生实际状况编写的．编者注意突出如下特点：①所有概念引入都从生活、生产中的实例入手；②内容阐述注重简明、直观、易懂，避免过深的理论知识和数学推导；③选编了一些有趣的数学和数学家小资料，以培养学生的数学素养，扩大学生的知识面．

教材内容包括：函数、极限、连续，导数与微分及其应用，不定积分、定积分及其应用，多元函数微分学，线性代数初步，概率论与数理统计初步．

本教材适合作为学时数为70～100的理工、经管等各专业高职高专教材，也适合作为高职高专文科专业教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学·高等应用数学学习指导与技能训练/
翁方愚，何闰丰主编．—北京：中国铁道出版社，2007.8
(21世纪高职高专数学系列规划教材)
ISBN 978-7-113-07941-3

Ⅰ．高… Ⅱ．①翁…②何… Ⅲ．应用数学—高等学校：
技术学校—教学参考资料 Ⅳ．029

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第126180号

书　　名：高等应用数学·高等应用数学学习指导与技能训练
作　　者：翁方愚　何闰丰　主编
出版发行：中国铁道出版社(10054，北京市宣武区右安门西街8号)
策划编辑：李小军
责任编辑：李小军
封面设计：路　瑶
印　　刷：北京市兴顺印刷厂
开　　本：730×988　1/16　印张：24.75　字数：446千
版　　本：2007年8月第1版　　2007年8月第1次印刷
印　　数：1～4000册
书　　号：ISBN 978-7-113-07941-3/O·160
定　　价：35.00元(共二册)

前　言

大力发展职业技术教育是我国政府现阶段教育发展的一项政策．可是，由于职业教育发展的时间还不长，现在的职业技术教育方面的教材还存在种种问题，成熟的、高水平的教材还不多．以高职数学教材为例，大多数一线教师反映，体现高等职业教育特点和目标、适合当前高职学生实际状态的教材难以找到，多数高职数学教材都是本科教材或专科教材的压缩或翻版，内容偏多偏深，与应用脱节．基于这种状况，受中国铁道出版社委托，我们决定编写一套体现高等职业教育特点、适合当前高职学生实际状况的数学教材．编写的指导思想是：

1. 以教育部颁布的高职高专教育基础课程教学基本要求和高职高专教育专业人材培养目标及规格为依据．

2. 体现高等职业教育的特点．编写时严格遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则；淡化数学理论；对定理、公式一般不作推导，但尽可能予以直观解释或说明；培养数学思想和数学素养；注意与实际应用联系的基本知识、基本方法和基本技能的训练，注重分析、解决实际问题能力的培养．

3. 遵循实践—认识—实践的认识规律的思路．由生产、生活中的实例引出抽象的数学知识；然后，以傍例或几何图形加深对概念、定理的理解；最后，将数学知识应用于解决各种生产、生活中的实际问题，从而实现“以应用为目的”；同时，帮助学生从数学高深莫测的畏惧心理中解脱出来．

4. 注意知识性、趣味性和可读性．一些人认为数学枯燥无味．果真是这样吗？事实并非如此．数学中有许多有趣的知识和事例，数学很美．本书内容除了紧密联系生产、生活实际，使数学知识化、通俗化外，还选编了一些数学小知识、数学家小传、名题趣题等材料．相信这些材料一定会得到广大读者的喜爱，也会在潜移默化中提高广大读者的数学素养．

5. 有意识地编写了一些经济生活中的数学问题，如边际分析、弹性分析等．因为每个人都离不开经济活动，如购房、投资理财等．这些知识，不仅经管类学生必须掌握，理工、人文类学生也应了解。

本书为高等职业教育数学教材，教材内容、学时安排如下（仅供参考）：

微积分部分 60 ~ 70 学时;微分方程部分 10 ~ 15 学时;线性代数部分 10 ~ 16 学时;概率论与数理统计部分 10 ~ 20 学时.各校各专业可根据专业特点和安排的学时数取舍相关内容.

本教材适合作为高职高专各专业教学使用,尤其适合经、管、文科专业,以及学时数较少的理、工科专业.

与本教材配套的《高等应用数学学习指导与技能训练》,充分体现了人性化的理念.读者不仅可以复习、巩固所学的知识,理清所学知识的脉络;同时,可以作为练习册使用.

本教材由中国铁道出版社李小军策划,柳州运输职业技术学院翁方愚、何闰丰任主编;山东服装职业技术学院高玉芹、泰山职业技术学院王莉、内蒙古民族大学包玉娥、泰山医学院王清任副主编;兰州石化职业技术学院彭涓任主审。参加编写的还有柳州运输职业技术学院罗柳容。在本教材的拟定编写提纲、编写和审定过程中,还得到桂林电子科技大学陈克东,济南铁道职业技术学院沈国芳、冯琦,苏州铁道机电职业技术学院浦文倜,武汉铁路职业技术学院罗成林,天津铁路职业技术学院朱化平,湖南铁道科技职业技术学院许智勇,石家庄铁路职业技术学院杨建法,福建交通职业技术学院张国勇等老师的指导和帮助.在此,向他们表示诚挚的谢意.

限于编者水平,书中一定存在不妥、错误之处,敬请广大读者批评、指正.

编　者

2007.6

目　录

第一章 函数 极限 连续

函数是数学中最重要、最基本的概念之一. 在任何一本数学书中,几乎都有它的身影,任何一个具有初中以上文化程度的人,都无数次碰到过它,可谓熟之又熟. 但是它往往被看作书斋中的概念,与现实生活相去甚远. 其实只要你稍微留意一下,它可谓是无处不在. 举一个最简单的例子,幼儿园中小朋友们常常玩这样一个游戏:一只青蛙一张嘴两只眼睛四条腿;两只青蛙两张嘴,四只眼睛八条腿……,往下既可以按序说下去,也可以跳过几个突然发问,比如七只青蛙多少张嘴? 多少只眼睛? 多少条腿? 由此可以看到,只要青蛙数一定,眼睛数就完全确定了,这就是函数的基本思想. 由于我们讨论的对象不一定是自然数(如青蛙数),一般会在实数范围或部分实数范围来讨论,因此先引进有关概念.

第一节 函数与初等函数

一、函数的定义及表示法

(一)区间

区间是高等数学中常用的一个概念,它是数轴上满足某些条件的点的集合.

定义 1 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b),在数轴上表示如图 1-1 所示.

定义 2 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,在数轴上表示如图 1-2 所示.

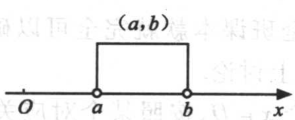


图 1-1

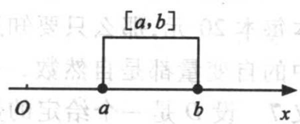


图 1-2

定义 3 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 称为**半开区间**,记作 $[a,b)$,在数轴上表示如图 1-3 所示.

定义 4 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 也称为**半开区间**,记作 $(a,b]$,在数轴上表示如图 1-4 所示.

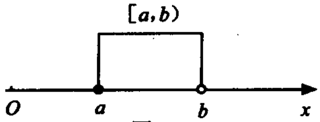


图 1-3

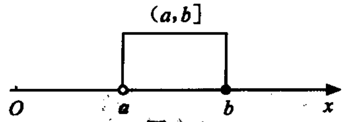


图 1-4

以上四种区间称为**有限区间**.

读者不妨比较一下开区间和闭区间的差异，就会发现仅仅相差两个点. 而区间(a,b)中点的个数，多得数不清，两个点似乎无足轻重. 但就是这两个点，在以后的讨论中会引出迥然不同的结果. 读者不妨有意识地注意一下.

除了有限区间外，还有无限区间. 我们不妨设想一下：数轴上的点如果不断地向右移动而永不停止，这种情况如何来描述呢？为此引进符号$+\infty$，读作"正无穷大". 它不是一个数，而是表示沿着x轴正方向无限运动过程的点，所以，即使一个再大的数，我们也不能说它等于$+\infty$.

定义 5 设a为实数，数集$\{x|a<x\}$称为**无限开区间**，记作$(a,+\infty)$，在数轴上表示如图 1-5 所示.

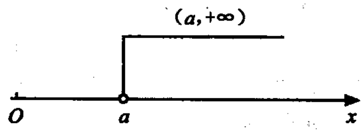


图 1-5

定义 6 设a为实数，数集$\{x|a\leq x\}$称为**无限半开区间**，记作$[a,+\infty)$，读者可自行作图.

同理，数轴上的点，如果不断地向左移动而永不停止，这时引进符号$-\infty$，读作"负无穷大". 它也不是一个数，而是表示沿x轴负方向无限运动过程的点.

同样有无限开区间$(-\infty,a)$、无限半开区间$(-\infty,a]$的概念.

如果数轴上的点，既可以从正方向越走越远，也可以从负方面越走越远；或是一会儿从正的方向越走越远，一会儿又跳到负的方向越走越远，这时我们引进符号∞，读作无穷大，也就是∞表示$\pm\infty$.

特别地，当仅在表示自然数n趋于正无穷大时，符号$n\to\infty$中的∞表示$+\infty$.

（二）函数的定义

实例 现在我们回到书中一开始提到的青蛙眼睛数的问题. 我们看到只要青蛙数确定，那么眼睛数就确定了，这就是函数最本质的思想. 其实这种思想到处都有，例如，数学课本每本 20 元，那么只要知道班里的学生数，全班课本款就完全可以确定了. 这些问题中的自变量都是自然数，一般地，我们在数集上讨论.

定义 7 设D是一个给定的数集，如果对于每个$x\in D$，按照某个对应关系f，都有确定的数值y与之相对应，那么y就叫做定义在数集D上的x的**函数**，记作

$$y=f(x).$$

x叫做**自变量**，数集D叫做函数的**定义域**. 当x取遍D中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合M叫做函数的**值域**.

对于一个函数来说，当定义域和对应关系确定之后，这个函数就完全确定了. 因此，判断两个函数是否是同一个函数，这两方面必须完全一样. 只要定义域和对应关系

完全一样,就能认为是同一个函数.

例 1 设 $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$,问它们是否为同一函数?

解:不是,因为它们的定义域不同. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

对于函数的定义,要注意两点:

1. 定义中只要求"都有确定的数值 y",并没有要求有"唯一的值",因此,对于自变量 x 取得的一个值,对应地 y 值可以有一个也可以有多个. 在前一种情况下,称 y 为单值函数;后一种情况下,称 y 为多值函数. 本书只考虑 y 是单值函数的情况,即本书所称的函数都是指单值函数.

2. 定义中并没有要求自变量变化时函数值一定要变,只要求对于自变量 $x\in D$,都有确定的 y 与之对应. 因此,常量 $y=C$ 也符合函数的定义,因为对于 $x\in D$ 时,所对应的 y 值都是确定的常数 C.

$y=C$ 看起来很简单,但有时反而被迷惑了.

例 2 设函数 $y=f(x)=2$,其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,求 $f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(-1)$、$f(100)$、$f(x+2)$、$f(x^2+2)$ 各等于多少?

解: $f(0)=f(1)=f(2)=f(-1)=f(100)=f(x+2)=f(x^2+2)=2$.

小资料

关于函数概念

最早提出"函数"概念的是德国数学家莱布尼兹,他在 1692 年第一次用这个词来表示求幂,比如 x、x^2、x^3 等都叫做函数. 1718 年瑞士数学家贝努里把函数定义为"由某个变量及任意的一些常数结合而成的数量",他把变量 x 与常量所构成的式子都叫做 x 的函数,这样凡是用公式表达的都叫做函数.

后来数学家觉得不应该把函数概念局限于只能用公式来表示. 1775 年瑞士数学家欧拉把函数定义为"如果某些变量以某种方式依赖于另一些变量,即当后面这些变量变化时,前面这些变量也随着变化,我们把前面的变量称为后面变量的函数".

有的数学家对于不用公式来表示函数感到很不习惯,有的数学家甚至对不用公式表示函数抱怀疑态度,因此数学家曾把能用公式表示的函数叫"真函数",把不能用公式表示的函数叫"假函数".

后来德国数学家狄利克雷(1805—1859)抽象出了至今仍为人们易于接受,并且较为合理的函数概念.

现行中学课本上的函数定义是谁提出来的呢? 最先提出类似定义的是法国数学家柯西,他于 1821 年提出如下定义:"在某些变量间存在着一定的关系,当一经给定其中某一变量的值,其他变量的值可随着而确定时,则将最初的变量叫自变量,其他各变量叫做函数."这是第一次出现"自变量"一词. 这就是传统的数学模型. 本书给出的概念基本上就是这种模型.

与柯西同时期的德国数学家也提出过类似的定义:"对于 x 的每一个值,y 总有完

全确定的值与它对应，而不拘建立 x 与 y 之间的对应方法如何，把 y 叫做 x 的函数.”

到19世纪70年代德国数学家康托尔提出了集合论，函数便明确地定义为集合间的对应关系. 使得函数这个概念更准确、应用更广泛，是近代函数的模型.

中文的“函数”一词，是清代数学家李善兰在其译著《代微积拾级》中首先使用的，是个意译词，在中国古代“函”与“含”字通用，都是“包含”的意思.

（三）函数的表示法

表示函数的方法，常用的有公式法、表格法和图像法三种. 本书所讨论的函数常用公式法表示.

以前我们常见的函数，如：$y=3x+2$、$y=5x^2-3x+2$、$y=a^x$ 等，都是用一个式子来表示. 但有时我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内，用不同的式子来表示.

例如：函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{当 } x\geq 0 \\ x-1 & \text{当 } x<0 \end{cases}$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数. 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x+1$；当 $x<0$ 时，$f(x)=x-1$. 它的图像如图1-6所示.

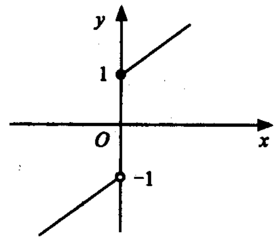


图1-6

要注意它不是两个函数 $f(x)=x+1$ 与 $f(x)=x-1$.

下面介绍两个常见的函数.

例1 函数 $y=|x|$，其定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，这种函数称为**绝对值函数**. 图像如图1-7所示.

它也可以表示成

$$y=\begin{cases} x & \text{当 } x\geq 0 \\ -x & \text{当 } x<0 \end{cases}.$$

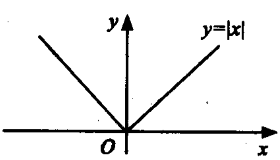


图1-7

一般地，带绝对值的函数都可以用去掉绝对值的方法，在不同范围内用不同的式子来表示.

例2 函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & \text{当 } x>0 \\ 0 & \text{当 } x=0 \\ -1 & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，函数的图像如图1-8所示.

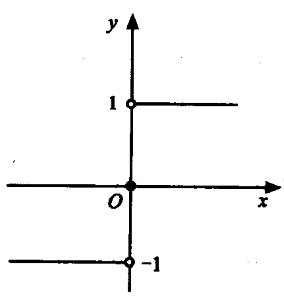


图1-8

凡是在不同的区间具有不同的表达式的函数，称为**分段函数**.

分段函数在交接点处有比较大的变化，这是要特别注意的.

有的函数，表达式并不复杂，也可以想像它的图形，但却画不出来，如

$$y=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 是有理数} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数}\end{cases}.$$

这个函数称为**狄利克雷函数**. 生活中不可能有它的应用,但在理论研究上,却有它的一席之地.

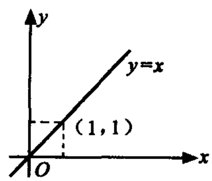
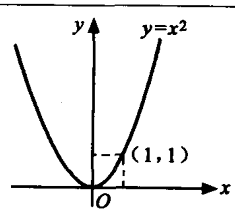
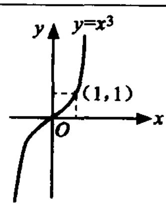
小资料 **关于狄利克雷函数**

以人名命名的函数并不多. 能够以人名为函数名,可见他对数学的贡献. 由于受到知识的限制,我们只能介绍狄利克雷函数的一点皮毛. 周期函数是否有最小正周期,早期人们一直认为这不是个问题——肯定有,因为把所有的周期拿来找一个最小的就可以了. 殊不知这是不正确的. 可以证明狄利克雷函数是周期函数;因为对任何正有理数 l,当 x 是有理数,$x+l$ 也是有理数,所以,$f(x+l)=1=f(x)$;反之当 x 是无理数,$x+l$ 也是无理数,所以 $f(x+l)=0=f(x)$. 即任何有理数都是它的周期. 由于最小正有理数是不存在的,所以狄利克雷函数没有最小正周期.

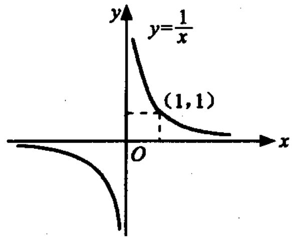
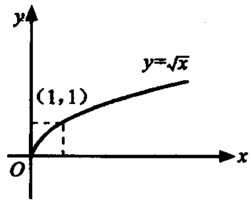
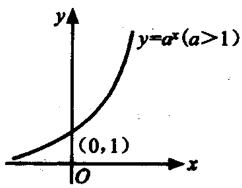
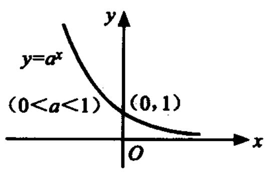
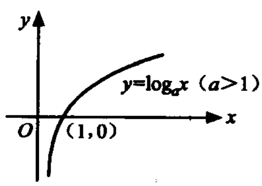
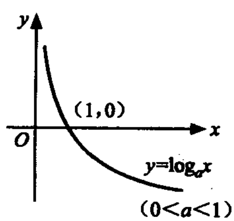
二、基本初等函数

在中学里学过的幂函数 $y=x^\alpha$(α 为实数)、指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq1$)、对数函数 $y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq1$)、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 见表 1-1. 由于这五类函数都已经学过,所以我们只提一下要注意之处.

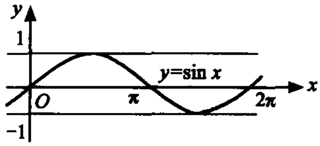
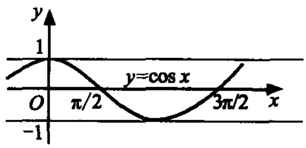
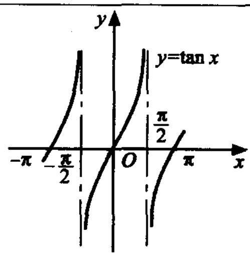
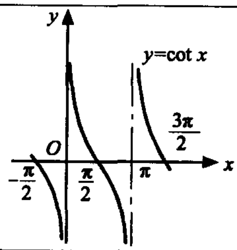
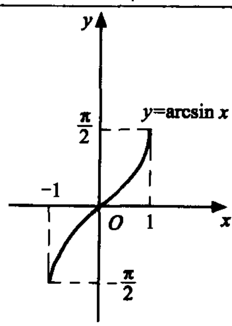
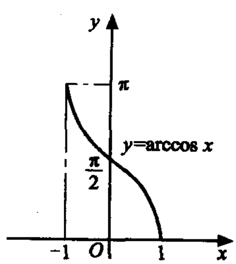
表 1-1 常用基本初等函数表

	函数定义域与值域	图 像	特 性
幂函数	$y=x$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数; 单调增加
	$y=x^2$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数; 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少,在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数; 单调增加

续上表

	函数定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x^{-1}$ $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数； 在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内调减少
	$y=\sqrt{x}$ $x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x(a>1)$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$ $x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$ $x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少

续上表

	函数定义域与值域	图像	特性
三角函数	$y=\sin x$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少
	$y=\cos x$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加
	$y=\tan x$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加
	$y=\cot x$ $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$ $x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$ $x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界