[北师课标版]

导学诱思
焦点突破
融会贯通

新教材焦点

JIAO DIAN

高中数学(选修1-1)

安徽教育出版社

[北师课标版]

新教材 点拨

XIN JIAO CAI JIAO DIAN

JIAO DIAN

高中数学

(选修1-1)

总策划：安　星

主　编：陈耀忠

编　者：陈耀忠　王传江　周薇薇

安徽教育出版社

责任编辑:文　乾

新教材焦点(北师课标版)
高中数学
(选修1—1)
安徽教育出版社出版发行
(合肥市回龙桥路1号)
新华书店经销　　合肥永青印务有限责任公司印刷
安徽飞腾彩色制版有限责任公司照排
*
开本 880×1230　1/16　印张 10.5　字数 330 000
2007年9月第1版　　　2007年9月第1次印刷
ISBN 978-7-5336-4656-1

定价:15.00元
发现印装质量问题，影响阅读，请与我社出版科联系调换
电话:(0551)2823297　2846176　　邮编:230063

内容导读

佳点

- 导学诱思
  - 焦点导入　激发学习兴趣，引发问题和思考
  - 课标聚焦　了解课标要求，明确学习目标
- 焦点突破
  - 自主预习　倡导自主学习，感知焦点内容
  - 逐点扫描
    - □ 焦点辨析　提炼教材焦点，分析焦点内涵
    - □ 焦点例题　紧扣每个焦点，选择经典例题，深入分析、解答
    - □ 变身题　触类旁通，举一反三
    - □ 点评（拓展、反思）　引导思维发散，点击思维盲点，提炼思想方法
  - 焦点训练　夯实基础知识，提升应用能力
- 融会贯通
  - 焦点回眸　归纳总结焦点内容，揭示学习、认识规律
  - 背景链接　链接课外知识，拓展思维空间
  - 高考链接　立足单元焦点，链接高考考点

我学习 ☺ 我快乐

单元验收卷　（便于拆卸）

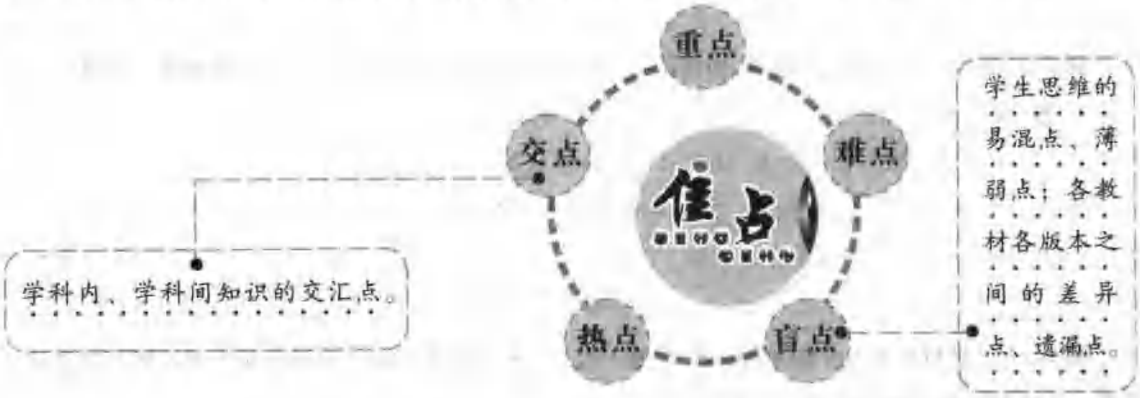
模块综合验收卷　（便于拆卸）

参考答案与简析　（详解，另册装订）

《焦点》访谈

■ 问:《新教材焦点》书名比较独特,请问其主要含义是什么?

■ 答:本套书根据新课标要求和新教材特点,对新教材内容逐点扫描:直击重点,剖析难点,补遗盲点,关注热点,演练交点。五点聚焦,是大家关注的焦点,也是本套书的焦点。请看下列图示:



■ 问:请问书名《焦点》除了表示"五点聚焦"的编写理念外,是否还有什么特别的含义?

■ 答:《新教材焦点》是安徽教育出版社高中教育编辑部着力打造的第一套高中新课标同步教辅用书。高中部于2006年8月份成立,成立以后我们确立了围绕"焦点"二字打造高中品牌教辅的整体发展思路。安徽是教育大省,安徽教育出版社作为省内唯一教育类品牌出版社,一直备受全国市场关注。而随着我省新课标教材全面使用和高考命题权的进一步下放,安教社的高中学生读物也必然会成为广大师生关注的"焦点"。

■ 问:目前,市场上新课标同步类教辅较多,你们认为《焦点》最主要靠什么取胜?

■ 答:简而言之,一流的质量。编辑室在创意《新教材焦点》过程中,经过了半年多的详细的市场调研和样张征求意见后才确定最后的编写体例,每个学科的样稿都经过了3轮修订。另外,本套书网罗了全国的编写高手和学科专家。在遴选作者的过程中,我们要求首先必须是上过新课标教材的学科带头人;另外必须是写作能力较强的和有创造性思维的。写稿过程中编辑和作者共同讨论,反复推敲,不放过稿件中的每一点瑕疵。很多作者都感叹这次编稿是他们编得最辛苦的一次,也是收获最大的一次。有了这样一个创作团体,《焦点》的质量得到了有力的保证。

■ 问:确实,《焦点》制作精美,整体设计也很有特色。在内容安排上主要遵循怎样的原则?

■ 答:总原则是依据课标、紧扣教材、充分拓展。具体来说:激发学习兴趣、引导自主学习、强调基础夯实、注重能力提升,这些都是新课标所倡导的,在本套书中都通过具体栏目得以落实。实际上,

《焦点》访谈

新课标的这些理念渗透在本套书的每个栏目、每点讲解，甚至每道试题、每次点评中。另外在栏目顺序安排上也遵循新课标的要求：先兴趣导入，再自主学习，再总结归纳和思维拓展，而且每个栏目内容都充分考虑到其实用性，以方便学生自学和自测。

■ 问：《焦点》立足于同步辅导，却提出了"放眼新课标高考"的口号，请问有何重要的意义？

▩ 答：宏伟的大厦是一砖一瓦垒砌起来的，优异的高考成绩是平常一点一滴积累起来的。安教社焦点工作室着眼平常知识的积累，放眼未来的新课标高考，融高考的焦点于平常学习之中，在一点一滴的学习中，走近高考，体验高考。2009年新课标高考面临重大改革，安教社作为专业的教育类出版社，帮助学生从容应对新高考责无旁贷。《新教材焦点》将传达最新的高考信息，把握最新高考动向。《焦点》全体工作人员坚信：《焦点》一定会帮助学子成就精彩的人生，见证他们的每一点成长。

■ 问：《新教材焦点》内容特色明显，质量一流，它无疑是高中学生新课标同步学习辅导的首选用书。请问学生如何使用才能达到最好的效果？

▩ 答：《焦点》在编排时充分考虑到学生使用和课堂教学的方便，学生可以在老师指导下按编排顺序使用本书：

先浏览第一板块的"焦点导入"和"课标聚焦"，然后带着问题预习章节内容。第二板块的"自主预习"引导学生认真阅读课本，初步了解将要学习的内容；"逐点扫描"讲练紧密结合，讲解详细、透彻，变身题触类旁通；"焦点训练"梯度分明，分层训练，可以和课堂教学配套使用。第三板块功能是：归纳、总结、拓展、提高，可以在章节的课堂学习结束后使用。"单元验收卷"和"模块综合验收卷"附在本书最后，便于拆卸，学生可以在老师指导下使用，也可以用于自测。答案详解并另册装订。

另外，"我学习，我快乐"为学生在紧张学习之余提供了轻松、愉快的园地。

总之，只要像《焦点》所倡导的那样快乐、自主、自信地学习，就一定会事半功倍，梦想成真！

目录

第一章 常用逻辑用语

导学诱思

焦点导入

我国著名数学家华罗庚曾多次提到这样的一个问题:事先准备了 5 顶帽子,其中 3 顶白色的,2 顶黑色的.在试验前,先让三个人看一看,然后闭上眼睛,替每个人各戴上一顶帽子,而把两顶黑帽子藏起来.最后,让三人睁开眼睛,要他们说出自己头上戴的是什么颜色的帽子.三个人互相看了看,沉思了一会儿,异口同声地说,自己头上戴的是白帽.聪明的读者,你知道他们是怎样猜出来的吗?

华罗庚(1910~1985),中国当代数学家,中国科学院院士

课标聚焦

1. 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题.

2. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义,会分析四种命题的相互关系.

3. 通过数学实例,了解"或"、"且"、"非"的含义.

4. 通过生活和数学中的丰富实例,理解全称量词与存在量词的意义.

5. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

焦点突破

§1 命 题

自主预习

1. 命题是可以判断________、________表述的语句,一般由________和________组成.

2. 原命题和它的________同真假,原命题的逆命题和它的________同真假.

逐点扫描

焦点一 命题

一般地,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题.其中判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

✿ 例 1

判断下列语句哪些是命题？哪些是真命题？哪些是假命题？

(1)三角函数是周期函数吗？

(2)若两直线平行，则它们的斜率相等.

(3)$\triangle ABC$中，若$\angle A=\angle B$，则$\sin A=\sin B$.

(4)$x^2-2x+1=0$.

【分析】 紧紧抓住命题的定义来判断一个语句是否是命题；至于命题的真假与否要根据所学的知识进行分析.

【解答】 上面 4 个语句中，(1)不是陈述句，所以它不是命题；(4)虽然是陈述句，但因为无法判断它的真假，所以它也不是命题；其余两个都是陈述句，而且都可以判断真假，所以它们都是命题，其中(3)是真命题，(2)是假命题(因为直线可能不存在斜率).

【点评】 判断一个语句是不是命题，要看它是否符合两个条件：①语句必须是陈述句(或表示肯定意义的反意疑问句)；②可以判断真假. 这两个条件缺一不可.

● 变身题

1. 下列语句不是命题的有(　).

①$x^2-3=0$；　②与一条直线平行的两直线平行吗？　③$2\sqrt{2}$是有理数　④$2a>a$.

A. ①③④　　B. ①②③

C. ①②④　　D. ②③④

焦点二　命题的条件、结论

在数学中具有“若 p，则 q”这种形式的命题是常见的，我们把这种形式的命题中的 p 叫命题的条件，q 叫命题的结论.

✿ 例 2

将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式.

(1)偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形；

(2)线段的垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等.

【分析】 将命题改写成“若 p，则 q”的形式的关键是分清命题的条件和结论.

【解答】

(1)如果一个函数是偶函数，那么它的图象关于 y 轴成轴对称图形；

(2)如果一个点在线段的垂直平分线上，那么它到这条线段两端点的距离相等

【点评】 将命题改写成“若 p 则 q”的形式，有时也写成“如果 p，那么 q”、“只要 p，就有 q”的形式，但要注意语言描述的流畅性.

● 变身题

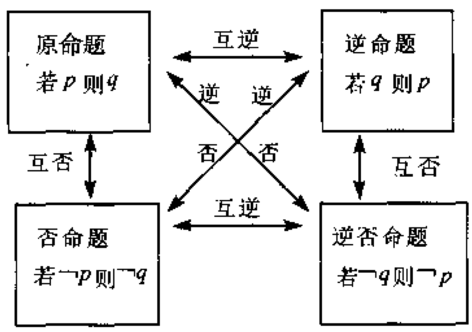
2. 指出下列命题中的条件 p 和结论 q：

(1)若 a,b,c 成等差数列，则 $2b=a+c$；

(2)正数的平方根不等于 0.

焦点二　四种命题

1. 四种命题及相互关系：



2. 四种命题的真假关系：

原命题为真，它的逆命题不一定为真，否命题不一定为真，但逆否命题一定为真.

所以，原命题与其逆否命题是等价命题. 注意原命题的逆命题与原命题的否命题也是等价命题.

✿ 例 3

把下列命题改写为“若 p，则 q”的形式，并写出它的逆命题、否命题与逆否命题.

(1)对顶角相等；　(2)当 $c>0$ 时，若 $a>b$，则 $ac>$

bc.

【分析】 关键是分清原命题的条件 p 和结论 q. 在写四种命题时，一定要注意 p、q 的位置是否要交换，以及是否需要否定 p、q.

【解答】 (1)原命题：若两个角为对顶角，则这两个角相等.

逆命题：若两个角相等，则这两个角为对顶角.

否命题：若两个角不为对顶角，则这两个角不相等.

逆否命题：若两个角不相等，则这两个角不为对顶角.

(2)原命题：当 $c>0$ 时，若 $a>b$，则 $ac>bc$.

逆命题：当 $c>0$ 时，若 $ac>bc$，则 $a>b$.

否命题：当 $c>0$ 时，若 $a\leqslant b$，则 $ac\leqslant bc$.

逆否命题：当 $c>0$ 时，若 $ac\leqslant bc$，则 $a\leqslant b$.

【点评】 原命题与它的逆否命题互为逆否命题；原命题的逆命题与原命题的否命题互为逆否命题. 第(2)题中"当 $c>0$ 时"是大前提，写其他命题时应该保留.

变身题

3. 命题"若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2(a,b,c\in\mathbf{R})$"与它的逆命题、否命题、逆否命题中，真命题的个数为（　　）.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

焦点四　命题真假的判断

命题真假的判断，一方面可以直接根据命题本身所陈述的对象进行判断；另一方面命题的四种形式之间的关系，提供了一个判断命题真假的变通手段. 即通过判断一个命题的逆否命题的真假来判断这个命题的真假.

例 4

判断命题"若 $m>0$，则方程 $x^2+2x-m=0$ 有实数根"的逆否命题的真假.

【分析】 本题研究的是方程的有关理论知识，另外要注意命题真假的判断方法.

【解答】 (方法一)原命题的逆否命题是：若方程 $x^2+2x-m=0$ 没有实数根，则 $m\leqslant 0$.

$\because$ 方程 $x^2+2x-m=0$ 没有实数根，

$\therefore \Delta=2^2-4\cdot(-m)=4+4m<0$.

$\therefore m<-1\leqslant 0$（其真确性等学过"或"形式的复合命题的真假判断后即知）

所以原命题的逆否命题是真命题.

(方法二) $m>0$ 时，$\Delta=2^2-4\cdot(-m)=4+4m>0$.

$\therefore$ 方程 $x^2+2x-m=0$ 有实数根，即原命题为真命题.

所以，原命题的逆否命题也是真命题.

(方法三)设 p：$A=\{m|m>0\}$

q：$B=\{m|$关于 x 的方程 $x^2+2x-m=0$ 有实数根$\}=\{m|m\geqslant -1\}$.

因为 $A\subseteq B$，

所以"若 p，则 q"为真，逆否命题为真.

即原命题的逆否命题是真命题.

【点评】 方法一是从逆否命题直接判断；方法二是利用原命题与它的逆否命题同真同假来间接判断；方法三是利用集合的包含关系来判断的.

变身题

4. 有下列四个命题：①"若 $xy=1$，则 x，y 互为倒数"的逆命题；②"相似三角形的周长相等"的否命题；③"若 $b\leqslant -1$，则方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 有实根"的逆否命题；④"若 $A\cup B=B$，则 $A\supseteq B$"的逆否命题. 其中是真命题的是（　　）.

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ③④

焦点五　反证法

反证法是一类重要的数学证明方法，其一般步骤：

①假设命题的结论不正确，即假设结论的反面成立；

②从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

③由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

即：$\boxed{\text{否定结论}\rightarrow\text{推出矛盾}\rightarrow\text{肯定结论}}$

例 5

若 x,y,z 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$c=z^2-3x+\frac{\pi}{6}$，求证：a,b,c 中至少有一个大于 0.

【分析】 含有"至少"、"至多"、"不存在"等词语的数学命题，常用反证法.

【解答】 假设 a,b,c 都不大于 0，即 $a\leqslant 0, b\leqslant 0, c\leqslant 0$，则 $a+b+c\leqslant 0$. 但

$$a+b+c=x^2-2y+\frac{\pi}{2}+y^2-2z+\frac{\pi}{3}+z^2-2x+\frac{\pi}{6}$$

$$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3\geqslant\pi-3>0$$

与 $a+b+c\leqslant 0$ 相矛盾，因此 a,b,c 中至少有一个大于 0.

【点评】 (1)正确地作出反设(即否定结论)，是正确运用反证法的前提. 下表是一些常见的否定形式：

词语	大于(>)	是	都是	所有的…	任意一个…	至少一个不	…
否定	不大于(≤)	不是	不都是	至少一个不…	某个不…	一个也没有	…

(2)可能出现矛盾的四种情况：①与题设矛盾；②与反设矛盾；③与公理、定理矛盾④在证明过程中，推出自相矛盾的结论.

变身题

5. 用反证法证明：若 $a^2+b^2+ab\neq 0$，则 $a,b,a+b$ 中至少有一个不等于 0.

焦点训练

基础夯实

1. 下列语句中是命题的为(　　).

A. 你到过北京吗?　　B. 对顶角相等

C. 啊！我太高兴啦！　　D. 华罗庚

2. 如果一个命题的否命题是真命题，那么这个命题的逆命题是(　　).

A. 真命题，

B. 假命题

C. 不一定是真命题

D. 不一定是假命题

3. (2006 年辽宁卷)给出下列四个命题：

①垂直于同一直线的两条直线互相平行；

②垂直于同一平面的两条平面互相平行；

③若直线 l_1、l_2 与同一平面所成的角相等，则 l_1、l_2 互相平行；

④若直线 l_1、l_2 是异面直线，则与 l_1、l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 命题："若 $a\cdot b\neq 0$，则 a,b 都不为零"的逆否命题是______________.

5. (2005 年福建卷)把下面不完整的命题补充完整，并使之成为真命题：

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于________对称，则函数 $g(x)=$____________.

(注：填上你认为可以成为真命题的一种情形即可，不必考虑所有可能的情形)

6. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

(1)若 $xy=0$，则 x,y 中至少有一个是 0；

(2)若 $x>0, y>0$，则 $xy>0$.

能力提升

7. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中(　　).

A. 真命题与假命题的个数相同

B. 真命题的个数一定是奇数

C. 真命题的个数一定是偶数

D. 真命题的个数可能是奇数，也可能是偶数

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，$a,b\in\mathbf{R}$，有一命题"若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$".

(1)写出逆命题，判断其真假，并证明你的结论；

(2)写出逆否命题，判断其真假，并证明你的结论.

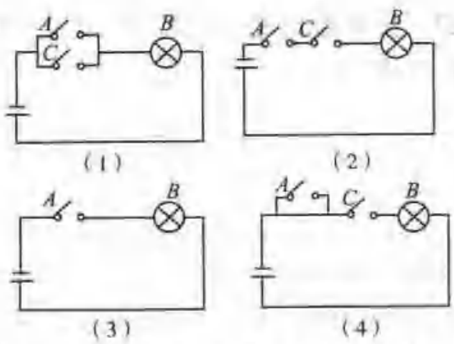
综合探究

9. 若下列三个方程：$x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 中至少有一个方程有实根，试求实数 a 的取值范围。

§2 充分条件与必要条件

自主预习

看下列电路图填空：



如图(1)所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______________条件；

如图(2)所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______________条件；

如图(3)所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______________条件；

如图(4)所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______________条件。

逐点扫描

焦点一　符号“⇒”的含义

“$p\Rightarrow q$”表示“若 p，则 q”为真；也表示“p 蕴含 q”。

“$p\Rightarrow q$”也可写为“$q\Leftarrow p$”，有时也用“$p\to q$”。

例 1

用符号“⇒”与“⇐”填空：

(1)$x^2>0$ ________ $x>0$；

(2)两三角形全等________两三角形面积相等。

【解答】 (1)“若 $x^2>0$，则 $x>0$”是一个假命题，但反之为真，所以填“⇐”；

(2)“若两三角形全等，则两三角形的面积相等”是一个真命题，所以填“⇒”。

变身题

1. 用符号“⇒”与“⇏”填空：

(1)两直线平行________同位角相等；

(2)$ac^2>bc^2$ ________ $a>b$。

焦点二　充分条件与必要条件的概念

如果“若 p，则 q”为真命题，即 $p\Rightarrow q$，那么我们就说，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；如果“若 p，则 q”为假命题，即 $p\nRightarrow q$，那么我们就说，p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件。

例 2

下列各组命题中，p 是 q 的什么条件，q 是 p 的什么条件：

(1)p：$x=y$；q：$x^2=y^2$。

(2)p：三角形的三条边相等；

q：三角形的三个角相等。

【分析】 *首先分清条件和结论，然后弄清楚是前者推后者，还是后者推前者。*

【解答】 (1)由 $p\Rightarrow q$，即 $x=y\Rightarrow x^2=y^2$，知 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件。

(2)由 $p\Rightarrow q$，即三角形的三条边相等⇒三角形的三个角相等，知 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；又由 $q\Rightarrow p$，即三角形的三个角相等⇒三角形的三条边相

等，知 q 也是 p 的充分条件，p 也是 q 的必要条件.

【点评】 充分条件与必要条件的判断，实质上是命题"若 p 则 q"与"若 q 则 p"真假的判断.

变身题

2. 用"充分"或"必要"填空，并说明理由：

(1)"a 和 b 都是偶数"是"$a+b$ 也是偶数"的________条件；

(2)"四条边相等"是"四边形为正方形"的________条件；

(3)"$x-1=0$"是"$x^2-1=0$"的________条件；

(4)"两个角是对顶角"是"这两个角相等"的________条件.

焦点三 充要条件

如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$. 此时，p 既是 q 的充分条件，p 又是 q 的必要条件，我们就说，p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件.（当然此时也可以说 q 是 p 的充要条件）

(1)符号"$\Leftrightarrow$"叫做等价符号."$p\Leftrightarrow q$"表示"$p\Rightarrow q$ 且 $p\Leftarrow q$"；也表示"p 等价于 q"."$p\Leftrightarrow q$"有时也用"$p\leftrightarrow q$"；

(2)"充要条件"有时还可以改用"当且仅当"来表示，其中"当"表示"充分"，"仅当"表示"必要".

(3)几个相关的概念：

若 $p\Rightarrow q$，但 $q\not\Rightarrow p$，则说 p 是 q 的充分而不必要条件；

若 $p\not\Rightarrow q$，但 $p\Leftarrow q$，则说 p 是 q 的必要而不充分条件；

若 $p\not\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p$，则说 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

例 3

指出下列命题中 p 是 q 的什么条件（在充分不必要条件，必要不充分条件，充要条件，既不充分又不必要条件中选一种）

(1)p：$(x-2)(x-3)=0$；q：$x-2=0$.

(2)p：同位角相等；q：两直线平行.

(3)p：$x=3$；q：$x^2=9$.

(4)p：四边形的对角线相等；

q：四边形是平行四边形.

【解答】 (1)$\because (x-2)(x-3)=0\not\Rightarrow x-2=0$，$(x-2)(x-3)=0\Leftarrow x-2=0$，$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件；

(2)$\because$ 同位角相等$\Leftrightarrow$两直线平行，

$\therefore p$ 是 q 的充要条件；

(3)$\because x=3\Rightarrow x^2=9$，$x=3\not\Leftarrow x^2=9$，

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件；

(4)$\because$ 四边形的对角线相等$\not\Rightarrow$四边形是平行四边形，四边形的对角线相等$\not\Leftarrow$四边形是平行四边形，

$\therefore p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

【点评】 对于涉及范围问题的充要条件的判断（如(1)(3)），可用"小范围推出大范围"帮助记忆.

变身题

3. 给出以下命题：①p：$x\neq 3$，q：$|x|\neq 3$；

②在$\triangle ABC$ 中，p：$A>B$，q：$\sin A>\sin B$；

③p：$\frac{1}{x}<-1$，q：$x>-1$；④p：$\begin{cases}x>1,\\y>1.\end{cases}$

q：$\begin{cases}x+y>2,\\xy>1.\end{cases}$其中 p 是 q 的充分不必要条件的有（ ）.

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

焦点四 用集合的观点理解"充分"、"必要"、"充要"三种条件

1. 若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件（此时 B 也是 A 的充要条件）.

2. 在含有变量的命题中，凡能使命题为真的变量 x 的允许值集合，叫做此命题的真值集合. 若 $p\Rightarrow q$，说明 p 的真值集合$\subseteq q$ 的真值集合，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；若 $p\Leftrightarrow q$，说明 p,q 的真值集合相等，即 p,q 等价，则 p 是 q 的充要条件（此时 q 也是 p 的充要条件）.

例 4

已知 p：$\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\x-10\leqslant 0,\end{cases}\right\}$　q：$\{x\,|\,1-m\leqslant x\leqslant 1+m,m>0\}$，若$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

【分析】 用集合的观点去解题.

【解答】 (方法一)p 即$\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$,

$\therefore \neg p: A=\{x|x<-2$ 或 $x>10\}$, $\neg q: B=\{x|x<1-m$ 或 $x>1+m, m>0\}$

$\because \neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件,

$\therefore B\subsetneqq A\Leftrightarrow\begin{cases}m>0,\\1-m\leqslant -2\Rightarrow m\geqslant 9,\\1+m\geqslant 10.\end{cases}$

即 m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 9\}$.

(方法二)$\because \neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件,

$\therefore q$ 是 p 的必要不充分条件.

即 p 是 q 的充分不必要条件.

而 $p: P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$, $q: Q=\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m, m>0\}$.

$\therefore P\subsetneqq Q$,即$\begin{cases}m>0,\\1-m\leqslant -2\Rightarrow m\geqslant 9,\\1+m\geqslant 10.\end{cases}$

$\therefore m$ 的取值范围是$\{m|m\geqslant 9\}$.

【点评】 四种命题中,原命题$\Leftrightarrow$逆否命题,逆命题$\Leftrightarrow$否命题.

变身题

4. 设 $p: x^2-x-20>0$, $q: \dfrac{1-x^2}{|x|-2}<0$,则 p 是 q 的(　　)条件.

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充要　　D. 都不是

焦点五　充要条件的判断与证明

充分性是说条件是充分的,也就是说条件是充足的,是足以保证的.必要性是说条件是必须的、必不可少的.即有它不一定,没它则不行.

我们在充要条件的判断与证明时,要注意判断或证明的方向,同时要注意转化命题,关注命题本身所描述的对象.

例5

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=p^n+q(p\neq 0, p\neq 1)$,求数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件.

【分析】 从特殊入手,先探寻必要条件,再反过来证明充分性.

【解答】 $a_1=S_1=p+q$,

当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=p^{n-1}(p-1)$,

$\because p\neq 0, p\neq 1$,

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)}=p$.

若$\{a_n\}$为等比数列,则$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p$,

$\therefore \dfrac{p(p-1)}{p+q}=p$,

$\therefore q=-1$,这是$\{a_n\}$为等比数列的必要条件.

下面证明 $q=-1$ 是$\{a_n\}$为等比数列的充分条件.

当 $q=-1$ 时, $\therefore S_n=p^n-1(p\neq 0, p\neq 1)$, $a_1=S_1=p-1$,

当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$,

$\therefore a_n=(p-1)p^{n-1}(p\neq 0, p\neq 1)$.

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(p-1)p^{n-1}}{(p-1)p^{n-2}}=p$ 为常数,

$\therefore q=-1$ 时,数列$\{a_n\}$为等比数列.

即数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件为 $q=-1$.

【点评】 本题先由 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)\end{cases}$ 关系式去寻找 a_{n+1} 与 a_n 的比值,利用其任意性得 a_2 与 a_1 的比值与其相等得到命题成立的必要条件,而后证明充分性.值得同学们注意的是,在处理充要条件的有关问题时,首先要分清条件和结论,然后才能进行推理和判断.

变身题

5. 试寻求关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个小于1的正根的一个充要条件.

焦点训练

基础夯实

1. 已知条件：p：$x+y\neq-2$，条件 q：x、y 不都为 -1，则 p 是 q 的（　　）.

A. 充要条件

B. 既不充分也不必要条件

C. 充分非必要条件

D. 必要非充分条件

2. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$，则使 $a>b$ 成立的一个充分但不必要的条件是（　　）.

A. $ac>bc$　　　　B. $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

C. $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$　　　　D. $a^2>b^2$

3.（2007 年湖北卷）已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 现有下列命题：①s 是 q 的充要条件；②p 是 q 的充分条件而不是必要条件；③r 是 q 的必要条件而不是充分条件；④$\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件；⑤r 是 s 的充分条件而不是必要条件，则正确命题序号是（　　）.

A. ①④⑤　　　　B. ①②④

C. ②③⑤　　　　D. ②④⑤

4. $ax^2+2x+1=0$ 有且只有一个负的实根的充要条件是________.

5. 在平面直角坐标系中，点 $(x^2+5x,1-x^2)$ 在第一象限的充要条件是________.

6. 指出下列各组命题中 p 是 q 的什么条件？

(1) p：m 为有理数　　q：m 为实数

(2) p：$x^2-1=0$　　q：$x-1=0$

(3) p：内错角相等　　q：两直线平行

(4) p：四边相等　　q：四边形为正方形

(5) q：$a\neq0$　　p：$ab\neq0$

(6) p：a、b 都不为零　　q：a、b 不都为零

能力提升

7.（2007 年山东卷）下列各小题中，p 是 q 的充分必要条件的是（　　）.

①p：$m<-2$，或 $m>6$；q：$y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点；

②p：$\frac{f(-x)}{f(x)}=1$；q：$y=f(x)$ 是偶函数；

③p：$\cos\alpha=\cos\beta$；q：$\tan\alpha=\tan\beta$；

④p：$A\cap B=A$；q：$\complement_U B\subseteq\complement_U A$.

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

8. 已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$，$a\in\mathbf{R}$ 求：

(1) 方程有两个正根的充要条件；

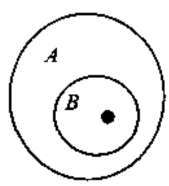
(2) 方程至少有一个正根的充要条件.

综合探究

9. 如图，有一个圆 A，在其内又含有一个圆 B. 请回答：

(1) 命题：若“A 为绿色”，则“B 为绿色”中，“A 为绿色”是“B 为绿色”的什么条件；“B 为绿色”又是“A 为绿色”的什么条件.

(2) 命题：若“红点在 B 内”，则“红点一定在 A 内”中，“红点在 B 内”是“红点在 A 内”的什么条件；“红点在 A 内”又是“红点在 B 内”的什么条件.



§3 全称量词与存在量词

自主预习

1. 命题“实数的平方大于等于 0”用符号“∀”与“∃”表示为________；它是________（填全称或特称）命题，其否定是________，是________（填全称或特称）命题.

2. 命题“存在一对实数，使 $2x+3y+3>0$ 成立”用符号“∀”与“∃”表示为________. 它是________（填全称或特称）命题，其否定是________，是________（填全称或特称）命题.

逐点扫描

焦点一　全称命题与特称命题的概念和形式判断

1. 全称量词与特称量词：

表示整体或全部含义的量词称为全称量词，常见的有“所有”、“任意”、“每一个”等，通常用符号“$\forall x$”表示，读作“对任意 x”；表示个别或一部分含义的量词称为存在量词，常见的有“有一个”、“存在一个”、“有点”、“有些”等，通常用符号“$\exists x$”表示，读作“存在 x”.

2. 全称命题与特称命题：

全称命题——含有全称量词的命题. 表示形式：“对于任意 $x\in M$，有 $p(x)$ 成立.”

记为：$\forall x\in M, p(x)$.

特称命题——含有存在量词的命题. 表示形式：“存在 M 的一个元素 x，使 $p(x)$ 成立”记为：$\exists x\in M, p(x)$.

例 1

判断下列语句是不是全称命题或者特称命题，如果是，用量词符号表达出来：

(1)中国的所有江河都注入太平洋；

(2)0 不能作除数；

(3)任何一个实数除以 1，仍等于这个实数；

(4)每一个向量都有方向；

【分析】 从量词入手进行判断.

【解答】 (1)全称命题，$\forall$ 河流 $x\in$ {中国的河流}，河流 x 注入太平洋；

(2)特称命题，$\exists x=0$，x 不能作除数；

(3)全称命题，$\forall x\in \mathbf{R}, \frac{x}{1}=x$；

(4)全称命题，$\forall a$，a 有方向；

【点评】 全称命题和特称命题是一个形式化定义的数学概念，但实际问题中又不一定完全那么规范，我们应根据命题本身的含义出发进行判断.

变身题

1. 将“$x^2+y^2\geqslant 2xy$”改写成全称命题，下列说法正确的是（　　）

A. $\forall x,y\in \mathbf{R}$，都有 $x^2-y^2\geqslant 2xy$

B. $\exists x,y\in \mathbf{R}$，都有 $x^2+y^2\geqslant 2xy$

C. $\forall x>0, y>0$，都有 $x^2+y^2\geqslant 2xy$

D. $\exists x<0, y<0$，都有 $x^2+y^2\leqslant 2xy$

焦点二　全称命题与特称命题的真假判假

要判断一个特称命题为真，只要在给定的集合中找到一个元素 x，使命题 $p(x)$ 为真；要判断一个特称命题为假，必须对在给定集合的每一个元素 x，使命题 $p(x)$ 为假.

要判断一个全称命题为真，必须对在给定集合的每一个元素 x，使命题 $p(x)$ 为真；但要判断一个全称命题为假时，只要在给定的集合中找到一个元素 x，使命题 $p(x)$ 为假.

全称命题与特称命题之间有可能转化，它们之间并不是对立的关系.

例 2

判断以下命题的真假：

(1) $\exists x\in \mathbf{R}, x^2>x$；　(2) $\forall x\in \mathbf{R}, x^2>x$；

(3) $\exists x\in \mathbf{Q}, x^2-8=0$；　(4) $\forall x\in \mathbf{R}, x^2+2>0$.