普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导丛书

魏京花 黄 伟 主编

大学物理学

金牌辅导

章 节 要 点
难 点 解 析
习 题 详 解
活 学 活 用

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学金牌辅导/魏京花，黄伟主编．—北京：中国建材工业出版社，2007.6

（普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导丛书）

ISBN 978-7-80227-225-5

Ⅰ．大… Ⅱ．①魏… ②黄… Ⅲ．物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．04

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 024220 号

内 容 简 介

本书是与吴百诗主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学物理学》配套的教学参考书。为方便读者使用，它不但给出了教材中全部习题的解答，而且对每章要点进行了总结，精选例题分析，并给出每章的自测练习及解答。

本书可供高等院校工科各专业学生作为大学物理的教学参考书使用，也可供其他学习物理的社会读者选用。

大学物理学金牌辅导

魏京花　黄伟　主编

出版发行：中国建材工业出版社

地　　址：北京市西城区车公庄大街 6 号

邮　　编：100044

经　　销：全国各地新华书店

印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司

开　　本：787mm × 1092mm　1/16

印　　张：25.25

字　　数：624 千字

版　　次：2007 年 6 月第 1 版

印　　次：2007 年 6 月第 1 次

书　　号：ISBN 978-7-80227-225-5

定　　价：38.00 元

本社网址：www.jccbs.com.cn

前　言

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式及相互作用和转化规律的科学。它的基本理论渗透在自然科学的各个领域，广泛应用于生产技术，是自然科学和工程技术的基础。大学物理课程是高等学校理工科各专业学生一门重要的必修基础课，它在培养学生现代科学的自然观、宇宙观和辩证唯物主义世界观，培养学生的探索、创新精神，培养学生的科学思维能力，掌握科学方法等方面，都具有其他课程不可替代的重要作用。

大学物理课程是理工科学生的必修课程，通过期末考试获取学分是每一位学生必须经历的过程。然而，繁重的课业负担、学时的压缩、习题课的减少等多方面的原因，使许多学生疲于奔命却收效甚微，对所学知识难以深入理解，整体上表现为及格率的下降，给不少同学带来困惑与烦恼，严重影响学生学习大学物理的兴趣和积极性。为了更好地帮助同学们学好大学物理课程，使学生真正掌握所学知识的内涵，把握知识点，了解重点、难点和解题思路，达到事半功倍的效果，使学生顺利通过课程考试，我们编写了这本《大学物理学金牌辅导》。

本书是与吴百诗主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学物理学》配套的教学参考书。其结构主线为：一、章节要点，总结每章的概念公式以方便读者学习；二、应用举例，每章配有数量不等的典型例题，在典型例题的求解中，突出物理概念和物理模型，注重问题的分析和解题方法的介绍；三、习题详解，本书中给出了教材中全部习题的提示与详解；四、自测练习，在这里读者可以得到大量的专题训练并在书后配有自测练习答案。

本书由北京建筑工程学院物理教研室教师编写。其中，黄伟编写第一篇力学基础的第一章和第二章，宫瑞婷编写第二篇热学，魏京花编写第三篇电磁学中的第七章、第八章、第九章和第十章，余丽芳编写第四篇振动、波动、光学中的第十二章、第十三章和第十五章，聂传辉编写第三篇电磁学中的第十一章和第一篇力学基础的第四章，王俊平编写第一篇力学基础的第三章和第五篇近代物理。全书由魏京花和黄伟统一编审。

编者

2007 年 5 月

目　　录

第一篇　力学基础

第一章　质点运动学

【章节要点】

1. 质点和参考系

(1)质点

忽略其大小、形状,但具有一定质量的物体.

(2)参考系

在描述物体的运动状态时选作参照的物体或物体系.

(3)坐标系

为了定量描述质点的位置,需要在参考系中建立固定的坐标系,常用的坐标系有笛卡儿直角坐标系、自然坐标等.

2. 描述质点运动的物理量

(1)位矢

从坐标原点引向质点所在位置的有向线段,记为$\boldsymbol{r}$. 在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

(2)运动方程

质点的位矢随时间变化的关系$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$称为运动方程.

在直角坐标系中的表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

分量表示为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

在自然坐标中表示为　　$s=s(t)$

(3)位移

由质点的初始位置指向末位置的矢量,$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$,在直角坐标系中表示为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$$

(4)路程

物体运动时沿轨迹实际通过的路径长度,用s表示,一般情况下,$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq s$.

(5)速度

质点位矢对时间的一阶导数,$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标中表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

速度的大小称为速率,速率是标量,并且

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

(6)加速度

质点运动速度对时间的一阶导数,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标中表示为

$$\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

3. 常见的几种运动形式

(1)匀变速直线运动

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

(2)抛体运动

$$a_x = 0,\quad a_y = -g$$

$$v_x = v_0\cos\theta,\quad v_y = v_0\sin\theta - gt$$

$$x = v_0\cos\theta\cdot t,\quad y = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

(3)圆周运动的角量描述

角位置: $\theta = \theta(t)$

角位移: $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

角速度: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v}{R}$

角加速度: $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

法向加速度: $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R} = R\omega^2$ (指向圆心)

切向加速度: $a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\beta$ (沿切线方向)

(4)相对运动和伽利略变换

1)运动的相对性

对同一物体运动的描述,随参考系选择的不同一般是不相同的.

2)伽利略速度变换式

两个相互作平动运动的坐标系中的运动速度具有如下关系：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

这里$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{v}'$,$\boldsymbol{u}$ 分别称为绝对速度、相对速度和牵连速度.

【应用举例】

例 1.1 在什么情况下,位移才在数值上等于路程?

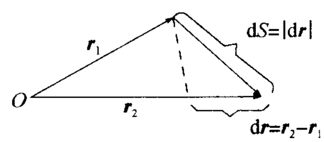
答:一般情况下,位移的量值不等于路程,即 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta S$. 只在单方向的直线运动中,或在微分的情况下(即无限短时间内),位移的量值才等于路程.

例 1.2 速度$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,那么速度的数值(即速率)$v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$吗?

答:$v \neq \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

因为 $v = \dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$,而从矢量图例 1.2 可以看出 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$(即 $\mathrm{d}S$)并不等于 $\mathrm{d}r$.

本题亦可用直角坐标分量式来说明.



例 1.2 图

因为 $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

而 $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2 + y^2}$$

显然,$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$一般不等于$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2 + y^2}$,所以

$$v \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

例 1.3 沿直线运动的质点,其速度大小与时间成反比,则其加速度的大小与速度大小的关系是:

A. 与速度大小成正比　　B. 与速度大小平方成正比

C. 与速度大小成反比　　D. 与速度大小平方成反比

解 本题主要考查加速度的概念. 根据题目条件:$v \propto \dfrac{1}{t}$,由加速度的定义 $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$,求导数,可以得出加速度 $a \propto \dfrac{1}{t^2} \propto v^2$,因此加速度的大小与速度大小平方成正比. 结果为 B.

例 1.4 一个质点沿半径为 R 的圆周运动,在一个周期 T 内其平均速度的大小与平均速率分别为:

A. $\dfrac{2\pi R}{T}$,$\dfrac{2\pi R}{T}$　　B. $\dfrac{2\pi R}{T}$,0

C. 0,0　　D. 0,$\dfrac{2\pi R}{T}$

解 考查了学生描述质点运动状态的两个基本概念. 平均速度$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$,平均速率 $\bar{v}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. 由于圆周运动在一个周期内位移 $\Delta \boldsymbol{r}=0$、路程 $\Delta S=2\pi R$,所以平均速度的大小为零,平均速率分别为$\dfrac{2\pi R}{T}$,答案为 D.

例 1.5 一个质点沿直线运动,其运动方程为 $x=6t-t^2$,x 的单位为 m,t 的单位为 s,在 t 从 0 到 4s 的时间间隔内,质点所走过的路程为:

A. 8m　　B. 9m　　C. 10m　　D. 11m

解 本题难点在于判断速度为零的时间. 由 $v=6-2t=0$,得出 $t=3$s. 所以 0 到 3s 内路程 $S_1=9$m,3 到 4s 内 $S_2=1$m. 整个路程为:$S=9+1=10$(m). 答案为 C.

例 1.6 质点沿半径为 R 的圆周运动,且 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{v}$ 两者方向之间的夹角 θ 保持不变,试求质点速率 v 随时间的变化的规律.(已知初速率为 v_0)

解 圆周运动中,$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{v}$ 间的夹角 θ 保持不变,也即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_t$(切向加速度)之夹角不变,故

$$\frac{a_t}{a_n}=\pm\cot\theta=k(k\text{ 为常数})$$

即$\dfrac{dv}{dt}=k\dfrac{v^2}{R}$,分离变量得积分:$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=\int_0^t\frac{k}{R}dt$

解得

$$v=\frac{v_0}{1-\dfrac{kv_0t}{R}}$$

例 1.7 质点沿半径为 R 的圆周按规律 $S=at-\dfrac{b}{2}t^2$ 运动. 式中 S 为路程,a,b 为常数,试求:(1)初始时刻的角速度和角加速度;(2)法向加速度与切向加速度数值相等前,质点运动的时间.

解 由角量和线量关系得

$$\theta=\frac{S}{R}=\frac{a}{R}t-\frac{b}{2R}t^2$$

(1)角速度

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{a}{R}-\frac{b}{R}t$$

$$t=0\quad \omega=\frac{a}{R}$$

角加速度

$$\beta=\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{b}{R}$$

(2)切向加速度与法向加速度为

$$a_t=R\beta=-b$$

$$a_n=R\omega^2=\frac{1}{R}(a-bt)^2$$

两者数值相等,即 $a_n=|a_t|$,将上二式代入可解得 $t=\dfrac{a}{b}-\sqrt{\dfrac{R}{b}}$.

【习题详解】

1.1 选择题

(1)质点在 xOy 平面内作曲线运动,则质点速率的正确表达式为

A. $v=\frac{dr}{dt}$　　B. $v=\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$　　C. $v=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$

D. $v=\frac{ds}{dt}$　　E. $v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$　　[CDE]

提示:根据速度的定义,同时考虑到 $ds=|d\boldsymbol{r}|$.

(2)质点作匀速率圆周运动,下列各量中恒定不变的量是

A. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}$　　B. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$　　C. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}$

D. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$　　E. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$　　F. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t}$　　[ACDF]

提示:根据速度的定义.

(3)根据瞬时加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的定义,及其用直角坐标和自然坐标的表示形式,它的大小 $|\boldsymbol{a}|$ 可表示为

A. $\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$　　B. $\frac{dv}{dt}$　　C. $\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$　　D. $\frac{d^2r}{dt^2}$

E. $\frac{d^2s}{dt^2}$　　F. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}$　　G. $\left[\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

H. $\left[\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$　　[ACGH]

提示:根据加速度的定义.

(4)在质点的下列运动中,说法正确的是

A. 匀加速运动必定是直线运动

B. 在曲线运动过程中,速度的法向分量恒为零

C. 在直线运动中,加速度为负,质点必作减速运动

D. 在圆周运动中,加速度方向总指向圆心

E. 在曲线运动过程中,法向加速度必不为零(拐点处除外)　　[E]

提示:根据速度和加速度的定义.

(5)下列各种情况中,说法错误的是

A. 一物体具有恒定的速率但仍有变化的速度

B. 一物体具有恒定的速率但仍有变化的速率

C. 一物体具有加速度而其速度可以为零

D. 一物体速率减小但加速度增大

E. 一物体速率增大,而法向加速度的大小不变　　[B]

提示:根据速度和加速度的定义.

(6)一质点在 xOy 平面内运动,已知质点位矢的表示式为 $\boldsymbol{r}=at^2\boldsymbol{i}+bt^2\boldsymbol{j}$(其中 a,b 为常量),则该质点作

A. 匀速直线运动　　B. 变速直线运动

C. 抛物线运动　　D. 一般曲线运动　　[B]

提示:由于速度的 x,y 分量随时间变化,同时考虑二者的线性关系.

(7) 一小球沿斜面向上运动,其运动方程为 $s=5+4t-t^2$(s 的单位为 m,t 的单位为 s),则小球运动到最高点的时刻是

A. $t=4\text{s}$　　B. $t=2\text{s}$　　C. $t=8\text{s}$　　D. $t=6\text{s}$　　[B]

提示:对运动方程求导,可得结果.

(8) 一质点沿 x 轴运动,其速度与时间的关系式为 $v=4+t^2$(v 的单位为 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$t$ 的单位为 s),当 $t=3\text{s}$ 时质点位于 $x=9\text{m}$ 处,则质点的运动方程为

A. $x=4t+\dfrac{1}{3}t^3+12$　　B. $x=2t$

C. $x=4t+\dfrac{1}{3}t^3-12$　　D. $x=4t+\dfrac{1}{2}t^2$　　[C]

提示:对运动速度积分,可得运动方程.

(9) 在相对地面静止的坐标系内,A,B 两船都以 $2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率匀速行驶,A 船沿 x 轴正向,B 船沿 y 轴正向. 今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系(x,y 方向的单位矢量用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 表示),那么在 A 船上的坐标系中,B 船的速度(以 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 为单位)为

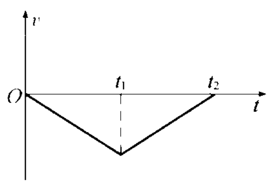
A. $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$　　B. $-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

C. $-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$　　D. $2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$　　[B]

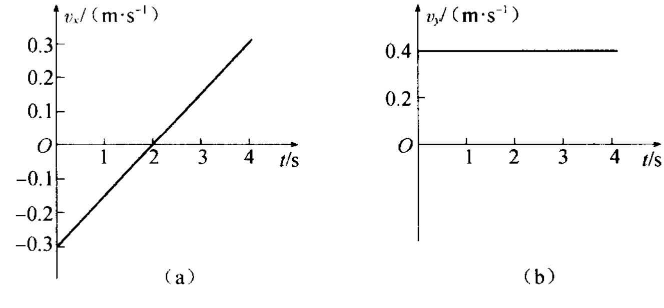
提示:根据相对速度关系求解.

1.2　填空题

(1) 一质点沿 x 轴运动,它的速度 v 和时间 t 的关系如习题 1.2(1) 图所示,则在 $0\sim t_1$ 时间间隔内,质点沿 x 轴＿负＿向作＿匀加速直线＿运动;在 $t_1\sim t_2$ 时间间隔内,质点沿 x 轴＿负＿向作＿匀减速直线＿运动.



习题 1.2(1) 图



习题 1.2(2) 图

(2) 质点 A 在光滑的水平桌面(xOy 平面)上运动. 已知 A 的速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 从 0 到 4s 内的变化规律如习题 1.2(2) 图所示. 则由图中可知:

①$t=2\text{s}$ 时,质点 A 的速度大小为 $v=$＿$0.4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$＿,方向＿沿 y 轴正向＿;

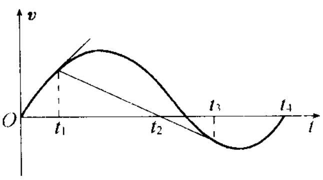
②任一时刻质点 A 的加速度大小为 $a=$＿$0.15\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$＿,方向＿沿 x 轴正向＿;

③质点 A 在 x 和 y 方向的运动方程为 $x=$＿$-0.3t+0.075t^2$＿,$y=$＿$0.4t$＿;

④在 $t_1=1\text{s}$ 到 $t_2=2\text{s}$ 时间间隔内,质点 A 的位移 $\Delta\boldsymbol{r}=$＿$-0.075\boldsymbol{i}+0.4\boldsymbol{j}$＿.

(3) 质点沿 x 轴作直线运动,其速度 v 与时间 t 的关系如习题 1.2(3) 图所示,则 t_1 时刻曲线的切线斜率表示＿该时刻质点的瞬时加速度＿,t_1 与 t_3 之间曲线的割线斜率表示＿从 t_1 到 t_3 时间内质点的平均加速度＿,从 $t=0$ 到 t_4 时间间隔内,质点的位移可表示为＿$\int_0^{t_4} v\mathrm{d}t$＿,从

$t=0$到 t_4 时间间隔内质点经过的路程可表示为 $\int_0^{t_4} |v| \mathrm{d}t$.



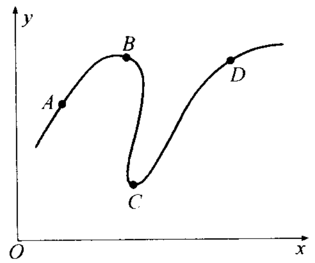
习题 1.2(3)图

(4)一质点的运动方程为 $x=2t, y=19-2t^2$(其中 x,y 的单位为 m,t 的单位为 s),则质点的轨迹方程为 $y=19-\dfrac{x^2}{2}$;$t=2\text{s}$ 时的位矢 $\boldsymbol{r}=$ $4\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}$;$t=2\text{s}$ 时的瞬时速度 $\boldsymbol{v}=$ $2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$;前 2s 内的平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}=$ $2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$.

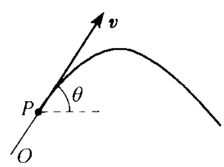
(5)一质点从 $\boldsymbol{r}_0=-5\boldsymbol{j}$ 位置开始运动,其速度与时间的关系为 $\boldsymbol{v}=3t^2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$(式中 v 以 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 为单位,t 以 s 为单位),则质点到达 x 轴所需的时间 $t=$ 1s ,此时质点在 x 轴上的位置为 $x=$ 1m .

(6)一质点以匀速率在 xOy 平面内运动,其轨迹如习题 1.2(6)图所示,由图中 A,B,C,D 四点可知 C 点的加速度量值最大, A 点的加速度量值最小.

(7)如习题 1.2(7)图所示,一质点作抛体运动,在轨迹的 P 点处,速度为 $\boldsymbol{v}$,方向与水平成 θ 角,则在该时刻,质点的切向加速度 $a_t=$ $g\sin\theta$,方向 与 $\boldsymbol{v}$ 反向 ;质点的法向加速度 $a_n=$ $g\cos\theta$,轨迹在 P 点处的曲率半径 $\rho=$ $\dfrac{v^2}{g\cos\theta}$.



习题 1.2(6)图



习题 1.2(7)图

(8)一质点作半径为 R 的圆周运动,在 $t=0$ 时经过 P 点,此后其速率 v 按 $v=A+Bt$(A,B 为常量)变化,则质点沿圆周运动一周再经过 P 点时的切向加速度 $a_t=$ B ,法向加速度 $a_n=$ $\dfrac{A^2}{R}+4\pi B$,总加速度 $\boldsymbol{a}=$ $B\boldsymbol{e}_t+\left(\dfrac{A^2}{R}+4\pi B\right)\boldsymbol{e}_n$.

(9)一质点沿半径为 R 的圆周运动,其角坐标与时间的函数关系为 $\theta=10\pi t+\dfrac{1}{2}\pi t^2$(其中 θ 以 rad 为单位,t 以 s 为单位),则质点的角速度 $\omega=$ $10\pi+\pi t$;角加速度 $\beta=$ π ;切向加速度 $a_t=\pi R$;法向加速度 $a_n=$ $R(10\pi+\pi t)^2$.

1.3 有一质点沿 x 轴作直线运动,运动方程为 $x=4.5t^2-2t^3$(其中 x 以 m 为单位,t 以 s 为单位). 试求:

(1)1 ~2s 内的平均速度;

(2)第 2s 末的瞬时速度;

(3)1 ~2s 内的路程;

(4)质点作减速运动的时间间隔.

解 质点沿 x 轴作直线运动,则每个矢量可用代数量表示,其正、负就表示该矢量的方向.

(1)依题意有 $$x=4.5t^2-2t^3$$

将已知值代入得

$$t = 1\text{s}, \quad x(1) = 2.5\text{m}$$
$$t = 2\text{s}, \quad x(2) = 2.0\text{m}$$

1 ~2s 内的平均速度为

$$v = \frac{2.5 - 2.0}{2 - 1}\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = -0.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}(\text{方向与 } x \text{ 轴正方向相反})$$

(2)通过对运动方程求导可得

$$v = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = 9t - 6t^2$$

则 $t = 2\text{s}$ 时，$v(2) = -6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$(方向与 x 轴正方向相反)

(3)计算路程,要看速度的方向在该时间间隔内是否发生变化.

因为 $$x = 4.5t^2 - 2t^3$$

所以 $$v = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = 9t - 6t^2$$

当 $v = 9t - 6t^2 = 0$ 时,解此方程可得

$$t = 1.5\text{s}, \quad t = 0(\text{舍去})$$

即当 $t = 1.5\text{s}$ 时,质点静止;且当 $t > 1.5\text{s}$ 时,$v < 0$;当 $t < 1.5\text{s}$ 时,$v > 0$. 当 $t = 1.5\text{s}$ 时,$x(1.5) = 3.375\text{m}$,$v = 0$,表明此时是转向点,则

$$s = \left|x(1.5) - x(1)\right| + \left|x(2) - x(1.5)\right| = 2.25\text{m}$$

(4)因为 $$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} = 9 - 12t$$

当 $t = \frac{3}{4}\text{s}$ 时,$a = 0$;则在 $\frac{3}{4} \sim \frac{3}{2}\text{s}$ 内,$a < 0$,$v > 0$,质点沿 x 轴正方向作减速运动.

1.4 图(a)为某质点在 x 轴上作一维运动时的 a-t 关系图. 试粗略地画出该质点的 v-t 图和 x-t 图. 设 $t = 0$ 时,$x = 0$,$v = 0$.

解 (1)v-t 曲线可根据 $v = \int a(t)\text{d}t + C_1$ 由已知的 a-t 曲线分段求出,其中 C_1 由每段时间起始时的 v 值决定. v-t 曲线如题图(b)所示.

在 0 ~5s 期间,a 为恒量. 因已知 $t = 0$ 时,$v = 0$,所以 $C_1 = 0$,则 $v = a_0 t$,v-t 曲线为一直线,v 从零开始上升到 v_0.

在 5 ~15s 期间,a 为零,$v = C_1 = v_0$,v-t 曲线为一水平线段.

在 15 ~25s 期间,a 为负恒量. 因 $C_1 = v_0$,$v = v_0 - a_0 t$,v 随 t 直线下降,由 $+v_0$ 到达 $-v_0$.

在 25 ~35s 期间,a 又为零,因 $C_1 = -v_0$,则 $v = C_1 = -v_0$,v-t 曲线在负轴方向又出现一段水平线.

在 35 ~40s 期间,a 又为正恒量,则 $v = -v_0 + a_0 t$,v 随 t 直线上升至零.

(2)x-t 曲线可根据 $x = \int v(t)\text{d}t + C_2$ 由 v-t 曲线求出,其中 C_2 由每段时间起始时的 x 值决定. x-t 曲线如图(b)所示.

在 0 ~5s 期间,$v = a_0 t$. 因 $t = 0$ 时,$x = 0$,所以 $C_2 = 0$,则有 $x = \frac{1}{2}a_0 t^2$,位移 x 随 t 按抛物线上升

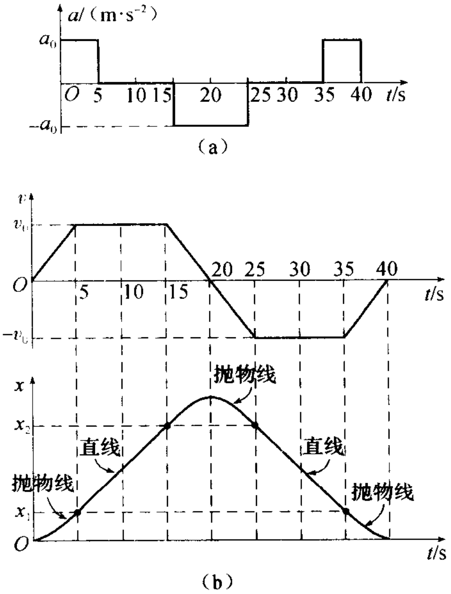
至 x_1.

在 5 ~ 15s 期间，$v = v_0$，$C_2 = x_1$，则有 $x = v_0 t + x_1$，位移 x 随 t 直线上升至 x_2.

在 15 ~ 25s 期间，$v = v_0 - a_0 t$，$C_2 = x_2$，则有 $x = x_2 + v_0 t - \frac{1}{2}a_0 t^2$，$x$-$t$ 曲线为抛物线，位移由 x_2 上升至最大值而后又回到原点 x_2.

在 25 ~ 35s 期间，$v = -v_0$，$C_2 = x_2$，则有 $x = x_2 - v_0 t$，位移 x 随 t 直线下降至 x_1.

在 35 ~ 40s 期间，$v = -v_0 + a_0 t$，$C_2 = x_1$，则有 $x = x_1 - v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$，位移 x 随 t 按抛物线下降至零.



习题 1.4 图

1.5　一质点在 xOy 平面内运动，运动方程为 $x = 2t$ 和 $y = 19 - 2t^2$（其中 x，y 以 m 为单位，t 以 s 为单位）. 试求：

(1) 质点的轨迹方程；

(2) 在 $t = 1$s 到 $t = 2$s 这一段时间间隔内，质点位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的大小和方向以及径向增量 Δr；

(3) 当 $t = 1$s 时，质点的速度和加速度；

(4) 什么时刻，质点的位矢和速度恰好垂直？

解　(1) 已知 $x = 2t$，　$y = 19 - 2t^2$

则消去 t 可得轨迹方程为

$$y = 19 - 2t^2 = 19 - 2 \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 19 - \frac{x^2}{2}$$

(2) 由题意可知，在 t 时刻质点的位矢为

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}$$

将 $t = 1$s，2s 代入，有

$$\boldsymbol{r}(1) = (2\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j})\text{m}, \quad \boldsymbol{r}(2) = (4\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j})\text{m}$$

则质点位移为　$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(2) - \boldsymbol{r}(1) = (2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j})\text{m}$

位移的大小为　$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{2^2 + 6^2}\text{m} = 6.3\text{m}$

$\Delta \boldsymbol{r}$ 和 x 轴正方向的夹角为

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{6}{2}\right) = -71.6°$$

而径向增量为

$$\Delta r = \Delta|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1| = r_2 - r_1 = (11.7 - 17.1)\text{m} = -5.4\text{m}$$

(3) 质点的速度为　$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j})\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

加速度为　$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = (-4\boldsymbol{j})\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

当 $t = 1$s 时　$\boldsymbol{v}_1 = (2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

或将 v_1 的大小表示为 $|\boldsymbol{v}_1| = \sqrt{2^2+(-4)^2}\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 4.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

其方向与 x 轴正方向的夹角为

$$\beta = \arctan\left(-\frac{4}{2}\right) = -71.6°$$

当 $t=1\text{s}$ 时 $\boldsymbol{a}_1 = (-4\boldsymbol{j})\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

(4)两矢量相互垂直时应满足 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$

则

$$[2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})=0$$

$$4t-4t(19-2t^2)=0$$

解得 $t_1=0$, $t_2=3\text{s}$, $t_3=-3\text{s}$(不合题意,舍去)

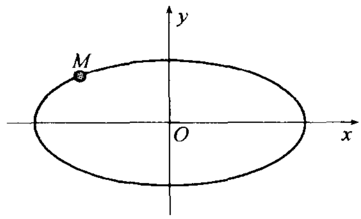
即质点在 $t=0$ 和 $t=3\text{s}$ 时位矢与速度恰好垂直.

1.6 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=A_1\cos\omega t\boldsymbol{i}+A_2\sin\omega t\boldsymbol{j}$(其中 r 以 m 为单位,ω 以 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 为单位,t 以 s 为单位),其中 A_1,A_2,ω 均为正的常量,且 $A_1>A_2$.

(1)试证明质点的运动轨迹为一椭圆;

(2)证明质点的加速度恒指向椭圆中心;

(3)试说明质点在通过图中 M 点时,其速率是增大还是减小.



习题 1.6 图

证明 (1)将运动方程的矢量式写为代数式,即

$$\begin{cases} x = A_1\cos\omega t \\ y = A_2\sin\omega t \end{cases}$$

消去 t 得轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1\text{(椭圆)}$$

(2)

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\omega A_1\sin\omega t\boldsymbol{i}+\omega A_2\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\omega^2A_1\cos\omega t\boldsymbol{i}-\omega^2A_2\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

$$=-\omega^2(A_1\cos\omega t\boldsymbol{i}+A_2\sin\omega t\boldsymbol{j})=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 反向,故 $\boldsymbol{a}$ 恒指向椭圆中心.

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=(-\omega^2A_1\cos\omega t\boldsymbol{i}-\omega^2A_2\sin\omega t\boldsymbol{j})\cdot(-\omega A_1\sin\omega t\boldsymbol{i}+\omega A_2\cos\omega t\boldsymbol{j})$

$=\omega^3\sin\omega t\cos\omega t(A_1^2-A_2^2)$

由题意知,M 点在第二象限,质点在通过图中 M 点时有

$$\sin\omega t>0,\quad \cos\omega t<0,\quad \text{且} A_1>A_2,\quad \omega>0$$

则

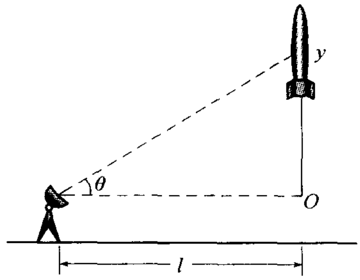
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}<0$$

$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{v}$ 夹角为钝角,表明在 M 点切向加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向与速度$\boldsymbol{v}$ 的方向相反. 所以,质点在通过 M 点时速率会减小.

1.7 雷达与火箭发射台的距离为 l,观测沿竖直方向向上发射的火箭,如习题 1.7 图所示,得到 θ 随时间变化的规律为$\theta=kt$(k 为常数). 试写出火箭的运动方程,并求出当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时,

火箭的速度和加速度.

解 建立如图所示的坐标系,则



习题 1.7 图

$$y = l\tan\theta = l\tan kt$$

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{lk}{\cos^2 kt}$$

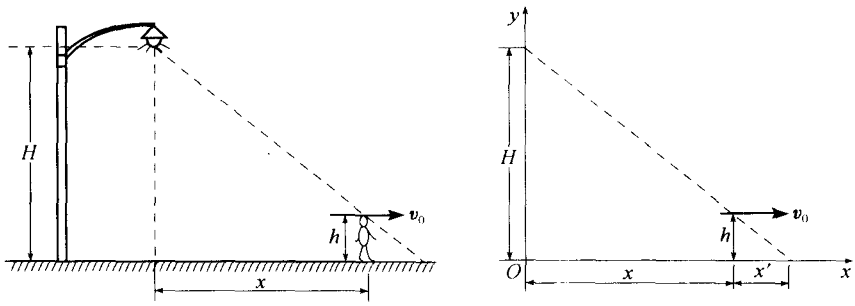
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2lk^2\tan kt \cdot \sec^2 kt$$

当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $v = \frac{4}{3}lk$

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{9}lk^2$$

因此,火箭在匀加速上升.

1.8 路灯离地面高度为 H,一个身高为 h 的人,在灯下水平路面上以 v_0 匀速度步行,如图(a)所示. 试求当人与灯的水平距离为 x 时,他的头顶在地面上的影子移动的速度的大小.



(a) (b)

习题 1.8 图

解 建立如图(b)所示的坐标系,t 时刻头顶影子的坐标为 $x + x'$,设头顶影子的移动速度为 v,则

$$v = \frac{\mathrm{d}(x + x')}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = v_0 + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}$$

由图中可以看出 $$\frac{H}{x + x'} = \frac{h}{x'}$$

则有 $$x' = \frac{hx}{H - h}$$

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{hv_0}{H - h}$$

所以有 $$v = v_0 + \frac{hv_0}{H - h} = \frac{Hv_0}{H - h}$$

1.9 如图所示,长为 l 的细棒,在竖直平面内沿墙角下滑,上端 A 以 v_0 匀速下滑. 试问当下端 B 离墙角距离为 $x(x < l)$ 时,B 端水平速度和加速度多大?

解 建立如图所示的坐标系,设细棒 A 端离地高度为 y,细棒 B 端距坐标原点为 x,则

$$x^2 + y^2 = l^2 \qquad (1)$$

有 $$y = \sqrt{l^2 - x^2}$$

式(1)两边对 t 求导,得

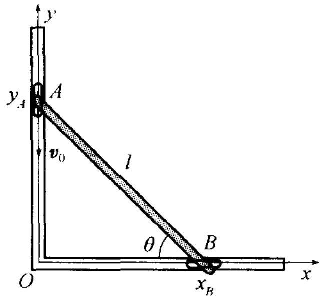
$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

则 B 端水平速度的大小为

$$v_B = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}v_0$$

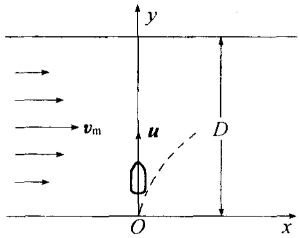
B 端水平加速度的大小为

$$a_B = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}v_0\right) = -\frac{l^2}{x^3}v_0^2$$



习题 1.9 图

1.10 有一条宽度均匀的小河,河道宽为 D,已知河水靠岸边处流速为零,河中心轴线处流速最大为 $\boldsymbol{v}_\mathrm{m}$,河水流速从岸边到中心轴线处按正比增加. 现有一船以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 沿垂直于水流方向离岸驶去,试求此船的运动方程和运动轨迹方程.



习题 1.10 图

解 取河岸为参考系,建立如图所示的坐标系,由题意可知,初始条件为 $t=0$ 时,

$$x_0 = y_0 = 0,\quad v_{0x} = 0,\quad v_{0y} = u \tag{1}$$

由题意可知,当 $y \leqslant \frac{D}{2}$ 时,河水流速可表示为

$$v = ky$$

又当 $y = \frac{D}{2}$ 时,$v = v_\mathrm{m}$,则

$$k = \frac{2v_\mathrm{m}}{D}$$

因此河水流速为 $$v = \frac{2v_\mathrm{m}}{D}y \tag{2}$$

对小船有 $$v_x = v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

结合式(1)和式(2),对式(3)积分,并应用初始条件得

$$x = \frac{uv_\mathrm{m}}{D}t^2$$

$$y = ut$$

这就是小船的运动方程. 对上式消去 t,得

$$x = \frac{v_\mathrm{m}}{uD}y^2$$

这就是小船渡河的运动轨迹方程,形状为抛物线. 这里需要注意的是,上式只适用于小船划至河中心之前,对于后半程小船的轨迹很容易从对称性获得

$$x = \frac{Dv_{\mathrm{m}}}{u} + 2\left(\frac{y}{u} - \frac{y^2}{2uD}\right)v_{\mathrm{m}}$$

1.11 一质点由静止开始作直线运动，初始加速度为 a_0，以后加速度均匀增加，每经过时间 T 增加 a_0，试求经过时间 t 后质点的速度和位置.

解 由题意可知，加速度和时间的关系为

$$a = a_0 + \frac{a_0}{T}t$$

根据直线运动加速度的定义 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，对上式积分，并应用初始条件得

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t = \int_0^t \left(a_0 + \frac{a_0}{T}t\right)\mathrm{d}t = a_0 t + \frac{a_0}{2T}t^2$$

即质点的速度为 $$v = a_0 t + \frac{a_0}{2T}t^2$$

根据直线运动速度的定义式 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，对上式积分，并应用初始条件得

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \left(a_0 t + \frac{a_0}{2T}t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{a_0}{6T}t^3$$

即质点的位置为 $$x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{a_0}{6T}t^3$$

1.12 质点沿 x 轴作直线运动，其速度与坐标的关系为 $v = 1 + 2x$（其中 v 以 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 为单位，x 以 m 为单位），初始时刻质点位于坐标原点，试求该质点的位置、速度、加速度随时间变化的规律.

解 依题意，在直线运动中有

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + 2x$$

改写为 $$\frac{\mathrm{d}x}{1 + 2x} = \mathrm{d}t$$

应用初始条件两端积分，有

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1 + 2x} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

得 $$\frac{1}{2}\ln(1 + 2x) = t$$

$$1 + 2x = \mathrm{e}^{2t}$$

质点的位置为 $$x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1)$$

质点的速度为 $$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{2t}$$

质点的加速度为 $$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\mathrm{e}^{2t}$$

1.13 已知质点沿 x 轴运动，其加速度和坐标的关系为 $a = 2 + 6x^2$（其中 a 以 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 为单位，x 以 m 为单位），且质点在 $x = 0$ 处的速率为 $10\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 试求该质点的速度 v 与坐标 x 的关