普通高等教育"十一五"国家级规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI

GAODENG SHUXUE

高等数学

（上册）

朱士信　唐　烁　宁荣健　编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI

GAODENG SHUXUE

高等数学

（上册）

朱士信　唐　烁　宁荣健　编
徐宗本　苏化明　主审

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书分上、下两册。上册内容为函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分、定积分的应用、常微分方程。下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数。本书后附积分表、习题提示与参考答案。本书结构严谨合理、条理清晰明了、文字通俗易懂、论述简明透彻、例题与习题难易适中，便于教学或自学。本书对某些内容作了不同层次的处理，能适应不同学时的教学需求。

本书可作为高等理工科院校非数学专业教材，也可作为高等数学课程学习的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/朱士信，唐烁，宁荣健编．—北京：中国电力出版社，2007

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-5083-5536-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①朱…②唐…③宁…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 068183 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

北京市铁成印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2007 年 8 月第一版　2007 年 8 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　37 印张　904 千字

印数 00001—10000 册　上下册定价 **49.00** 元

前言

本书是根据国家教育部颁发的《高等数学工科本科基础课程教学要求》和《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》，并参考近几年《全国硕士研究生入学统一考试大纲》中高等数学考试大纲部分进行编写的国家“十一五”规划教材。

我们依照新时期教材改革的精神，结合合肥工业大学全体数学教师长期的教学实践经验和改革成果，遵循创新、实用、就简、通俗和满足不同层次学生需要的原则，编写了本套教材。本教材具有以下鲜明的特点：

（1）重视对学生直觉思维的培养，突出微积分中重要概念产生的实际背景，如几何背景、物理背景等，以便学生在学习过程中比较自然地接受这些重要的概念，并加以深刻理解。

（2）注重运用高等数学的基本思想和基本方法分析问题和解决问题，培养学生应用高等数学的知识处理实际问题的能力。

（3）将高等数学内容进行优化，如将定积分和不定积分糅合在一起，将微分方程、无穷级数等部分内容进行重新组合，使整个内容安排紧凑、简洁，使学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系。

（4）积极将教学研究新成果吸收进来，如多元函数极值部分增加了判断多元函数极值和条件极值的充分条件，又如某些定理或公式的证明我们都采用了与以往教材不同的证法，将教学与研究的新成果应用于教学，以便培养学生的创新能力。

（5）注重和中学知识的衔接与后继课程的联系，如增加了极坐标内容，以例题的方式介绍了广义二重积分等。

（6）突出了各部分内容重点，在每章内容后编写了小结，通过此小结对本章内容进行归纳和总结，突出数学思想和数学方法，以便培养学生的自学能力。

（7）能适应不同教时数的教学需求，书中对某些内容作了不同层次的处理。如有的内容在章节上加 * 号表明本章节根据教时数选择讲或不讲，用楷体字印刷的内容属提高内容，可供学生阅读自学。希望这样的处理能给教师留下较大的选择余地，使他们可根据学生的实际情况和具体要求作出灵活安排。

我们需要说明的是：在编写教材的过程中，特别注重改革和继承的关系。我们参考了众多高等数学教材和微积分教材，渴望将长期形成的传统优点发扬光大，也将新时期教学改革中我们认为值得借鉴的地方吸收进来。在此特向相关参考书目的作者（见参考文献）表示深深的谢意。

我们真诚地感谢西安交通大学徐宗本教授和合肥工业大学苏化明教授对本书的认真审阅，他们对本书的编写提出了大量宝贵的建议和意见，包括内容的结构、基本概念的提法和具体的运算过程等，使作者受益匪浅。

本书是在合肥工业大学全体数学教师的大力支持下编写完成的，在此谨向他们致以衷心的感谢。同时还要感谢合肥工业大学教务处和理学院领导的关心和帮助。

由于编者水平有限，书中定有许多不足甚至错误之处，渴望得到广大专家、同行和读者的批评指正。

编者

2007 年 2 月

目 录

第一章 函 数

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，它是高等数学研究的基本对象，也是主要研究对象．在自然科学、工程技术，甚至某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一．在高等数学中函数处于基础的核心地位．

本章除对中学学过的函数及其性质进行重点复习以外，并将根据本课程的需要，对它们作些必要的补充，最后介绍两个经常应用的不等式．

第一节 函数的概念

一、函数的定义

在考察一个自然现象或技术过程中，所涉及到的变量并非彼此无关，而是相互联系、相互依赖和相互制约的．我们把变量之间的对应关系抽象化，就得到函数的概念．

定义 设有两个变量 x 和 y，D 为一非空的实数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有惟一确定的数值和它对应，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x).$$

集合 D 称为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数的值域．

关于函数概念的几点说明：

(1) 表示函数的符号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母表示，如"g"，"F"，"φ"，"Φ"等．

(2) 在函数概念中，对应关系 f 是抽象的，只有在具体函数中 f 才是具体的．例如，$y=x^2$．此时，f 表示对 x 作平方运算．为了对函数 f 有个直观形象的认识，可将它比喻为一部"数值变换器"，将任意 $x\in D$ 输入到数值变换器中，通过 f 的"作用"，输出来的就是 y，不同的函数就是不同的变换器（见图 1-1）．

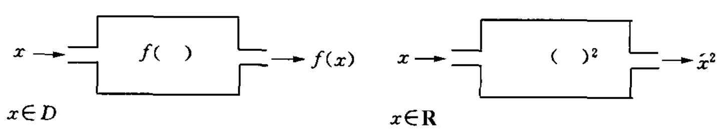

图 1-1

(3) 确定函数的定义域，一般分为两种情况．对于由数学表达式给出的函数，其定义域取使该表达式有意义的实数集即可．例如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，那么它的定义域就是使 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 有意义的实数的集合，即 $(-1,1)$；对于应用问题中遇到的函数，它的定义域则要根据问题的实际意义来确定．例如自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，如果开始下落的时刻是 $t=0$，落地时刻是 $t=T$，那么 s 与 t 的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad t \in [0,T].$$

这个函数的定义域为 $[0,T]$.

(4) 我们定义的函数是指在确定的对应法则下，定义域内的每个元素只对应一个数值，即所谓的“单值函数”. 但是往往会出现这样的情况，即在某种对应规则下，变量 x 的一个值对应变量 y 的多个值. 例如在 xOy 坐标面上，圆心在原点，半径为 1 的圆的方程是 $x^2+y^2=1$. 如果将“满足这个方程”作为变量 x 与变量 y 之间的对应法则，那么当 x 取开区间 $(-1,1)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值与它对应. 因此当 $x\in(-1,1)$ 时，若仅仅以“满足方程 $x^2+y^2=1$”作为变量 x 与变量 y 之间的对应法则，那么这个法则就不符合上述函数的定义. 但是只要我们把对应法则稍作补充，如当 $x\in[-1,1]$ 时，以“满足方程 $x^2+y^2=1$，且 $y\geqslant 0$”作为对应法则，那么就得到了一个确定的（单值）函数，将它记为 $y=y_1(x)$，这时 $y_1(x)=\sqrt{1-x^2}$. 同样，对应法则“满足方程 $x^2+y^2=1$ 且 $y\leqslant 0$”也确定了一个函数，将它记作 $y=y_2(x)$，$y_2=-\sqrt{1-x^2}$. 有时为了叙述上的方便. 我们说方程 $x^2+y^2=1$ 确定了一个多值函数，并把 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 称为这个多值函数的两个单值分支.

二、函数的分段表示，隐式表示与参数表示

具体表示一个函数时，可以用表格法、图形法、解析法（即算式表示法）等来表示，有时也可以用语言来描述，这些都是大家在中学里已熟悉的内容. 在这里我们给出高等数学中几种较常用的函数的表示法.

1. 函数的分段表示

设 D_1，D_2 是两个互不相交的实数集合，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是两个不同的表达式，则称定义在集合 $D_1\cup D_2$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in D_1,\\ \psi(x), & x\in D_2\end{cases}$$

为分段表示的函数. 体现了在 x 的不同取值范围，函数 $f(x)$ 有不同的对应法则. 这里函数 f 是分成两段来表示的. 事实上，分段表示还可以分成任意有限段，甚至无限段.

例 1 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当\ x>0,\\ 0, & 当\ x=0,\\ -1 & 当\ x<0\end{cases}$$

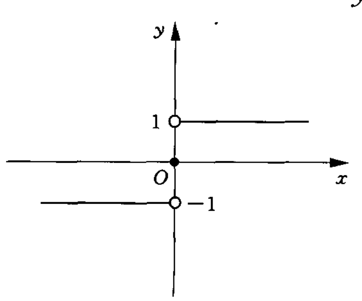

图 1-2

定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-2 所示. 有了符号函数后，我们有 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

例 2 取整函数

对任意 $x\in\mathbf{R}$，$[x]$ 表示取不超过 x 的最大整数，从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的分段函数

$$y=[x],$$

称此函数为取整函数，如

$$[2.1]=2,\quad [\pi]=3,\quad [-1]=-1,\quad [-1.5]=-2.$$

它的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-3 所示.

2. 函数的隐式表示

以上所举例函数的共同特点是函数形式均为 $y=f(x)$，即因变量 y 在等式的一边，而

等式的另一边是只含自变量的表达式，这称为函数的显示表示，或称为显函数．而函数的隐式表示，是指通过一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定变量 y 与 x 之间的函数关系的一种表示方式，这样的函数称为隐函数．如 $x+y=1$，由这个方程确定了 y 是 x 的函数，这个二元方程就是函数的隐式表示形式．当然，从这个二元方程解出 $y=1-x$，便得到函数的显示表示．又如天体力学中著名的 Kepler 方程：

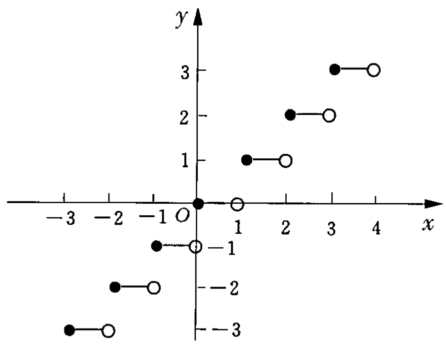

图 1-3

$$y=x+\varepsilon\sin y,$$

其中 $\varepsilon\in(0,1)$ 是常数，也反映了变量 x 与 y 之间的特定关系．虽然无法将 y 用 x 的表达式写出，但是以后我们会知道，y 确实是 x 的函数，因此 Kepler 方程就是这一函数关系的隐式表示形式．

3. 函数的参数表示

在表示变量 x 与 y 的函数关系时，我们常常需要引入第三个变量（例如参数 t），通过建立 t 与 x，t 与 y 之间的函数关系，间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，这类函数也称为参变量函数，即

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in I.\quad(I\text{ 为非空实数集})$$

这种方法称为函数的参数表示．

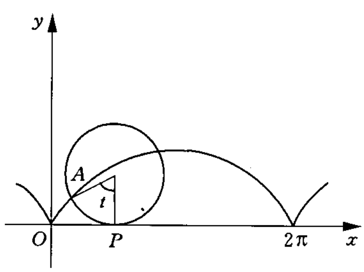

图 1-4

如摆线（又称旋轮线），它表示一只轮子在直线上滚动时，轮子的边缘上一点的运动轨迹．建立坐标系如图 1-4 所示．现设轮子的半径为 1，置于 x 轴上，轮子边缘一点 A 与 O 点相触，我们来求当轮子滚动时，A 点运动的函数表示．

设轮子滚动时 A 点的坐标为 $A(x,y)$，令参数 t 表示轮子转过的角度，当轮子滚到 P 点时，线段 $\overline{OP}$ 的长度等于圆弧 $\overset{\frown}{AP}$ 的长度，也等于轮子转过的角度，于是得到

$$\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\end{cases}\quad t\in(0,+\infty).$$

此即为摆线的参数表示．

三、极坐标

在中学我们使用的是平面直角坐标系，它是最简单和最常用的一种坐标系，但不是惟一的坐标系．在实际问题中，有时利用其他的坐标系比较方便，如炮兵射击时是以大炮为基点，利用目标的方位角以及目标与大炮的距离来确定目标的位置的．在航海、航空中也常常使用类似的方法．下面我们研究如何利用角和距离来建立坐标系．

定义　在平面内取一个定点 O，称为极点，引一条射线 Ox，称为极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向）（见图 1-5）．对于平面内任意一点 M，用 r 表示线段 OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的角度，r 称为点 M 的极径，θ 称为点 M 的极角，

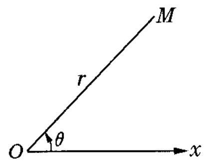

图 1-5

有序数组（r,θ）称为点 M 的极坐标，这样建立的坐标系称为极坐标系，极坐标为 r，θ 的点 M，可表示为 $M(r,\theta)$.

当点 M 在极点时，它的极坐标 $r=0$，θ 可以取任意值.

建立坐标系后，给定 r 和 θ，就可以在平面内确定惟一一点 M；反过来，给定平面内一点，也可以找到它的极坐标（r,θ）. 但和直角坐标系不同的是，平面内一个点的极坐标可以有无数种表示法. 这是因为（r,θ）和（$r,2n\pi+\theta$）（n 为任意整数）是同一点的极坐标. 例如 $\left(6,\frac{\pi}{4}\right)$ 以及 $\left(6,\frac{\pi}{4}+2\pi\right)$、$\left(6,\frac{\pi}{4}-2\pi\right)$ 等等，都是同一点的极坐标. 但如果限定 $0\leqslant\theta<2\pi$ 或 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，那么除极点外，平面内的点和极坐标就可以一一对应了.

下面，我们来介绍曲线的极坐标方程.

在极坐标系中，曲线可以用含有 r，θ 这两个变量的方程 $\varphi(r,\theta)=0$ 来表示，这种方程称为曲线的极坐标方程.

求曲线的极坐标方程的方法和步骤，与求直角坐标方程类似，就是把曲线看作适合某种条件的点的集合或轨迹，将已知条件用曲线上点的极坐标 r，θ 的关系式 $\varphi(r,\theta)=0$ 表示出来，就得到曲线的极坐标方程.

例 3 求圆心是 $A(R,0)$，半径为 R 的圆的极坐标方程.

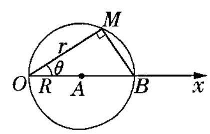

图 1-6

解 由已知条件，圆心在极轴上，圆经过极点 O，设圆和极轴的另一个交点为 B（见图 1-6），那么 $OB=2R$.

设 $M(r,\theta)$ 是圆上任意一点，则 $OM\perp MB$，因此

$$|OM|=|OB|\cos\theta$$

用极坐标表示得 $r=2R\cos\theta$. 这就是所求圆的极坐标方程.

由于极坐标系和直角坐标系是两种不同的坐标系，同一个点可以有极坐标，也可以有直角坐标；同一条曲线可以有极坐标方程，也可以有直角坐标方程. 为了研究问题方便，有时需要把在一种坐标系中的方程化为在另一种坐标系中的方程.

如图 1-7 所示，把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系中取相同的长度单位. 设 M 是平面内任意一点，它的直角坐标是（x,y），极坐标是（r,θ），经过 M 点作 x 轴的垂线，垂足为 N. 由三角函数定义，得

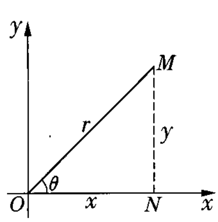

图 1-7

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

由上述关系式，我们可得下面的关系式：

$$r^2=x^2+y^2,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\quad (x\neq 0).$$

在一般情况下，由 $\tan\theta$ 确定 θ 时，可根据点 M 所在的象限取最小正角.

例 4 （1）将点 M 的极坐标 $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ 化为直角坐标；

（2）将点 M 的直角坐标（1,1）化成极坐标.

解 (1) $x=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，$y=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$. 所以点 M 的直角坐标为（$\sqrt{2},\sqrt{2}$）.

(2) $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\tan\theta=1$，因为点 M 在第一象限，所以最小正角为 $\theta=\frac{\pi}{4}$，于是点 M 的极坐标为$\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

例 5 化圆的直角坐标方程 $x^2+y^2-2x=0$ 为极坐标方程.

解 将直角坐标与极坐标的关系代入原方程，得

$$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2\cdot r\cos\theta=0,$$

即

$$r=2\cos\theta.$$

例 6 化下列极坐标方程为直角坐标方程：

(1) $r=2$；　(2) $r=4\sin\theta$.

解 (1) 将 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 $r=2$ 得：

$$x^2+y^2=4.$$

这表示圆心在原点，半径为 2 的圆.

(2) 将原方程化为 $r^2=4r\sin\theta$，由极坐标与直角坐标系的关系，我们得

$$x^2+y^2=4y.$$

这表示圆心在（0,2），半径为 2 的圆.

下面我们介绍高等数学中经常用到的一些曲线方程及图形.

1. 阿基米德 (Archimedes) 螺线（见图 1 - 8）

$$r=a\theta(a>0)$$

2. 星形线（见图 1 - 9）

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad 或 \quad \begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \quad (a>0)$$

3. 心形线

(1) $r=a\ (1+\cos\theta)$　($a>0$)（见图 1 - 10）.

(2) $r=a\ (1-\cos\theta)$　($a>0$)（见图 1 - 11）.

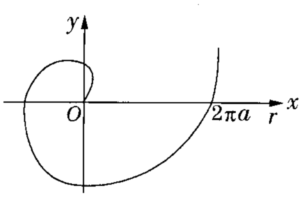

图 1 - 8

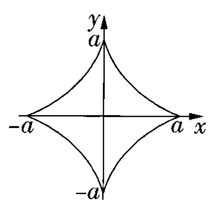

图 1 - 9

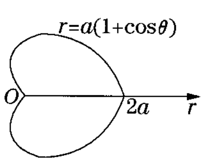

图 1 - 10

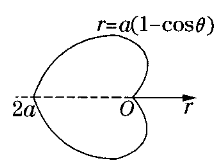

图 1 - 11

4. 双纽线（见图 1 - 12）

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad 或 \quad r^2=a^2\cos2\theta \quad (a>0)$$

四、复合函数与反函数

有了函数的概念后，我们来讨论函数的运算，这样做的目的是可以从几个最简单的函数出发，通过运算来获得更多、更复杂的函数. 函数的四则运算已是大家熟知的了. 因而在这

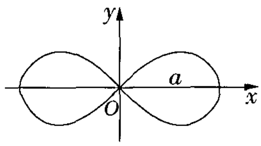

图 1 - 12

里我们仅讨论函数的复合运算和取反函数运算.

1. 复合函数

在自由落体运动中，速度 v 与时间 t 的关系是

$$v = gt,$$

而质点的动能为 $M=\frac{1}{2}mv^2$. 这样，动能依赖于时间的变化关系为

$$M = \frac{1}{2}mv^2,\quad v = gt,$$

或

$$M=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

可见速度 v 在这里是起着桥梁的作用，称 v 是中间变量. 通过中间变量所架起的桥梁，将两个函数复合为一个函数.

定义　设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 U，$u = g(x)$ 的定义域为 D，且其值域是 U 的子集，因而 $y = f[g(x)]$ 是定义在 D 上的函数，称它为 $y = f(u)$，$u = g(x)$ 的复合函数，变量 u 称为中间变量.

定义中设 $u = g(x)$ 的值域是 U 的子集，其目的在于能保证这两个函数可以复合成一个函数，否则就不能构成复合函数. 例如 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为表达式 $\arcsin(2+x^2)$ 对任何实数 x 都没有意义.

例 7　设

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x>1, \\ x^2, & x\leqslant 1, \end{cases}\quad g(x) = x-1,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解　$f[g(x)] = \begin{cases} g(x)+1, & g(x)>1, \\ g^2(x), & g(x)\leqslant 1, \end{cases}$

而 $g(x)=x-1>1$ 当且仅当 $x>2$，故有

$$f[g(x)] = \begin{cases} x, & x>2, \\ (x-1)^2, & x\leqslant 2; \end{cases}$$

$$g[f(x)] = f(x)-1 = \begin{cases} x, & x>1, \\ x^2-1, & x\leqslant 1. \end{cases}$$

以上是两个函数产生的复合函数，不难将复合函数概念推广到有限个函数产生的复合函数. 例如，三个函数

$$y = \sin u,\quad u = \cos v,\quad v = e^x+1$$

产生的复合函数是

$$y = \sin[\cos(e^x+1)],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

我们不仅要能够将若干个简单函数复合成一个复杂的函数，而且还要善于将复合函数“分解”为若干个简单函数，这一点在以后的求导数、求积分运算将得到充分的体现. 例如，函数

$$y = \tan^5\sqrt{\ln(x^2+1)}$$

是由五个简单函数 $y=u^5$，$u=\tan v$，$v=w^{\frac{1}{2}}$，$w=\ln t$，$t=x^2+1$ 复合而成的.

2. 反函数

在函数 $y=f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量. 然而在同一过程中存在着函数关系的两个变量究竟哪个是自变量，哪个是因变量，并不是绝对的，要视问题的具体要求而定. 例如，在甲商品销售中，已知甲商品价格为 k，如果想从甲商品销售量 $x(x\geqslant 0)$ 来确定该商品销售总收入 y，则 x 是自变量，y 是因变量，其函数关系为

$$y=kx. \tag{1}$$

反之，如果想从甲商品销售总收入确定其销售量，则 y 是自变量，x 是因变量，并由式 (1) 得出函数关系为

$$x=\frac{y}{k}. \tag{2}$$

由式 (2) 知，对于每一个值 $y(y\geqslant 0)$，都有惟一的一个 x 与之对应，我们称函数 (2) 为函数 (1) 的反函数.

定义 设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对其值域 Y 中的任一值 y，都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D 中确定惟一的一个 x 与它对应，则得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此，又把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

需要注意的是，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系，因而它们的图形显示是同一条曲线；而 $y=f^{-1}(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 中将 x，y 交换得到的，因此 $x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关系自然也相当于把 x 轴和 y 轴互换一下. 也就是说把 $x=f^{-1}(y)$ 的曲线以 $y=x$ 为轴翻转 180°，所得到的曲线就是 $y=f^{-1}(x)$ 的图形. 它与曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的（见图 1 - 13).

显然，如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在，那么

$$f^{-1}[f(x)]=x,\quad x\in D,$$
$$f[f^{-1}(y)]=y,\quad y\in Y.$$

要注意的是，并不是所有的函数都有反函数存在. 例如，$y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$. 对每一个 $y>0$，与之对应的 x 不惟一，因为有两个值 $x=\pm\sqrt{y}$ 满足 $y=x^2$. 很容易看出，反函数存在的条件是：$\forall x_1, x_2\in D, x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 也就是说，f 在 D 与 Y 之间建立的是一个一一对应的关系. 由此得到，若 $f(x)$ 在 D 上单调，则它一定存在反函数.

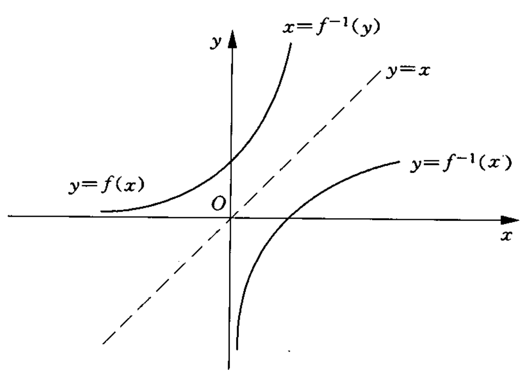

图 1 - 13

习 题 1-1

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$； (2) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$；

(3) $g(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$； (4) $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}+\sqrt{1-t^2}$.

2. 设 $f(u)$ 的定义域是 $0<u\leqslant 1$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$； (2) $f(\sin x)$.

3. 下列各对函数是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$， $g(x)=x+1$；

(2) $f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1$， $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$.

4. (1) 设 $f(x+3)=2x^3-2x^2+5x-1$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$，求 $f(x)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

第二节 具有某种特性的函数

一、有界函数

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使 $\forall x\in X$，都有
$$|f(x)|\leqslant M,$$
就称函数 $f(x)$ 在 X 上（内）有界，或称 $f(x)$ 是 X 上（内）的有界函数.

如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 X 上（内）无界. 换言之，若对任意给定的一个正数 M（不论它多么大），总存在某个 $x_0\in X$，使 $|f(x_0)|>M$，就称 $f(x)$ 在 X 上（内）无界，或称 $f(x)$ 是 X 上（内）的无界函数.

例 1 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

证 对任意 $M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，则
$$|f(x_0)|=\frac{1}{x_0}=M+1>M.$$
故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

函数有界的另外一种等价定义：如果存在常数 M_1 和 M_2，使得 $\forall x\in X$，有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，称 $f(x)$ 在 X 上（内）有界，并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上（内）的一个下界和一个上界.

易知，即便 $f(x)$ 在 X 上（内）有界，但它在 X 上（内）的上界和下界不惟一.

二、单调函数

定义 设 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $X \subset D$[1]，如果对于任意的 x_1，$x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) < f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是区间 X 上（内）的单调增加函数（或单调递增函数），也称 $f(x)$ 在 X 上（内）单调增加（或单调递增）；如果对于任意的 x_1，$x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) > f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是区间 X 上（内）的单调减少函数（或单调递减函数），也称 $f(x)$ 在 X 上（内）单调减少（或单调递减）.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数[2].

有了函数的单调性后，我们得到下列结论：

定理 单调递增（减）的函数必有反函数，且其反函数也是单调递增（减）的.

证 反函数的存在性我们在前面已介绍. 设 $f(x)$ 在 D 上严格递增，我们只要证明 $f^{-1}(x)$ 在 Y 上也是单调递增的. 用反证法. 如果不然，存在 y_1，$y_2 \in Y$，$y_1 < y_2$，但 $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$，这时 $f[f^{-1}(y_1)] \geqslant f[f^{-1}(y_2)]$，即 $y_1 \geqslant y_2$，矛盾. 故命题成立.

三、奇函数、偶函数

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x \in D$，则 $-x \in D$）. 如果对任意 $x \in D$，总有

$$f(-x) = f(x),$$

就称 $f(x)$ 是偶函数；如果对任意 $x \in D$，总有

$$f(-x) = -f(x),$$

就称 $f(x)$ 是奇函数.

奇函数的图形特点是关于原点对称，而偶函数的图形特点是关于 y 轴对称.

四、周期函数

设 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，对任意 $x \in D$，有 $x + T \in D$，且 $f(x + T) = f(x)$，就称 $f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

显然，若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $2T$，$3T$，…都是 $f(x)$ 的周期. 通常函数的周期是指它的最小正周期（如果存在的话）.

值得注意的是，并不是所有周期函数都有最小周期，例如，狄利克雷（Dirichlet）函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

容易验证，$D(x)$ 是周期函数，任何有理数都是它的周期，但是它没有最小正周期，这是因为正有理数集合中没有最小正有理数.

周期函数的图形可将一个周期上的图形逐段平移而得到，也就是说只要知道了函数在一个周期上的图形，便可作出整个函数图形.

习 题 1-2

1. 证明 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

---

[1] 除非特别说明，区间 X 可以是开区间或闭区间，也可以是半开半闭区间或无穷区间.

[2] 有的书把函数单调性定义中的不等式写作非严格的不等式，即≤或≥，而在本书中，除非特别说明，函数单调均指严格不等式意义下的单调，即严格单调.

2. 证明 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在 $(0,1)$ 内无界.

3. 证明两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

4. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2e^{-x^2}$；　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x)=x^2-3x^4+x^6$；　　(4) $f(x)=x+\sin x$.

5. 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 分别为 $(-\infty,+\infty)$ 的单调增加函数与单调减少函数. 令 $h(x)=g[f(x)]$，$\varphi(x)=f[g(x)]$，试讨论 $h(x)$ 与 $\varphi(x)$ 各自的单调性.

第三节 初等函数

一、基本初等函数

所谓基本初等函数是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这六类函数. 在高等数学中常见的函数都是由这些基本初等函数构成的. 在中学数学教材中已经学习过这些函数，在这里我们再对这些基本初等函数作些说明，帮助大家复习.

1. 常数函数

$$y=C, x\in(-\infty,+\infty).$$

它的图像是通过点 $(0,C)$，且平行 x 轴的直线（见图 1-14).

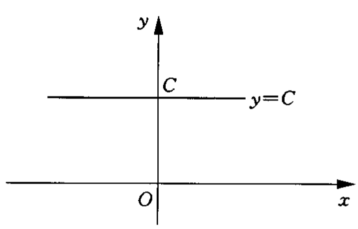

图 1-14

常数函数是有界函数、周期函数（没有最小的正周期）、偶函数. 特别是当 $C=0$ 时，它还是奇函数.

2. 指数函数

$$y=a^x,\quad x\in(-\infty,+\infty)\quad(a>0,a\neq1).$$

函数的值域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少（见图 1-15). a^x 与 $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称（见图 1-16).

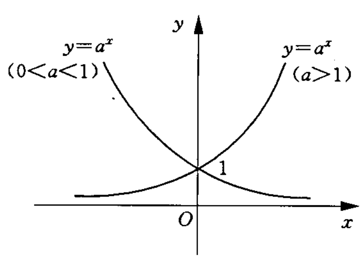

图 1-15

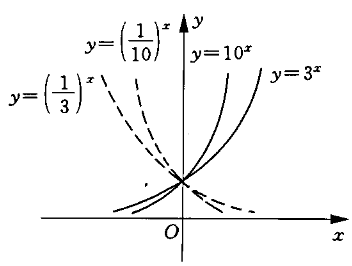

图 1-16

3. 对数函数

$$y=\log_a x,\quad x\in(0,+\infty)\quad(a>0,a\neq1).$$

对数函数与指数函数互为反函数. 因此由指数函数的性质立即可知，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，图形总经过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少（见图 1-17). $\log_a x$ 与 $\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图形关于 x 轴对称（见图1-18).