高 等 学 校 教 材

随机过程及其在金融领域中的应用

SUIJI GUOCHENG
JIQI ZAI JINRONG LINGYU
ZHONG DE YINGYONG

王军 王娟 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

高等学校教材

随机过程及其在金融领域中的应用

高等学校教材

随机过程及其在金融领域中的应用

王　军　王　娟　编著

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书主要包括两部分内容：一部分是概率空间、随机过程的基本概念、Poisson 过程、更新过程、Markov 链、Brown 运动、鞅、随机微分方程等；另一部分是数理金融学的基本概念和基本知识、金融领域中的数学模型、期权定价理论、Black-Scholes 公式、随机过程的一些理论在金融领域中的应用等。

本书适用于应用数学、金融（金融工程，金融数学等）、管理科学、经济学，以及高等院校高年级学生与研究生的教学，也可供有关专业技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机过程及其在金融领域中的应用/王军，王娟编著．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2007.4

ISBN 978－7－81082－957－1

Ⅰ.随…　Ⅱ.①王…　②王…　Ⅲ.随机过程－应用－金融学－高等学校－教材
Ⅳ.F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 023616 号

责任编辑：黎　丹
出版发行：清 华 大 学 出 版 社　　邮编：100084　　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686414
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　　印张：17　　字数：378 千字
版　　次：2007 年 4 月第 1 版　　2007 年 4 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－81082－957－1/F・217
印　　数：1～4 000 册　　定价：26.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前言

随机过程理论是概率论的重要分支，是一门应用性很强的学科。从 1930 年起，对于随机过程理论的研究不断发展和丰富，特别是近几十年来，随机过程理论及其应用得到了迅速发展。随机过程理论被广泛地应用到物理学、自动控制、电子工程、通信科学、经济学、管理科学及金融学等领域。本书的一个主要目标就是介绍随机过程在金融领域中的应用。为此，本书内容除了包括随机过程的基本概念、基本理论与基本方法外，还着重介绍了布朗（Brown）运动、鞅理论和随机微积分（如伊藤（Ito）积分公式）等与金融相关的随机过程理论。

本书所介绍的随机过程理论主要有：概率空间理论、随机过程的基本概念、Poisson过程、更新过程、离散参数的 Markov 链、连续参数的 Markov 链、Brown 运动、鞅理论、随机积分、随机微分方程等。

在 20 世纪后期，迅速发展起来了一门新兴交叉性学科——数理金融学（Mathematical Finance），它是人们观察、研究与认识金融问题的一种独特方法，它把数学工具与金融问题有机地结合起来，为创造性地研究、解决各种金融问题提供基础与指导。通过数学建模、理论分析、理论推导、数值计算等定量分析，研究和分析金融交易中的各种问题，从而精确地刻画出金融交易过程中的一些行为及其可能的结果；同时研究其相应的预测理论，达到回避金融风险、实现金融交易收益最大化的目的，从而使有关金融交易的决策更加简洁和准确。因此，数理金融学是金融学自身发展而衍生出来的一个新的分支，是数学与金融学相结合而产生的一门新的学科。金融工程就是把数理金融的基本原理和结论工程化、产品化。金融工程学的发展为数理金融不断提出更多、更高的要求，同时数理金融学的发展也不断为金融工程提供新的理论和方法。这门新兴的研究领域发展很快，目前是世界上十分活跃的前沿学科之一。在国际上，这门学科已经有 50 多年的发展历史，数理金融和金融工程中的许多理论得以证明和完善。数理金融的迅速发展，带动了现代金融市场的金融产品不断快速创新，使得金融交易的范围和层次更加丰富和多样性。由于数理金融和金融工程所研究的金融现象具有很强的不确定性，因此随机过程等理论被广泛地应用到金融问题的研究中。本书将在这一方面进行相关的介绍，其中主要包含：数理金融学的基本概念和基本知识，金融领域中的数学模型，利率，随

机游动与期权定价，期权定价理论，Black-Scholes 公式，资产组合与投资组合，随机过程的一些理论在金融领域中的应用等。

本书包含一定数量的习题并附有答案，读者需要具备概率论、微积分、线性代数与一些简单的金融知识。

编者感谢北京交通大学理学院对此项工作给予的支持，感谢国家自然科学基金 70471001 的资助，并感谢北京交通大学金融数学与金融工程研究所的师生们在本书编写过程中给予的支持和帮助。

编　者

2007 年 2 月

目　　录

第 1 章

金融领域中的数学模型

本章将简单地介绍根据一些金融现象和问题所构造的部分数学模型，这些数学模型将在本书的后续章节中加以具体研究和讨论. 希望通过对这些模型的简单介绍，能够使读者对金融理论与数学之间的联系有一些初步的认识和了解.

在证券市场(security market)中，证券投资者往往通过一切可行的分析方法和分析手段，对证券价格(price)的走势进行预测和分析. 例如，投资者在对股票(stock)进行投资时，希望能预测股票价格未来的走势，以期获取最大利益. 然而，根据历史的经验来看，能够对股票价格走势进行准确分析和预测的例子是少而又少. 于是，不禁要问，对股票价格波动的预测是否可能？随着人们对金融理论认识的不断深入，以及计算机科学的应用和情报信息处理的不断完善，希望在不久的将来，人们可以在一定范围和程度上正确地解析和预测股票价格的走势. 但就目前而言，人们还无法完全预测股价的波动情况，股价的变动具有一定的随机性. 基于这种情形，将概率论和随机过程理论引入到金融理论的研究中，对金融投资、金融管理和股票价格等金融问题进行相应的数学模型构造，并对这些数学模型进行分析和研究，以期达到对金融问题的理解和研究.

1.1 债券和利率

投资者在谈论股票和债券(bond)问题时，更关注其收益率(rate of return)情况. 考虑某一债券，假设现时刻用 Q_0 元(人民币元)在证券公司买进此债券，在满期(maturity)时取回 Q_1 元($Q_1>Q_0$)，设满期期间(time to maturity)为 1 年，则此债券的收益率(年利)为

$$r=\frac{Q_1-Q_0}{Q_0} \tag{1-1}$$

对于股票，同样可以定义类似的年收益率的概念. 但股票与债券最大的差别在于，1 年后债券的年收益率 r 在现时刻购买债券时已经确定，而 1 年后股票的年收益率要依

赖当时股票的价格，即现时刻购买股票时无法确定年收益率. 众所周知，股票的价格波动依赖于多方因素，如此股票公司所处的行业是否景气、整体社会经济发展的状况、公司本身经营的好坏及政治环境和经济环境等因素. 因此，从现时刻来看，1 年后股票的收益率是无法预先确定的，它具有随机性. 基于这种情况，用概率的方法建立相应的数学模型，用此模型讨论 1 年后股票的收益率.

【例 1－1】（二项式模型） 设某股票现在的价格为 S_0，1 年后股票的价格 S_1 有两种可能的取值：或者以概率 p 从 S_0 增加至 uS_0，或者以概率$(1-p)$减少至 dS_0，即

$$S_0 \begin{array}{l} \nearrow uS_0, \text{以概率 } p \\ \searrow dS_0, \text{以概率} (1-p) \end{array} \tag{1-2}$$

式中，$u>r+1>d>0$，u，d 为非负常数，r 为债券年收益率，且 $r>0$.

根据例 1－1 所构造的数学模型，如果股票价格以概率 p 走高，则 1 年后股票的收益率为$(u-1)$，比债券的收益率 r 要高；相反地，如果股票价格以概率$(1-p)$走低，则 1 年后的收益率为$(d-1)$，比债券的收益率低. 由此可以看出，债券是无风险的安全资产，而股票是有风险资产. 由于例 1－1 的模型中具有随机性，因此希望讨论其期望收益率(mean rate of return)及分散程度(方差).

【例 1－2】 对于例 1－1 所建立的模型，计算股票年收益率的数学期望 μ(期望收益率)和方差 σ^2，以及标准方差 σ.

解 由数学期望的定义，期望收益率 μ 为

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{uS_0-S_0}{S_0}p+\frac{dS_0-S_0}{S_0}(1-p) \\ &= (u-1)p+(d-1)(1-p) \end{aligned}$$

收益率的方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (u-1)^2p+(d-1)^2(1-p)-\mu^2 \\ &= (u-d)^2p(1-p) \end{aligned}$$

标准方差为

$$\sigma=(u-d)\sqrt{p(1-p)} \tag{1-3}$$

式(1－3)中收益率的标准方差 σ 又称为**波动率**(volatility)，它表达了股票价格波动的程度.

债券的利率(interest rate)是满期后债券的收益率. 类似地，银行储蓄也有相应的利率，通常指年利率. 假设某储蓄者将本金(principal)Q 元存入银行，如果年利率为 r，

则 1 年后存款余额将成为

$$Q+rQ=(1+r)Q$$

即本金与利息(interest)之和，利息等于本金乘以利率，即 rQ. 若在 1 年结束时，该储蓄者将连本带息 $(1+r)Q$ 再次存款 1 年(或自动转存 1 年)，则 2 年后存款余额为

$$(1+r)Q+r(1+r)Q=(1+r)(1+r)Q=(1+r)^2Q$$

依此类推，可以得到 n 年后的存款余额为 $(1+r)^nQ$. 这种计利方式称为复利(compound)方式. 而且，当 n 充分大时，有

$$(1+r)^n\approx e^{nr} \tag{1-4}$$

如果将 1 年时间 n 等分，把 $\frac{1}{n}$ 年看成一个投资周(或储蓄周期)，每周期的利率为 $\frac{r}{n}$，类似前面的讨论，1 年后的投资回报为 $\left(1+\frac{r}{n}\right)^nQ$. 如果将时间分割无限扩大，即 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^nQ=e^rQ \tag{1-5}$$

此极限称为连续复利(continuous compounding). 如果考虑 t 年后(t 为正实数)的投资回报，则把 $\frac{t}{n}$ 年看成一个投资周期，当 n 充分大时，每周期的利率为 $\frac{t}{n}r$，于是 t 年后的投资回报为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{tr}{n}\right)^nQ=e^{rt}Q \tag{1-6}$$

式(1-6)是式(1-5)的一般连续复利形式.

【例 1-3】 设某投资者将资金投入到一个以每年计息一次，复合利率为 r 的账户中，多少年后投资者的资金将变成原来的 1.5 倍?

解 设初始投入资金为 Q 元，则由题意和公式(1-4)，有

$$Q(1+r)^n=1.5Q \quad 且 \quad (1+r)^n\approx e^{nr}$$

所以，近似地有

$$e^{nr}\approx 1.5$$

即所需年数大约为

$$n\approx\frac{\ln 1.5}{r}=\frac{0.405}{r}$$

假设年利率 $r=0.02$，则需要大约 20.3 年资金将变成原来的 1.5 倍.

【例 1-4】 设某投资者将资金 Q 元投资一年，年利率为 $r=0.03$，如果银行按每年计息一次来计算利息或银行按连续复利来计算利息，两种计算方法有什么不同?

解 设初始投入资金为 Q 元，则由定义

$$\text{银行按每年计息一次的利率}=r=0.03$$

$$\text{银行按连续复利的利率}=\frac{Qe^{r}-Q}{Q}=e^{0.03}-1\approx 0.030\ 45$$

由此可以看出，如果银行按连续复利来计算利息，则实际支付的利息总额要比以单利利率 r 支付的多. 假设银行按连续复利来计算利息，则此时利率 r 称为**名义利率**(nominal interest rate)，而实际利率

$$r_{\text{eff}}=\frac{\text{一年本金与利息之和}-Q}{Q}$$

称为**有效利率**(effective interest rate). 为了使问题简单化，在后续的内容中主要涉及利率，而不具体声明为何种利率.

在上面的讨论中，假设年利率 r 是固定值，每年都不改变. 但是在现实中，年利率 r 是经常变化的，对于这种复杂情况，可以用利率 $r(t)$ 来替换式(1-5)中的年利率 r，利率 $r(t)$ 又称为瞬间利率. 利率 $r(t)$ 的走势(与股票价格相同)是不可预知的，当投资者判断 $r(t)$ 未来下降时，现时刻将购入利率高的债券；相反地，当投资者判断 $r(t)$ 未来上升时，现时刻将卖掉手中的债券. 债券和利率的研究是数理金融学中的重要组成部分之一.

1.2 证券市场和股票的波动

初看起来，图 1-1、图 1-2 和图 1-3 上的曲线很类似，而实际上它们存在很大差别. 图 1-1 是通过 Mathematica 模拟进行 400 步而产生的简单随机游动(simple random walk)图；图 1-2 和图 1-3 分别是中国上海证券交易所上海综合指数一年(2005 年)走势图和中国石化股票一年(2005 年)走势图，并且图 1-1、图 1-2 和图 1-3 的走势是完全不一致的. 人们希望利用数学工具和图形对股市指数的波动进行研究和模拟，用以预测股价的走势. 但是，与此同时又应该看到此项工作的困难性和复杂性.

设 X_1，$X_2\cdots$，是独立同分布随机序列，且 $P(X_i=1)=\frac{1}{2}$，$P(X_i=-1)=\frac{1}{2}$，$i=1, 2, \cdots$. 令

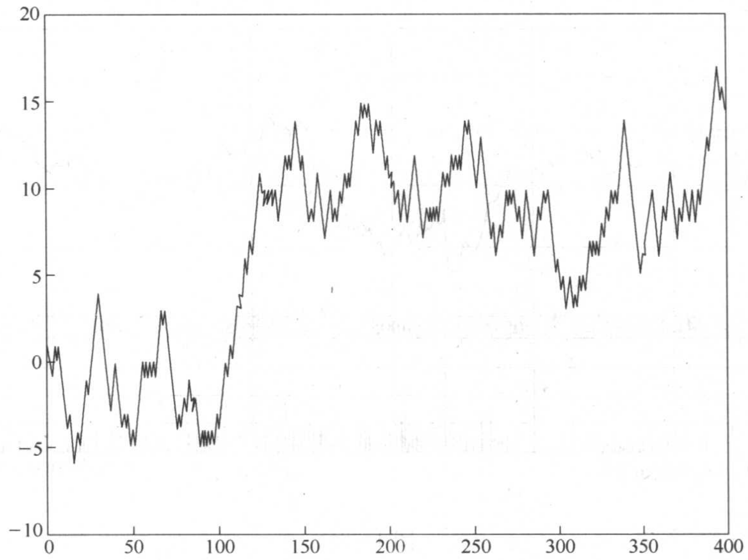

图 1－1

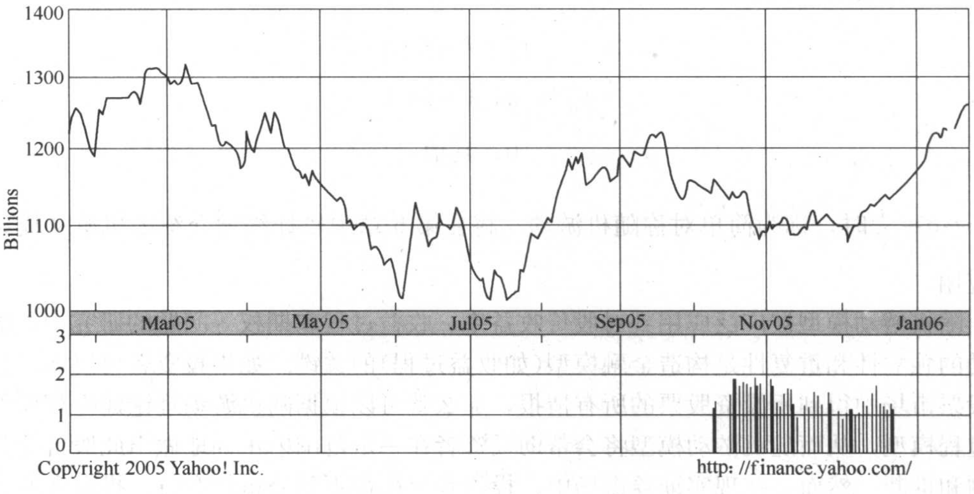

图 1－2

$$Y_0=0,\ Y_1=X_1,\ \cdots,\ Y_n=X_1+\cdots+X_n$$

则$\{Y_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$称为一维(直线上)简单对称随机游动过程. 直线上的随机游动是离散参数 Markov 链，考虑在直线整数点上运动的粒子，当它处于位置 j 时，向右

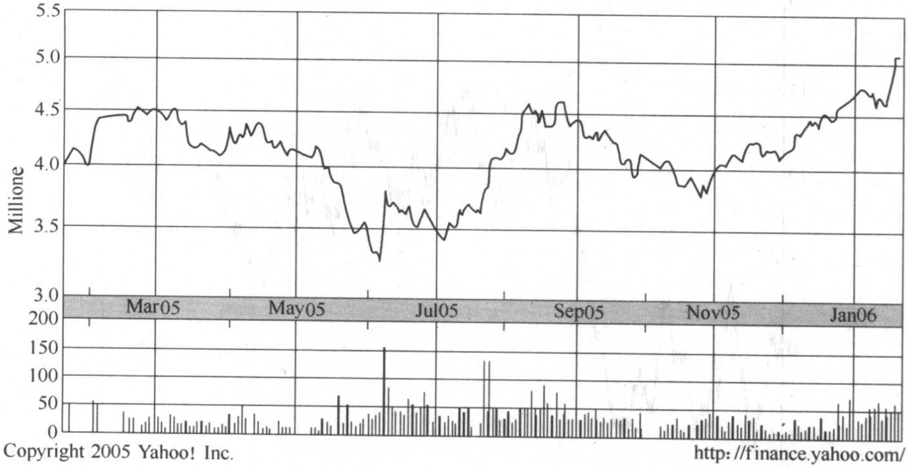

图 1－3

移动到 $j+1$ 的概率为 p，而向左移动到 $j-1$ 的概率为 $q=1-p$，又设时刻 0 时粒子处在原点，即 $Y_0=0$. 于是粒子在时刻 n 所处的位置$\{Y_n\}$就是一个 Markov 链，称为随机游动，且具有转移概率

$$p_{jk}=\begin{cases}p, & k=j+1\\ q, & k=j-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $p=q=\frac{1}{2}$时，称为简单对称随机游动. 将在第 5 章中较详细地介绍随机游动模型及其应用.

随机游动模型被广泛应用到对股价收益率、收益过程和期权等问题的研究中，随机游动的独立性和重复性是构造金融模型(如收益过程)的关键. 如果投资者可以在一公平的股票市场中得到所投资股票的所有情报，那么就可以根据随机游动理论建立相应的收益过程模型，从而随机游动模型将会帮助投资者在一定范围内正确地做出此股价走势的预测和推断. 然而，在现实证券市场中，投资者往往得不到公正的对待，投资者所得到的信息和数据通常是不完整且有误的，基于这些信息和数据所构造出的金融模型(数学模型)自然无法正确地反映股票价格的走势和波动. 虽然如此，很多专业人士仍对随机游动模型在金融领域中的作用给予肯定，它是研究金融问题的重要手段之一. 随机游动也是随机过程理论的内容之一，将在后面的章节中逐步介绍随机过程理论在金融领域中的应用.

1.3 资产组合

设某市场有 n 个证券，证券通常包含债券、股票、公债和其他金融衍生产品. 给每个证券施以编号，记为 $i(i=1, 2, \cdots, n)$. 若某投资者的资金为 Q 元，那他将如何进行投资呢? 是将全部资金投资在某一证券上? 还是分散投资到不同的证券呢? 为了简单起见，假设该市场不允许进行卖空(short sale)操作. 所谓卖空，是指投资者虽不具有某种证券，但他从证券市场中借到一定数量的该种证券，并在市场中卖出. 当然，日后此投资者必须归还所借到的证券及获得的股利(dividend). 用 ω_i 表示对证券 i 的投资比率，由于不允许卖空，所以有 $\omega_i \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i = 1$，投资者对证券 i 的投资额为 $\omega_i Q$ 元. 比率向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 称为资产组合.

在 t 时刻，若证券 i 的价格为 $S_i(t)$，则投资者可买入该证券 $\omega_i \dfrac{Q}{S_i(t)}$ 股(这里假设证券的单位是可以无限分割的，即投资者可持有 0.36 股或 135.6 股等). 如果用 $S_i(t+1)$ 表示证券 i 下一时刻的价格，则此资产组合 $\boldsymbol{\omega}$ 从 t 时刻到 $t+1$ 时刻所获得的利益为

$$\sum_{i=1}^{n}(S_i(t+1)-S_i(t))\frac{\omega_i Q}{S_i(t)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i(t+1)-S_i(t)}{S_i(t)}\right)\omega_i Q$$

因此，此资产组合的收益率 $r(t)$ 为

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{r_i(t)\omega_i Q}{Q} = \sum_{i=1}^{n}r_i(t)\omega_i \tag{1-7}$$

式中，$r_i(t)=\dfrac{S_i(t+1)-S_i(t)}{S_i(t)}$，它表示证券 i 从 t 时刻到 $t+1$ 时刻的收益率.

合理的投资策略应该是将资金分散投资，以使自己资产组合的收益率最大化. 马尔科维茨模型(Markowitz model)就是在假定证券收益率服从多元正态分布的条件下，对单周期资产组合进行分析和研究.

假设市场上仅有 n 种风险证券或资产(即不存在无风险资产)，X_i 是证券 i 单周期的收益率(X_i 是随机变量)，则证券 i 的期望收益率为 $\mu_i=EX_i$，收益率向量和期望收益率向量分别记为

$$X=(X_1, X_2, \cdots, X_n), \quad \mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

收益率的方差和协方差分别为

$$\sigma_{ii}=\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-(EX_i)^2$$

$$\sigma_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)$$

$$i=1, 2, \cdots, n, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

其对应的协方差矩阵(variance-covariance matrix)记为

$$\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$$

如果$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$为资产组合向量，则期望收益率(总收益率)为(见式1-7)

$$\mu=E(\sum_{i=1}^{n}X_i\omega_i)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mu_i$$

收益率的方差(总风险)为

$$\begin{aligned}\sigma^2&=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\omega_i\right)^2\right]-\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\omega_i\right)\right]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\sigma_{ij}\omega_j\\&=\omega\boldsymbol{\Sigma}\omega'\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}'=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)'$是向量$\boldsymbol{\omega}$的转置.

上面介绍了单周期资产组合模型. 更一般地，考虑多周期资产组合模型，即每周期结束时连本带利进行新的再投资. 为了使问题简单化，假设市场是一个理想的证券市场——**无摩擦市场**(frictionless markets)，即资本市场无任何交易成本、税收，无卖空限制(允许卖空操作)，资产数量单位无限可分. 设$\Lambda=\{0, 1, \cdots, T\}$为离散的时间集合，投资者的单位原始资金为1，市场中有n种证券，第0周期投资的资产组合为

$$\boldsymbol{\omega}_0=(\omega_{01}, \omega_{02}, \cdots, \omega_{0n})$$

当其中某$\omega_{0i}<0(1\leqslant i\leqslant n)$时，它表示证券$i$处于卖空的状态. 到第0个周期结束时投资者连本带利得到

$$\boldsymbol{\omega}_0\boldsymbol{Y}_0'=\sum_{i=1}^{n}\omega_{0i}Y_{0i} \tag{1-8}$$

式中，$\boldsymbol{Y}_0=(Y_{01}, Y_{02}, \cdots, Y_{0n})$为该周期的投资收益向量，$\boldsymbol{Y}_0'$为$\boldsymbol{Y}_0$的转置，其中$Y_{0i}$表示单位资金投资于第$i$种证券，经过单位时间后本金加上股利等的总和关于本金的百分比，在投资中期，也可以把期末的价格与初期的价格比作为投资收益. 在这里假设每个投资周期结束后，投资者既不增加资金也不减少资金，而是把这些资金再以新的资产组合方式继续投资，即不允许资金的流出和流入，也就是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_{(t-1)i}S_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\omega_{ti}S_i(t), \quad t=1,2,\cdots,T \tag{1-9}$$