高等学校教材

Calculus

微积分

第二版

上册

闫站立 编

高等教育出版社

高等学校教材

微 积 分

第 二 版

上 册

闫站立 编

高等教育出版社

内容简介

本书是为大学非数学类理工科各专业编写的微积分教科书。全书分为三部分：（一）一元函数微积分；（二）多元函数微积分；（三）专题。分编为上、下两册。

上册(一元函数微积分)有三篇共10章。第一篇（微积分浅释）用历史的和逻辑的(即去粗取精、去伪存真)辩证统一方法，由浅入深地讲解一元函数微积分的理论和方法。第二篇(补编)是为第一篇中那些没有证明的结论给出标准的证明。第三篇(微积分的进一步应用)主要是为了学生在第二学期学习专业基础课的需要及时准备好某些其他微积分知识。

本书在内容的处理上有以下特点：(1)把不属于微积分主体部分的有关知识，编入阅(选)读或节后的注释中，目的是减少课堂讲授学时数和培养学生的阅读能力；(2)在“写给学生的话”和有关章节的注释中，选编了一些逻辑学的基本知识，目的是教给学生学习方法并培养他们正确的思维习惯，避免和纠正他们在学习微积分的过程中可能出现的逻辑错误。

习题后给出了答案、提示或选解。

图书在版编目（CIP）数据

微积分．上/闫站立编．—2版．—北京：高等教育出版社，2007.5

ISBN 978-7-04-021792-6

Ⅰ.微...　Ⅱ.闫...　Ⅲ.微积分-高等学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第047602号

策划编辑 张长虹　**责任编辑** 董达英　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 黄建英
版式设计 张　岚　**责任校对** 姜国萍　**责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	唐山市润丰印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　次	2000年7月第1版
开　本	787×960　1/16		2007年5月第2版
印　张	26.75	**印　次**	2007年5月第1次印刷
字　数	500 000	**定　价**	27.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 21792-00

写给教师的话

本书是为大学理工科各专业编写的教材。全书分为：

微积分（一）（一元函数微积分）；

微积分（二）（多元函数微积分）；

微积分（三）（专题　供理工科部分专业选用）。

自牛顿－莱布尼茨时代开始到现在的三百多年间，微积分的教科书和专著足有上百种之多，可以说，它在理论的深度上和应用的广度上都已经是非常完美的了。但是，微积分作为理工科的重要基础课，在教材内容的取舍和各部分先后次序的安排（以及教师的讲授方法）上，应当说还有许多问题有待讨论。大家对其中有些问题可能不会（也不需要）有一个一致的意见。

本书上册的修订版在内容上与第一版大致相同，只是对内容的前后次序和讲授方法做了大的修改。对于工科和部分理科专业，可以不讲本书上册的第二篇（补编）。

修订版保留了第一版的下述特点：

第一，除在“写给学生的话”中介绍了一点形式逻辑的基本知识外，正文在讲授微积分的同时，还穿插介绍了一些正确思维的方法，目的是培养学生正确思维的习惯，避免或纠正他们在学习微积分的过程中可能出现的逻辑错误。

第二，为了避免学生把近代极限论视为学习微积分的“拦路虎”，在第一篇中暂时避开了柯西的极限概念，而采用18世纪关于极限概念的所谓“无限接近”说法，作为极限概念暂时的定义。这种说法虽然粗糙，但直观明白，初学者也容易接受。当然，有些概念（譬如柯西－黎曼积分）和比较隐蔽的结论（譬如极限唯一性等），还需要用柯西的极限理论才能说明或证明。编者的目的，首先是想用深入浅出的方法，着重解释微积分的基本概念、基本理论和基本方法（当然对某些结论也作出了标准的证明），然后再讲近代极限理论、连续函数性质的证明，以及进一步讨论函数的可积性问题。我们认为，这样讲授微积分既符合微积分产生和不断完善的历史事实，也符合由浅入深的教学原则。

第三，历史上，莱布尼茨是借助几何直观先定义了函数的微分（作为起始概念），而后把导数定义为函数微分除以自变量微分的商（作为从属概念）。

自柯西以来，几乎所有的微积分教科书中，都仿效柯西的做法，把函数的导数作为起始概念，而把函数的微分看作从属概念（柯西把函数的微分定义为有限量 $dy=y'dx$）。许多学生学完微积分后，熟悉导数却不熟悉微分。本书与前两者不同，把函数的可微（函数的局部线性化）作为起始概念，并同时引出微分和导数两个概念。这样，才能真正体现出微分和导数之间的“孪生”关系。

第四，由于历史的原因，我们有时必须用两种说法才能为微积分中的某些概念和记号做出满意的解释，这就像物理学中关于光的“二象性”解释（粒子说和波动说）一样。例如，函数的增量和微分，在某些场合下它们是有限量，可在另一些场合下它们又是无穷小量。历史上，莱布尼茨和柯西开始都把函数的微分说成有限量，可是后来他们又都把微分说成无穷小量（尽管他们各自所说的“无穷小量”的含义不同）。再如，莱布尼茨当初使用记号“$\int$”，是把它看作“d”的逆运算符号，即

$$\int df(x)=f(x),d\int f(x)dx=f(x)dx\ (\int 和 d 接连运算相互抵消)。$$

可是后来，有著者也把“$\int$”看作导数运算符号“$\frac{d}{dx}$”的逆运算符号，即

$$\int \frac{d}{dx}f(x)=f(x),\frac{d}{dx}\int f(x)=f(x)。$$

尽管目前国内的教科书中都把记号“$\int f(x)dx$”看作 $f(x)$ 在某区间上原函数的一般表示，即

$$\int f(x)dx=F(x)+c\ (其中 F(x) 为 f(x) 的某一个原函数),$$

可是在积分法中不另加待定常数 c，有时是很方便的（在西方很多教科书中都是如此）。在过去的研究生入学考试题的评分标准答案中，不加 c 就扣去 1 分（满分为 3 分），未必就是合理的。或许有人会说，它是不定积分的记号，其中“不定”就必须加 c。可是，不定积分与定积分的本质区别在于，前者是（原）函数，后者是一个数值。［俄］辛钦在他的名著《数学分析简明教程》中就不用“不定积分”这个术语（而始终把它说成是原函数），恐怕原因就在于此。

编者

2006/12/20

写给学生的话

目前国内各家出版社出版的微积分教科书，尽管种类繁多，但大致分为下面三种类型：

Ⅰ理科专业（包括数学专业）用《微积分》或《数学分析》；

Ⅱ工科专业用《微积分》或《高等数学》（其中包括微积分）；

Ⅲ经济类专业用《微积分》或《高等数学》（其中包括微积分）。

因为要求不同，所以这些教材在内容的取舍和编写的方法上会有很大的差别。本书是为理工科各专业编写的微积分教科书，工科和部分理科专业可以不学本书上册的第二篇（补编）。

学习任何一门科学知识，都要花费时间和精力，掌握科学的学习方法，就会省时，省力，收到事半功倍的效果。你学习的任何一门课程，不管它属于自然科学，还是社会科学或交叉学科，根据它自身的特点，决定了学习它的科学方法。（大学）数学的特点是什么呢？抽象性和逻辑推理不能算是它独有的特点，因为任何一门理论科学都有不同程度的抽象性，并且也都用到逻辑推理。数学的特点，简单地说，就是它的任何一个结论，除少数公理（公理是通过实践检验为正确的结论）外，都必须根据概念的定义和已经证明为正确的结论，通过推理（思维的一种逻辑形式）来论证。实验科学（如物理和化学）可以通过反复实验来验证它的结论的真实性（与客观事实相符或基本相符），但是数学不能用米尺（不论最小刻度多么小）通过测量来证明勾股定理。社会科学中的一个结论，可能是大致地包括一般，但是数学中的任何一个结论，都不能有一个例外，否则，这个结论就是不正确的。

人们在实践中得到的（同类）感性认识多了，就会在头脑中产生一个概念，它是一类客观事物的本质属性（而不是个别现象）在人们头脑中的（正确）反映。概念有它的内涵（事物的本质属性）与外延（概念所反映的那一类事物）。概念是存在于人们头脑中抽象的东西，要把一个概念与另一些概念区别开来，就要借助词语称呼它，并用简明扼要的语言给它下定义。

就人们的认识过程来说，随着认识的不断深化，反映在人们头脑中的概念是可以改变的，例如古代人说的“数”可能只有1，2，3，而我们现在说的“数”不仅有自然数、分数、无理数，而且还有它们的相反数。当然，作为明确概念的定义也会改变。一门学科中的重要概念的定义，往往标志着那门学科

发展的水平，甚至会产生一种新的科学理论。

就人们的思维来说，概念必须是同一的，不能既是“东”又是“西”，似是而非，捉摸不定。不然的话，就要犯“偷换概念”的逻辑错误。

微积分（学）这门科学，研究的对象是函数，确切一点说，应当是“连续函数”或“几乎连续函数”。它的理论基础是描述函数变化状态或变化总趋势的极限理论。当你在中学里学习到数列极限（函数极限的简单情形）时，你是否也曾认为“$0.\dot{9}<1$”，或者向教师提出过“不论 $0.\dot{9}=0.999\cdots$ 中有多少个9，也不会等于1”这样的问题。那么现在反问你：“假若 $0.\dot{9}<1$，那么 $0.\dot{9}$ 比1小多少？”你不可能说出一个正数 ε（无论它有多么小）使 $1-0.\dot{9}\geqslant\varepsilon$。因此，$0.\dot{9}=1$。事实上，我们说“$0.\dot{9}=1$”是指

$$
\begin{aligned}
0.\dot{9}&=0.999\cdots=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)\\
&=\frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)\\
&=\frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1-0=1。
\end{aligned}
$$

而你向教师所提问题的那句话中，不仅包含着“事实错误”（$0.\dot{9}<1$）而且也包含有“逻辑错误”（偷换概念）。所谓“事实错误”，就是结论与事实不相符（即结论不真实）；所谓“逻辑错误”，就是把一种思想与另一种思想不正确地联结在一起（即思维不正确）。在上述那句话“不论 $0.\dot{9}=0.999\cdots$ 中有多少个9，也不会等于1”中，前面说的是 $0.\dot{9}=0.999\cdots$（无限循环小数），而在得出结论时又把它偷换成 $0.999\cdots9$（有限小数）。这样，就违反了思维中的“同一律”。

假如有人说：“我早晨吃了两碗饭，所以地球绕着太阳转。”人们或者哈哈大笑，或者会说“这是胡说八道”。可是，有些逻辑错误，本质上与上面的笑话没有两样，却常常不为人们所重视。譬如，有本学习指导书中竟把

“设有正数 β_i（$i=0,1,2$）。若对于任意正数 t，都有 $\beta_1\leqslant\frac{2}{t}\beta_0+\frac{t}{2}\beta_2$，则 $\beta_1^2\leqslant4\beta_0\beta_2$”的证明写成：

“$\beta_1\leqslant\frac{2}{t}\beta_0+\frac{t}{2}\beta_2$，即 $\beta_2t^2-2\beta_1t+4\beta_0\geqslant0$。由于 $\beta_2t^2-2\beta_1t+4\beta_0\geqslant0$ 对任

意$t>0$都成立，故判别式必非正，即$4\beta_1^2-16\beta_0\beta_2\leqslant 0$。由此得$\beta_1^2\leqslant 4\beta_0\beta_2$"。细心的中学生都能够看出其中"指鹿为马"、"张冠李戴"之类的严重逻辑错误，并能给出一个简单的证明（因为它是中学生都应当会做的简单习题）。有些人重视事实错误，而轻视逻辑错误，实际上，从某种意义上说，逻辑错误比事实错误更有害，而且不容易纠正。数学中的一些结论一般说都是正确的，如果不去避免和纠正证明中的逻辑错误，那么做证明题还有什么意义呢！

读者知道，数学中所说的"相等"或"等于"（记成"="）都是就研究的具体对象在某种确定的含义下才有意义，离开研究的具体对象和确定的含义来谈论"相等"是没有意义的，而且有可能犯逻辑错误，从而造成事实错误。不论何时何地，即使最后的结论是真实的，逻辑错误也是不允许犯的，因为这种思维是不正确的，或者说是不合逻辑的。学习高等数学（这里指微积分）当然离不开初等数学的那些知识，但是读者要小心，由于研究的对象变了，不要把限于初等数学才能运用的术语（包括记号）和结论，随意照搬到高等数学中来。这就是说，对于高等数学中的某些概念和结论，你用初等数学的观念是不可理解的。

不论是初等数学，还是高等数学，其中都会有很多概念和定理（正确的重要结论）。概念的内涵是用定义这一逻辑形式说明的，假若不理解定义说的是什么，就会在形成判断（思维的逻辑形式）和进行推理时出现逻辑错误，进而有可能造成事实错误。学习过程中，当然应该开动脑筋，独立思考，灵活运用，但是当你还没有完全理解概念的定义和定理的意思时，千万不要随意去改动其中一个字或一个词，甚至一个记号，因为这样做的结果有可能造成逻辑或事实上的错误。因此，当你还不很理解一个概念时，可以先把它的定义死记硬背下来，在以后的不断学习过程中会逐渐理解它。非数学类专业的读者学习高等数学时，常常只记定义与结论（不记定义与结论就更不对了），而不喜欢看定理的证明。其实，看一看证明（即论证），一是可以加深你对概念的理解程度，二是从看定理的证明中有时会学习到解题方法。

微积分（学）的英文名称"calculus"，有计算（或演算）的含义。可见，读者学习微积分必须做一定数量的习题（尤其是求函数的导数与积分），不然的话，就是"上山打柴而空手归"。做微积分的习题时，开始都是照着书上或教师在黑板上举的例题，"依葫芦画瓢"。当你还不很理解其中的道理时，尤其应当如此，即使把例题抄一遍，对你也往往会有好处。

在做微积分习题时，也要像在中学里做数学习题那样，算式要整齐和有规矩，还要正确使用标点符号。遇到有不会做的习题时，可以先把它放在一边，去做其他的习题（注意，有时做下面的习题时会用到上面一题的结论。遇到这种情形，你就先承认它的结论）。你做题多了，熟能生巧，再回过头来去做

原来不会做的习题时，或许会感到它很容易。一般的微积分教科书中，留给学生做的习题，大体上分为两类：第一类是为提高初学者的熟练程度而编选的习题（譬如求极限、导数、微分和积分的一般习题）；第二类是为培养初学者的联想和应用能力而编选的与当前所讲内容有关的习题。对于那些比较一般（不带有任何技巧）的计算题，你在草纸上演算一下后再看一下答案就行了；而对于那些你认为是有保留价值的习题（多数是证明题），就应当像教科书中的例题那样，有规矩地写在作业本或卡片上。

最后，我们把学习微积分的方法归纳为四个字：

"说"，就是学说微积分中主要概念的定义；

"记"，就是记住基本概念的定义和主要结论（包括定理）；

"练"，就是做够一定数量的练习（尤其是求函数的微分或导数和函数的积分）；

"看"，就是在达到以上要求的基础上，再看一看有一定技巧的习题选解。

编者

2006/12/20

目 录

第二篇　补编（供理科专业选用）

第三篇　微积分的进一步应用

第 0 章

阅读（中学数学知识摘要）

笛卡儿的变量是数学的转折点. 正是由于有了变量，运动和辩证法才进入了数学.

恩格斯

现在的中学数学课本中，都已经讲到变量和函数、数列和级数（甚至有的“示范高中”还讲授了初等微积分）. 尽管大家都熟悉中学数学，这里还是有必要再把那些以后用到的中学数学基础知识总结一下. 读者再读一读它，或许能从中学习到一些你还不曾知道的新知识. 其中有许多习题，我们都给出了解答，目的是想告诉读者以后做习题的方法和书写格式. 当然，这些习题的结论，对你以后学习微积分或做习题是有用的.

§0-1　集合及其运算

1. 集合　把具有某种特性的对象（或事物）放在一起就说它们组成一个集合（简称为集），其中每一个对象称为该集合的元素（简称为元）. 集合与元素在近代数学中都作为原始概念，就像几何学中的点、直线和平面. 当不需要写出集合的具体元素时，就用大写字母 A，B，C，… 表示集合；当有必要写出集合的元素时，可以把集合的所有元素都写在一个花括号内（同一个元素不准重复出现）表示这个集合，也可以表示成形式 $\{x|P(x)\}$，其中 x 表示元素，而 $P(x)$ 表示元素 x 具有性质 P. 例如，全体正整数组成的集合可以表示成

$$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\} \qquad \text{或者} \qquad \{n \mid n \text{ 为正整数}\}$$

集合的元素有时用小写字母 a，b，c，…表示．a 是集合 A 的元素就记成"$a \in A$"，读作"a 属于 A"；a 不是集合 A 的元素就记成"$a \notin A$"，读作"a 不属于 A"．空集作为一个特殊的集合不含任何元素，记成 $\varnothing$．

2. 集合的运算　两个集合 A 与 B 含有相同的元素时就记成"$A = B$"，读作"A 等于 B"．若集合 A 的元素都是集合 B 的元素时就记成"$A \subset B$"，读作"A 包含在 B 中"或"B 包含 A"，也称 A 为 B 的子集（特别地，$A = B$ 时，A 也算作 B 的子集）．空集可看作任何集合的子集．

当讨论集合之间的运算时，首先需要约定一个"大集合"U（在集合论中称 U 为全集），而所讨论的集合都是 U 的子集．设 A 与 B 都是 U 的子集，把 A 与 B 的所有元素放在一起组成的新集合记成"$A \cup B$"，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

称它为 A 与 B 的并（集）；而把 A 与 B 的公共元素放在一起组成另一个新集合记成"$A \cap B$"，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

称它为 A 与 B 的交（集）．假若 A 与 B 没有公共元素，即 $A \cap B = \varnothing$，就说它们不相交．属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的新集合记成"$A - B$"或"$A \setminus B$"，即

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

称它为 A 减去 B 的差（集）．设 A 为全集 U 的子集，则称差

$$U - A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

为 A（关于 U）的余集或补集，记成 A^c．

§0-2　实数

用单位量去测量同类量时就得到抽象的"数"．在人们的日常生活或工程技术实践中，有理数（正整数、负整数、零、正分数与负分数）足够用了．但在理论研究工作中，有必要把数的概念进一步扩张，因为从精确意义上说，有理数不足以表示连续量的大小或多少．早在公元前 5 世纪时的古希腊人认为线段是由不能再分割的最小"原子"组成的，当把取作单位的线段的长度看作 m 个原子组成时，每个原子的长度为 $\frac{1}{m}$，而含 n 个原子的线段的长度就是 $\frac{n}{m}$（有理数）．后来不久，古希腊人又发现，边长为一个单位长的正方形的对角线的长度不是有理数．事实上，假若它是有理数，则它可以表示成既约分数

$\frac{n}{m}$（n 与 m 没有大于 1 的公因数）．根据勾股定理，$\left(\frac{n}{m}\right)^2=1^2+1^2=2$，即 $n^2=2m^2$，故 n 为偶数，设 $n=2k$（k 为正整数），则 $(2k)^2=2m^2$ 或 $m^2=2k^2$，故 m 也是偶数．这样一来，n 与 m 就有公因数 2，与 $\frac{n}{m}$ 是既约分数的假设相矛盾．现在，人们都知道，它是无理数 $\sqrt{2}$（可是，无理数理论一直到 19 世纪 70 年代才建立起来）．

大家都知道，任一个有理数 $\frac{k}{m}$（m 为正整数，k 为整数）都可以用数轴（有原点和单位的有向直线）上的某一个点表示．首先把单位（线段）OE 分成 m 等份，若 k 是正整数，在数轴上自原点 O 朝着正方向取线段 OA，使 OA 的长度等于 k 个等份（即长度为 $\frac{k}{m}$），于是点 A 就表示正有理数 $\frac{k}{m}$；若 k 是负整数，在数轴的负方向上取点 A'，使 OA' 的长度等于 $\frac{-k}{m}$（图 0－1）．

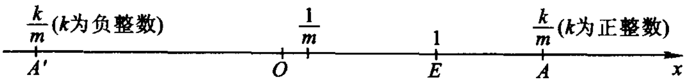

图 0－1

如果设想在数轴上画出表示所有可能的有理数的点（称为有理点），则数轴将不能被这些有理点所填满，即在数轴上还会留下很多空隙．例如，图 0－2 中那个边长为一个单位的正方形，它的对角线的长度所对应的点 A 就是这些空隙中的一个．这表明，所有的有理点组成的集合与数轴上所有点组成的集合相比较是不完备的，或者说是不连续的．我们就把数轴上除有理点外的其他点（空隙）称为“无理数”所对应的无理点（这里当然不能算是无理数的定义）．有理数与无理数合称为实数．于是，实数集合与数轴上点的集合是一一对应的．为方便起见，我们以后把实数与数轴上表示实数的点不加区别，例如“数 a”有时就说成“点 a”．这当然是就它们之间的一一对应关系而言，而不意味着“实数”就是数轴上的“点”．至于“实数”到底是什么，读者可以不必管它，只要知道它的运算性质（如同有理数那样）就行了．

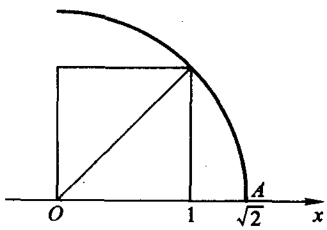

图 0－2

1. 绝对值　实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

在数轴上，实数 a 的绝对值 $|a|$ 表示点 a 到原点 O 的距离.

假若引入记号

$$\operatorname{sgn} a=\begin{cases}1, & a>0\\ 0, & a=0\\ -1, & a<0\end{cases}$$

其中 sgn 是 sign（记号，符号）的缩写，则实数 a 的绝对值

$$|a|=a\cdot\operatorname{sgn} a$$

实数的绝对值有下面的性质：

(i) $|a|\geqslant 0$　　(ii) $\pm a\leqslant|a|$ 或 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

(iii) $|-a|=|a|$　　(iv) $|ab|=|a||b|$

(v) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　　(vi) $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

除最后一个性质外，其余性质都是很明显的. 下面只证性质（vi）：

由 $\pm a\leqslant|a|$ 与 $\pm b\leqslant|b|$ 推出 $\pm(a+b)\leqslant|a|+|b|$，故

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

而 $|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|$. 又因为

$$|a|=|(a\pm b)\mp b|\leqslant|a\pm b|+|b|$$

所以，$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|$；同理 $|b|-|a|\leqslant|b\pm a|$. 因此

$$\pm(|a|-|b|)\leqslant|a\pm b| \text{ 或 } ||a|-|b||\leqslant|a\pm b|$$

2. 算术根　正数 a 的 n 次正方根 $p(p>0$ 且 $p^n=a)$ 称为 a 的 n 次算术根，记成 $\sqrt[n]{a}$（规定 $\sqrt[n]{0}=0$）. 特别，称 $\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）为 a 的算术平方根. 因此

$$\sqrt{(-5)^2}=5\ (\neq -5)$$

对于任何实数 x，总有 $\sqrt{x^2}=|x|$；除已知 $x\geqslant 0$ 外，一般不能写成 $\sqrt{x^2}=x$（因为 $x<0$ 时它不成立）. 一个正数的偶次方根不是唯一的，而算术根是唯一的. 引入算术根的主要目的是在等式两端作开方运算时，等式（两端取算术根时）还能够保持成立.

3. 区间　实数的集合

$$(a,\ b)=\{x\mid a<x<b\} \text{ 与 } [a,\ b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

依次称为开区间与闭区间. 有时还遇到集合

$$[a,\ b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}\ \text{（左闭右开区间）}$$

$$(a,\ b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}\ \text{（左开右闭区间）}$$

因为其中 a 与 b 都是实数，所以称它们为有限区间. 全体实数组成的集合记成 $\mathbf{R}$ 或 $(-\infty,\ +\infty)$，其中"$-\infty$"与"$+\infty$"都是记号（暂且读作"负无穷大"与"正无穷大"），而不是实数. 但对于任何实数 x，我们约定可以记

成“$-\infty<x<+\infty$”. 它与下面这些不解自明的区间

$$(-\infty,a),(-\infty,a],(a,+\infty),[a,+\infty)$$

都称为无限区间. 以后为方便起见，不论是哪一种类型的区间，就统一地记成$\langle a,b\rangle$，这里a可以是$-\infty$，而b可以是$+\infty$.

对于给定的正数ε，不等式$|x|<\varepsilon$与$-\varepsilon<x<\varepsilon$是同解的，因为它们的解都是集合$(-\varepsilon,\varepsilon)$. 而对于不等式$|x|>\varepsilon$（$\varepsilon>0$），或者$x>\varepsilon$（当$x>0$时），或者$-x>\varepsilon$（当$x<0$时）. 因此

$$|x|>\varepsilon\ (\varepsilon>0)\ \text{当且仅当}\ x>\varepsilon\ \text{或}\ x<-\varepsilon$$

用集合的记号表示，就是

$$\begin{aligned}\{x\mid |x|>\varepsilon>0\}&=\{x\mid x>\varepsilon>0\}\cup\{x\mid x<-\varepsilon<0\}\\&=(\varepsilon,+\infty)\cup(-\infty,-\varepsilon)\end{aligned}$$

习题

读者在中学数学中，都已经知道如下等式或不等式（求数列极限时，有时会用到它们）：

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$;

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) 牛顿二项式公式：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0\leqslant k\leqslant n)$;

(4) 设a，b为正数，则有$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$，其中等式成立当且仅当$a=b$.

现在，请你再证下面两个著名不等式（读者学习数列的极限时，这些不等式都是很有用的）.

(5) 伯努利（Bernoulli）不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

其中x_1，x_2，…，x_n同符号且都大于-1. 特别地，

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (x>-1)$$

(6) $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

选解

(6) 因为