实变函数解题指南

北京大学数学科学学院
周民强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

实变函数解题指南

北京大学数学科学学院
周民强　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变函数解题指南/周民强编著. —北京:北京大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-301-12116-0

Ⅰ.实… Ⅱ.周… Ⅲ.实变函数-高等学校-解题
Ⅳ.O174.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 063855 号

书　　名:实变函数解题指南
著作责任者:周民强　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-12116-0/O·0718
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　电子邮箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者:世界知识印刷厂
经 销 者:新华书店
890 mm×1240 mm　A5　13.875 印张　420 千字
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:23.00 元

内容简介

本书是实变函数课程的学习辅导用书，其内容是在作者编写的普通高等教育“九五”教育部重点教材《实变函数论》(北京大学出版社，2001 年)的基础上添加新题目后整理而成. 全书共分六章，内容包括：集合与点集，Lebesgue 测度，可测函数，Lebesgue 积分，微分与不定积分，L^p 空间等.

周民强教授主讲实变函数课程数十年，深谙其中的脉络以及初学者的疑难与困惑. 多年的教学经验使作者认识到：要使学生学好实变函数课，除了要有一本好教材外，还应有恰当的解题指南类书籍给予配合，才能提高教学质量，达到好的教学效果. 对此，作者在两个方面对本书的选题与命题下了功夫：一是密切结合基本理论与方法；二是覆盖面广、放大题量，以拓广视野，开阔思路. 此外，从难易角度看，书中编有初、中、高三种程度的各类习题，读者应根据教与学的实际情况作出取舍.

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系数学、应用数学专业学生的学习辅导书，对从事实变函数教学工作的青年教师，本书是一部极好的教学参考用书；本书也为立志要进一步学习调和分析的读者提供了一个坚实的台阶.

作者简介

周民强 北京大学数学科学学院教授，1956年大学毕业，从事调和分析（实变方法）的研究工作，并担任数学分析、实变函数、泛函分析、调和分析等课程的教学工作四十余年，具有丰富的教学经验。出版教材和译著多部。出版的教材有《数学分析》、《实变函数》、《实变函数论》（普通高等教育"九五"教育部重点教材）、《调和分析讲义》、《数学分析习题演练》。多次获得北京大学教学优秀奖和教学成果奖。曾任北京大学数学系函数论教研室主任，《数学学报》、《数学通报》编委、北京市自学考试命题委员等职。

写在前面

实变函数是各大专院校数学系(包括应用数学系、力学系、概率统计系等)的高年级基础课程,其核心内容是测度和积分理论,这是近代分析数学领域的必备知识.

实变函数论是数学分析的深化和扩展,是在更广的背景下来研讨微积分课题.例如,它把界定在区间上的经典(Riemann)积分开拓到可测集上,积分的对象也扩大到定义在可测集上的可测函数类.这样,集合论自然就是实变函数的精神支柱,而恰当地分解、合成一个集合成了解决问题的有效手段.因此,与数学分析相比,作为后继课的实变函数论在学习上呈现出一个飞跃,初学者在这里遇到了与前不同的困境,尤其是在做题方面.这是完全可以理解的.在一定意义上说也是正常的(虽然原因是多方面的).

拙著《实变函数论》(北京大学出版社,2001)在撰写过程中也曾尽力设法去降低学生学习实变函数课程的难度,例如在书中多举例证,分层次编习题等.但由于这一课程本身所具有的特殊性,多年来,仍有不少读者希望看到有题解加以参考.对此,在北京大学出版社的大力支持下,这本《实变函数解题指南》面世了.当然,这里要强调的是:读者阅读本书只是为了开阔思路,自己动手做练习才是学习数学的最基本途径.

编入本书的习题量很大,鉴于作者的水平有限,对于在选题过程中出现的疏忽和误解之处,欢迎读者批评指正.

作　者

2007年2月

目　录

第一章 集合与点集

§1.1 集 合

1.1.1 集合的概念与运算

基 本 内 容

(一) 集合概念的描述

把具有某种性质或满足一定条件的所有事物或对象视为一个整体，这一整体就称为**集合**，而这些事物或对象就称为属于该集合的**元素**. 一般地说，集合的符号用英文大写字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 等来表示，集合的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 等来表示. 例如：自然数(正整数)全体形成的集合记为 $\mathbf{N}$，有理数全体形成的集合记为 $\mathbf{Q}$，实数全体记为 $\mathbf{R}^1$，整数全体记为 $\mathbf{Z}$.

设 A 是一个集合. a 是 A 的元素记为 $a\in A$，a 不是 A 的元素记为 $a\overline{\in} A$. 为了明确表征一个集合是由哪些元素构成的，它有两种表述方法：

(i) 列举法. 例如集合 E 是由数字 $1,2,3,4,5$ 构成的，记为 $E=\{1,2,3,4,5\}$.

(ii) 描述法. 例如 $E=\{x\in\mathbf{R}^1: x<6\}$ 表示集合 E 是由小于 6 的一切实数构成的.

定义 1 设有集合 A 与 B. 若 $x\in A$，则 $x\in B$. 此时称 A 是 B 的**子集**(合)，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，也称为 A 含于 B 或 B **包含** A. 显然，$A\subset A$. 若 $A\subset B$，且存在 B 的元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**.

为了论述与运算的方便，我们还指定一种所谓**空集**，它是不包含任何元素的集合，记为 $\varnothing$. 空集 $\varnothing$ 是任一集合的子集.

定义 2 设 A,B 是两个集合. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B **相等**或**相同**，记为 $A=B$. A 与 B 相等就是 A 与 B 的元素完全相同，即 A 与 B 是同一个集合.

定义 3 设 I 是给定的一个集合，对于每一个 $\alpha\in I$，我们指定一个集合 A_α. 这样我们就得到许多集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha: \alpha\in I\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 这里的 I 常称为指标集. 当 $I=\mathbf{N}$ 时，集合族也称为集合列，简记为 $\{A_i\}$ 或 $\{A_k\}$ 等等.

(二) 集合的运算

集合的分解与合成是探讨各集合之间相互关系以及组成新集合的一种有效手段,从而使集合论方法在实变函数论中获得重要的应用. 甚至可以这么说: 实变函数论中的许多命题的解决,关键在于能否将一个集合作出满足要求的具有特定性质的子集合的分解. 一般的分解与合成可以通过各种集合之间的所谓运算来表达.

1. 并与交(集)

定义 4 设 A,B 是两个集合,称集合 $\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$,即由 A 与 B 的全部元素构成的集合.

为直观起见,现用图形来示意集合运算构成的新集合,称为 Venn 图. $A\cup B$ 见图 1.1.

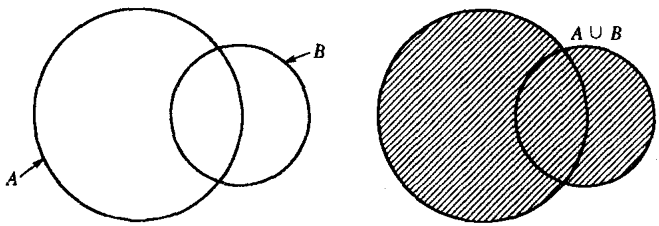

图 1.1

定义 5 设 A,B 是两个集合,称集合 $\{x: x\in A, x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$,即由 A 与 B 的公共元素构成的集合(见图 1.2). 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B **互不相交**.

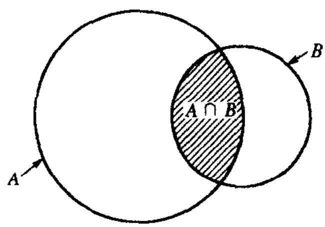

图 1.2

定理 1 设有集合 A,B 与 C,我们有

(i) 交换律:

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(iii) 分配律：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

类似地，可以定义多个集合的并集与交集.设有集合族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，我们定义其并集与交集如下：

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x：存在\ \alpha\in I, x\in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x：对一切\ \alpha\in I, x\in A_\alpha\}.$$

此外，前述之交换律与结合律仍适用于任意多个集合的情形：

(i) $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$；

(ii) $A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

2. 差与补(集)

定义 6 设 A,B 是两个集合，称$\{x：x\in A, x\overline{\in} B\}$为 A 与 B 的**差集**，记为$A\backslash B$(读做 A 减 B)，即由在 A 集合中而不在 B 集合中的一切元素构成的集合(见图 1.3).

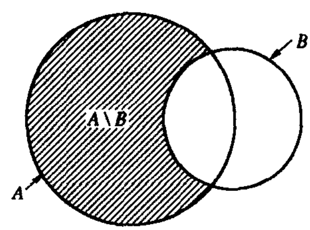

图 1.3

在上述定义中，当 B 是 A 的子集时，称$A\backslash B$为集合 B 相对于 A 的**补集**或**余集**.通常，在我们讨论问题的范围内，所涉及的集合总是某个给定的"大"集合 X 的子集，我们称 X 为**全集**.此时，集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集，并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$.即

$$B^c = X\backslash B.$$

今后，凡没有明显标出全集 X 时，都表示取补集运算的全集 X 预先已知，而所讨论的一切集合皆为其子集.于是 B^c 也简记为

$$B^c = \{x \in X：x\overline{\in} B\}.$$

显然，我们有下列简单事实：

(i) $A\cup A^c=X$，$A\cap A^c=\varnothing$，$(A^c)^c=A$，$X^c=\varnothing$，$\varnothing^c=X$；

(ii) $A\backslash B=A\cap B^c$；

(iii) 若 $A\supset B$，则 $A^c\subset B^c$；若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^c$.

特别地，我们有下述两个重要法则：

定理 2 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$;　　(ii) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

定义 7　设 A,B 为两个集合，称集合 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**，记为 $A\triangle B$. 这是由既属于 A,B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合（见图 1.4）.

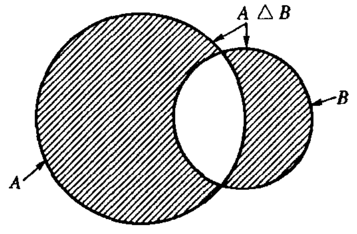

图　1.4

由定义立即可知 $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\triangle B)$. 因此，对称差集是表示并集中除公共元素以外的部分. 显然，我们有下列简单事实：

(i) $A\triangle\varnothing=A, A\triangle A=\varnothing, A\triangle A^c=X, A\triangle X=A^c$;

(ii) 交换律：$A\triangle B=B\triangle A$;

(iii) 结合律：$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$;

(iv) 交与对称差满足分配律：$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;

(v) $A^c\triangle B^c=A\triangle B$;

(vi) 对任意的集合 A 与 B，存在唯一的集合 E，使得 $E\triangle A=B$，实际上 $E=B\triangle A$.

3. 集合列的极限(集)

定义 8　设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**. 此时我们称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$；若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**，此时我们称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

定义 9　设 $\{A_k\}$ 是一集合列，令

$$B_j=\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k\quad(j=1,2,\cdots),$$

显然有 $B_j\supset B_{j+1}(j=1,2,\cdots)$，我们称

$$\lim_{j\to\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列$\{A_k\}$的**上极限集**,简称为**上限集**,记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地,称集合$\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$为集合列$\{A_k\}$的**下极限集**,记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k,$$

简称为**下限集**. 若上、下限集相等,则说$\{A_k\}$的极限集存在并等于上限集或下限集,记为$\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

对于上、下限集的运算,易知下述事实成立:

(i) $E\setminus\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$;　　(ii) $E\setminus\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$;

(iii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\cup\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n$;

(iv) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\cap\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n$.

定理 3　若$\{A_k\}$为一集合列,则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k=\{x$: 对任一自然数$j$,存在$k(k\geqslant j)$,$x\in A_k\}$;

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k=\{x$: 存在自然数$j_0$,当$k\geqslant j_0$时,$x\in A_k\}$.

这就是说,$\{A_k\}$的上限集是由属于$\{A_k\}$中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$的下限集是由只不属于$\{A_k\}$中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

4. **集合的直积**

定义 10　设X,Y是两个集合,称一切有序"元素对"(x,y)(其中$x\in X,y\in Y$)形成的集合为X与Y的**直积集**,记为$X\times Y$:

$$X\times Y=\{(x,y):\ x\in X,y\in Y\},$$

其中$(x,y)=(x',y')$是指$x=x',y=y'$,$X\times X$也记为X^2.

典型例题精解

例 1　解答下列问题:

(1) 给定集合A,B,C,试给出由下述指定元素全体形成的集合的表示式.

(i) 至少属于三者之中的两个集合的元素.

(ii) 属于三者之中的两个而不属于三个集合的元素.

(iii) 属于三者之中的一个而不属另外两个集合的元素.

(2) 设 r,s,t 是三个互不相同的复数,且令

$$A=\{r,s,t\},\quad B=\{r^2,s^2,t^2\},\quad C=\{rs,st,rt\}.$$

若有 $A=B=C$,试求 r,s,t.

解 (1) (i) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合中的元素全体形成的集合.

(ii) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\triangle B\triangle C)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合但不属于三个集合的元素全体形成的集合.

(iii) $(A\triangle B\triangle C)\setminus(A\cap B\cap C)$表示属于 A,B 与 C 中的一个集合但不属于另外两个集合的元素全体形成的集合.

(2) 因为集合相等就是其元素相同,所以将每个集合中的全部元素作数值和,所得到的三个数应该相等,若令其和为 K,则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+rt=K.$$

从而得到

$$\begin{aligned}K^2&=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+rt)\\&=3K,\end{aligned}$$

即 $K=3$ 或 0. 又从数值的乘积看,同理有

$$rst=r^2s^2t^2,$$

故知 $rst=1$. 于是在 $K=3$ 时,可知 r,s,t 为方程

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

的根,亦即$(x-1)^3=0$之根. 但此时有 $r=s=t=1$,不合题意. 这说明 $K=0$,此时 r,s,t 为方程

$$x^3-1=0$$

的根,即 $x=1$ 以及 $x=(-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i})/2$.

例 2 试证明下列命题:

(1) 设 A,B 是全集 X 中的子集.

(i) 等式 $B=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A)$成立当且仅当 $B^c=X$.

(ii) 若对任意的 $E\subset X$,有 $E\cap A=E\cup B$,则 $A=X,B=\varnothing$.

(2) 设 Γ 是集合 X 中某些非空子集合形成的集合族. 若 Γ 对运算 $\triangle,\cap$ 是封闭的(即若 $A,B\in\Gamma$,则 $A\triangle B\in\Gamma$,$A\cap B\in\Gamma$,也说 Γ 是一个

环),则 Γ 对运算 $\cup$, $\backslash$ 也封闭.

(3) 设有集合 A,B,E,F.

(i) 若 $A\cup B=F\cup E$,且 $A\cap F=\varnothing$, $B\cap E=\varnothing$,则 $A=E$ 且 $B=F$.

(ii) 若 $A\cup B=F\cup E$,令 $A_1=A\cap E$, $A_2=A\cap F$,则 $A_1\cup A_2=A$.

(4) $(A\cup B\cup C)\backslash(A\cap B\cap C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

证明 (1) (i) 注意等式

$$\begin{aligned}X^c&=(X\cap(A\cup A^c))^c=((X\cap A)\cup(X\cap A^c))^c\\&=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A).\end{aligned}$$

(ii) 取 $E=X$,则由题设知 $A=X$;又取 $E=A^c$,则由题设知 $\varnothing=A^c\cap A=A^c\cup B=\varnothing\cup B$,即 $B=\varnothing$.

(2) 注意等式

$$A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B),\quad A\backslash B=(A\triangle B)\cap A.$$

(3) (i) 由于 $A\cap F=\varnothing$,故从 $A\cup B=F\cup E$ 可知, $A\subset E$ 且 $E\subset A$,即 $A=E$. 同理可得 $B=F$.

(ii) 我们有

$$\begin{aligned}A_1\cup A_2&=(A\cap E)\cup(A\cap F)=A\cap(E\cup F)\\&=A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A.\end{aligned}$$

(4) 应用集合运算性质,我们得到

$$\begin{aligned}&(A\cup B\cup C)\backslash(A\cap B\cap C)\\&=(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)^c\\&=(A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)\\&=A^c\cap(A\cup B\cup C)\cup(A\cup B\cup C)\cap B^c\\&\quad\cup(A\cup B\cup C)\cap C^c\\&=(A^c\cap B)\cup(A^c\cap C)\cup(A\cap B^c)\cup(C\cap B^c)\\&\quad\cup(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)\\&=[(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)]\cup[(A^c\cap C)\cup(A\cap C^c)]\\&\quad\cup[(C\cap B^c)\cup(B\cap C^c)]\\&=[(B\backslash A)\cup(A\backslash B)]\cup[(C\backslash A)\cup(A\backslash C)]\\&\quad\cup[(C\backslash B)\cup(B\backslash C)]\\&=(A\triangle B)\cup(A\triangle C)\cup(B\triangle C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C).\end{aligned}$$

（见§2.2 例 2 之(2)中的证明）

例 3 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$，$g(x)$是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的非负实值函数，令

$$E_f = \{(x,y):\ x\in\mathbf{R}^1, 0\leqslant y\leqslant f(x)\},$$

$$E_g = \{(x,y):\ x\in\mathbf{R}^1, 0\leqslant y\leqslant g(x)\},$$

试作函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，使得

$$E_\varphi = E_f\cup E_g,\quad E_\psi = E_f\cap E_g.$$

(2) 记 $E_\alpha = \{(x,y):\ 0<x<\infty, y=x^{-\alpha}\}$，试求集合 $\bigcap\limits_{\alpha\geqslant 1}E_\alpha$，$\bigcup\limits_{\alpha\geqslant 1}E_\alpha$ 的表达式.

解 (1) 略.

(2) $\bigcap\limits_{\alpha\geqslant 1}E_\alpha$ 是平面上点(1,1)，而

$$\bigcup_{\alpha\geqslant 1}E_\alpha = \{(x,y):\ 0<x<1, y\geqslant x^{-1}\}\cup(1,1)$$

$$\cup\{(x,y):\ 1<x<\infty, 0<y\leqslant x^{-1}\}.$$

例 4 试证明下列命题：

(1) 设有集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$，其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant 10)$是一个两位数，则存在分解 $A=B\cup C$ 满足：$B\cap C=\varnothing$，使得 B 中所有元素的数值和与 C 中所有元素的数值和相等.

(2) 设 E 是由 n 个元素形成的集合. $E_1,E_2,\cdots,E_{n+1}$是 E 的非空子集，则存在 r,s 个不同指标：

$$i_1,i_2,\cdots,i_r;\quad j_1,j_2,\cdots,j_s,$$

使得 $E_{i_1}\cup\cdots\cup E_{i_r}=E_{j_1}\cup\cdots\cup E_{j_s}$.

(3) 设 E 是由某些有理数形成的集合，且满足

(i) 若 $a\in E$，$b\in E$，则 $a+b\in E$，$ab\in E$；

(ii) 对任一有理数 r，恰有下述关系之一成立：

$$r\in E,\quad -r\in E,\quad r=0,$$

则 E 是全体正有理数形成的数集.

证明 (1) 作 A 的一切子集，易知它们共有 $2^{10}=1024$ 个. 因为每个子集的全部元素之数值和必小于 $10\times 100=1000$，所以必有两个子集其元素之数值和相同. 从而再将其中公共元素舍去后，分别记为 B，

C,即得所证.

(2) 从 $E_1,E_2,\cdots,E_{n+1}$ 中任取若干个作其并集,易知可作出 $2^{n+1}-1$ 个并集. 注意到 E 中仅有 2^n-1 个非空子集,故这些并集不可能全不相同. 因此,从其中取两个相同的并集且舍去其中全同的 E_k.

(3) 若 $r\neq0$,则由(ii)可知 $r\in E$ 或 $-r\in E$. 因为 $r^2=(-r)^2$,所以 $r^2\in E$,特别有 $1\in E$. 从而根据(i),每个正整数都属于 E.

若 m,n 是正整数,则根据上述推理又知,$1/n^2\in E$. 从而可知 $m/n=mn\times(1/n^2)\in E$. 证毕.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, $B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$,则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

(2) 设 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, $B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots\supset\cdots$,则

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n).$$

(3) 设 $E_n=\{(x,y):\sqrt{x^2+(y-n)^2}<n\}$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\{(x,y):x\in\mathbf{R}^1,y>0\}.$$

(4) 设 $0<a<b$,则对任意的正整数 k,存在实数 λ,使得

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,nb]\supset[\lambda,\infty).$$

(5) 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$,$A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$,且对 A 的任一无限子集 B,均存在某个 E_i,使得 $E_i\cap B$ 为无限集,则 A 必含于某个 E_{k_0} 中.

证明 (1) 若 x 属于左端,则存在 n_1,n_2,使得 $x\in A_{n_1}\cap B_{n_2}$. 不妨设 $n_1\leqslant n_2$,则由 $A_{n_1}\subset A_{n_2}$ 可知,$x\in A_{n_2}\cap B_{n_2}$. 因此 x 属于右端. 若 x 属于右端,则存在 n_0,使得 $x\in A_{n_0}\cap B_{n_0}$. 由此知 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$,即 x 属于左端.

(2) 略.

(3) 对任意的点 (x,y)(其中 $x\in\mathbf{R}^1,y>0$),只要 $n>(x^2+y^2)/2y$,