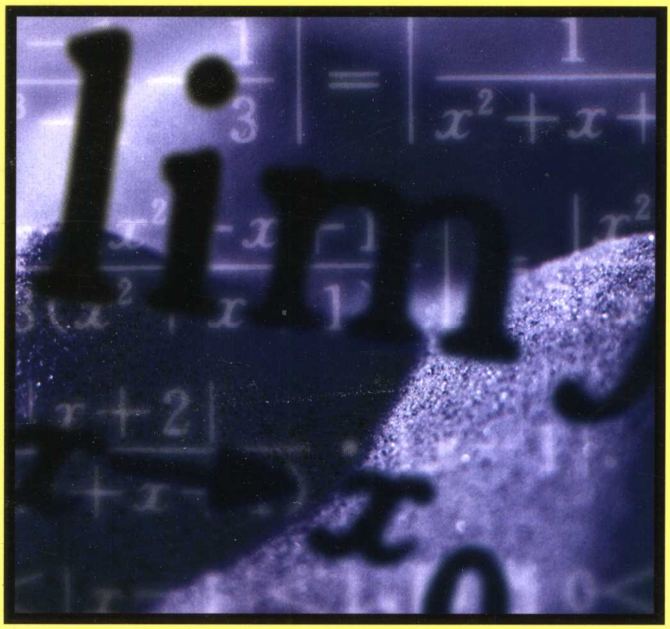
南开大学公共数学系列教材

高等数学辅导

生化类

（下册）

赖学坚／编著



南开大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导：生化类．下册 / 赖学坚编著．—天津：南开大学出版社，2007.8

（南开大学公共数学系列教材）

ISBN 978-7-310-02735-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.赖…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 114025 号

南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路 94 号　　邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339　23500755

营销部传真：(022)23508542　　邮购部电话：(022)23502200

*

河北省迁安万隆印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月第 1 次印刷

787×960 毫米　16 开本　13.875 印张　261 千字

定价：24.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

总　序

高等数学是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课。由于各个学科门类的情况差异较大,该课程又形成了包含多个层次多个类别的体系结构。层次不同,类别不同,教学目标和教学要求也就有所不同,课程内容的深度与宽度也就有所不同,自然所使用的教材也应有所不同。

教材建设是课程建设的一个重要方面,属于基础性建设。时代在前进,教材也应适时更新而不能一劳永逸。因此,教材建设是一项持续的不可能有“句号”的工作。20 世纪 80 年代以来,南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材。其中,如《文科数学基础》一书作为“十五”国家级规划教材由高等教育出版社于 2003 年出版,经过几年的使用取得较好收效。这些教材为南开的数学教学作出了重要贡献,也为公共数学教材建设奠定了基础,积累了经验。

21 世纪是一个崭新的世纪。随着新世纪的到来,人们似乎对数学也有了一个崭新的认识:数学不仅是工具,更是一种素养,一种能力,一种文化。已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑。他尤其对大学生们寄予厚望。他不仅关心着数学专业的学生,也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子。2004 年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题字,并与获奖学生合影留念。这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策。另一方面,近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现。这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求。而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进。现在呈现在读者面前的便是南开大学公共数学系列教材。

本套教材的规划和出版得到了南开大学教务处、南开大学数学科学学院和南开大学出版社的高度重视、悉心指导和大力支持。此项工作是南开大学新世纪教学改革项目“公共数学课程建设改革与实践”的重要内容之

一。编委会的各位老师为组织、规划和编写本套教材付出了不少心血。此外,还有很多热心的老师和同学给我们提出了很多很好的建议。对来自方方面面的关心、支持和帮助,我们在这里一并表示衷心感谢。

由于我们的水平有限,缺点和不足在所难免,诚望读者批评指正。

南开大学公共数学系列教材编委会

2006年6月

前　言

在南开大学数学学院领导的组织和指导下，大力进行21世纪数学系列教材建设，使教学质量不断提高，取得了可喜的成绩，现在按《高等数学（生化类）教学大纲》，为配合教材《高等数学（生化类）》，编写出这本《高等数学辅导（生化类）》作为配套教学用书，以供学生学习之用。

每章含四部分：第一部分为“基本要求”；第二部分为“内容提要”，对该章的主要概念和理论作简单的叙述；第三部分是该章部分习题的解析；第四部分是典型例如解析，核心是第三、第四部分。第三部分是为了帮助学生搞清基本概念、基本理论和掌握基本运算法则及其技巧。第四部分是典型例题解析，在这里进一步围绕基本概念、基本理论和基本技巧，结合综合例题解析，把各种解题技巧、方法、思想尽量详细地介绍给读者。在例题解析中，强化解题前的分析和解题后的总结，以利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

本书具有如下特点：

1.注重基本概念、基本理论、基本思想及基本计算的讲解，通过大量的例题解析、讨论，加强启发学生对基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握；强调解题的思想和方法，注重引导读者灵活运用所学知识去分析问题和解决问题；通过提供一题多解，启发读者学会从不同角度去分析问题和解决问题。

2.本书所选的例题具有一定的广度和深度，具有一定的覆盖面和综合性，针对教材中的重点、难点及读者易犯的错误作了详细的解析。

3.注重材料中前后知识综合运用的例题解析，以利于读者的复习和对知识点的融会贯通，提高读者的综合能力。

本书可作为生物、化学，医学、农学各专业大学生学习高等数学的辅导用书，也可以作考研复习和教师教学参考之用。

本书是高等数学教学部任课老师教改实践和教学研究的共同成果之一，姜作廉、张效成教授精心组织、指导及策划此书的编写，参加研讨、编写

及审阅工作的有姜作廉、胡龙桥、陈怀鹏、陈学民、由同顺等教授。

本书的编写得到了南开大学"新世纪教学改革"项目"公共数学课程建设改革与实践"的资助,得到了南开大学教务处和南开大学数学学院的大力支持和帮助;薛锋老师为周密细致的组织协调工作花费了极大的精力,为此书成书起了重要作用;韩志欣、杜瑞杰等同志为本书初稿进行校正并用CTex进行录入与编辑工作,在此向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有错误、疏漏和不妥之处,诚恳地希望得到同行及读者的批评指正。

编　者

2006年11月于南开大学

目　录

第十一章　多元函数微分学 …………………………………………… (1)
11.1　基本要求 …………………………………………… (1)
11.2　内容提要 …………………………………………… (1)
11.3　习题 11 部分题目解析 …………………………………………… (10)
11.3.1　多元函数及其连续性 …………………………………………… (10)
11.3.2　偏导数与全微分 …………………………………………… (11)
11.3.3　复合函数微分法 …………………………………………… (13)
11.3.4　隐函数的微分法 …………………………………………… (16)
11.3.5　几何应用 …………………………………………… (19)
11.3.6　极值 …………………………………………… (21)
11.4　典型例题解析 …………………………………………… (24)
11.4.1　多元函数的连续性与可微性 …………………………………………… (24)
11.4.2　复合函数与隐函数的微分法 …………………………………………… (27)
11.4.3　几何应用 …………………………………………… (33)
11.4.4　极值 …………………………………………… (34)
第十二章　重积分 …………………………………………… (42)
12.1　基本要求 …………………………………………… (42)
12.2　内容提要 …………………………………………… (42)
12.3　习题 12 部分题目解析 …………………………………………… (47)
12.3.1　二重积分的性质 …………………………………………… (47)
12.3.2　直角坐标系下二重积分的计算 …………………………………………… (48)
12.3.3　极坐标系下二重积分的计算 …………………………………………… (55)
12.3.4　在直角坐标系下计算三重积分 …………………………………………… (61)
12.3.5　利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分 …………………………………………… (66)
12.3.6　重积分的应用 …………………………………………… (69)
12.4　典型例题解析 …………………………………………… (73)
12.4.1　二重积分的计算 …………………………………………… (73)

12.4.2 有关二重积分证明题的例子 …………………… (84)
12.4.3 三重积分 …………………… (87)
12.4.4 重积分的应用 …………………… (91)
12.4.5 利用变换计算重积分 …………………… (94)
第十三章 曲线积分与曲面积分 …………………… (98)
13.1 基本要求 …………………… (98)
13.2 内容提要 …………………… (98)
13.3 习题 13 部分题目解析 …………………… (105)
13.3.1 第一型曲线积分 …………………… (105)
13.3.2 第二型曲线积分 …………………… (106)
13.3.3 格林公式、曲线积分与路径无关的条件 …………………… (107)
13.3.4 第一类曲面积分 …………………… (110)
13.3.5 第二类曲面积分及高斯公式 …………………… (113)
13.3.6 斯托克斯公式 …………………… (118)
13.4 典型例题解析 …………………… (118)
13.4.1 第一类曲线积分 …………………… (118)
13.4.2 第二类曲线积分 …………………… (123)
13.4.3 格林公式 …………………… (125)
13.4.4 曲线积分与路径无关的条件 …………………… (128)
13.4.5 高斯公式 …………………… (132)
第十四章 无穷级数 …………………… (137)
14.1 基本要求 …………………… (137)
14.2 内容提要 …………………… (137)
14.3 习题 14 部分题目解析 …………………… (142)
14.3.1 常数项级数的敛散性及其性质 …………………… (142)
14.3.2 正项级数 …………………… (144)
14.3.3 条件收敛与绝对收敛 …………………… (145)
14.3.4 函数项级数与幂级数 …………………… (147)
14.3.5 函数的幂级数展开 …………………… (151)
14.3.6 傅里叶级数 …………………… (153)
14.4 典型例题解析 …………………… (155)
14.4.1 级数的基本概念与性质 …………………… (155)

14.4.2 正项级数的收敛性判别法 …………………………… (156)
14.4.3 任意项级数 …………………………………………… (162)
14.4.4 幂级数 ………………………………………………… (166)
14.4.5 函数的幂级数展开 …………………………………… (173)
14.4.6 傅里叶级数 …………………………………………… (176)
第十五章 微分方程 ……………………………………………… **(179)**
15.1 基本要求 ………………………………………………… (179)
15.2 内容提要 ………………………………………………… (179)
15.3 习题 15 部分题目解析 …………………………………… (183)
15.3.1 可分离变量的方程 …………………………………… (183)
15.3.2 一阶线性方程及全微分方程 ………………………… (185)
15.3.3 高阶微分方程的特殊类型 …………………………… (186)
15.3.4 常系数线性方程 ……………………………………… (188)
15.4 典型例题解析 …………………………………………… (192)
15.4.1 微分方程的概念 ……………………………………… (192)
15.4.2 一阶微分方程及可降阶的高阶微分方程 …………… (194)
15.4.3 常系数线性方程 ……………………………………… (202)
15.4.4 应用举例及杂例 ……………………………………… (207)

第十一章　多元函数微分学

11.1　基本要求

1.理解二元函数的极限及其连续性.

2.理解偏导数的概念以及全微分的概念,会求函数的微分.

3.熟练掌握复合函数与隐函数的微分法,会求复合函数与隐函数的二阶偏导数.

4.会求空间曲线的切线与法平面;会求曲面的切平面与法线.

5.掌握求二元函数极值的方法;掌握拉格朗日乘数法.会求二元函数在有界闭区域上的最大值和最小值.会利用多元函数理论解决一些简单的实际问题.

11.2　内容提要

1.多元函数的概念

设有三个变量 x,y,z,如果对于变量 x,y 在变化范围内每一对组成的点 $P(x,y)\in D$,依照一定的法则 f,变量 z 总有唯一的值与之对应,则称变量 z 是变量 x,y 的二元函数,记为

$$z=f(x,y),$$

称 D 为函数 $f(x,y)$ 的定义域.

类似地,可定义三个以上自变量的函数.

2.二元函数的极限及连续性

定义 1　设 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使对于适合不等式 $0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)\in D$,都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

二元函数的极限要求点 $P(x,y)$ 以任何方式、任何方向、任何路径趋向 $P_0(x_0,y_0)$ 时，均有 $f(x,y)\to A$. 因此，倘若 $P(x,y)$ 沿两条不同的路径 L_1, L_2 趋向 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限不相等，则可断定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在. 这是一个证明多元函数极限不存在的有效的方法.

定义 2 设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 点的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点连续. 如果 $f(x,y)$ 在 D 内每一点均连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

一切多元初等函数在其定义域内是连续的. 连续函数有下列性质:

(1) 如果 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界且必在 D 上取得它的最大值和最小值.

(2) 如果 $f(x,y)$ 在连通区域 D 上连续，P_1, P_2 为 D 内任意两点且 $f(P_1)<f(P_2)$，则对任意实数 μ, $f(P_1)<\mu<f(P_2)$，至少存在一点 $P_0\in D$，使得 $f(P_0)=\mu$.

3. 偏导数

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限值为 $z=f(x,y)$ 在 P_0 点处对变量 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\text{或 } f'_x(x_0,y_0),\ z'_x(x_0,y_0)$$

即

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

同样可定义 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$，或 $f'_y(x_0,y_0)$, $z'_y(x_0,y_0)$:

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

偏导数的几何意义: $f'_x(x_0,y_0)$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y_0)\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,$

$f(x_0,y_0))$处的切线对 x 轴的斜率；$f_y'(x_0,y_0)$是曲线$\begin{cases} z=f(x_0,y) \\ x=x_0 \end{cases}$在点 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线对 y 轴的斜率.

4.全微分

(1)**定义**　设 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，如果

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 是与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$为 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$时 ρ 的高阶无穷小，则称 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处可微；$A\Delta x+B\Delta y$ 称为$f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处的全微分，记为 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$：

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y.$$

当 $f(x,y)$在 $P(x,y)$可微时，$A=\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$，$B=\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$. 于是

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y'(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

若 $f(x,y)$在(x,y)可微，则 $f(x,y)$在(x,y)连续. 反之不尽然. 如果 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$在$(x,y)$连续，则 $f(x,y)$在 $P(x,y)$可微.

类似地，可定义三元以上函数的全微分.

(2)全微分的运算法则

设 u,v 是可微的多元函数，则 $u\pm v$，cu(c 为常数)，uv，$\dfrac{u}{v}(v\neq 0)$均为可微函数，而且

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v,$$
$$\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u,$$
$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v,$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

(3)全微分的应用

可利用微分来求函数增量与函数的近似值：

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

5.复合函数微分法

(1)定理　设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$,如果 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$在点 $P(x,y)$处有连续偏导数,并且 $f(u,v)$在对应点$(u(x,y),v(x,y))$处有连续偏导数,则复合函数 $f[u(x,y),v(x,y)]$在点 $P(x,y)$处有连续偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2)设 $z=f(u,v,w)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $w=w(x,y)$,如果 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $w=w(x,y)$在点(x,y)处有连续偏导数,并且 $f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数,则复合函数 $f[u(x,y),v(x,y),w(x,y)]$在点(x,y)处有连续偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

特别地,对于函数 $z=f(x,u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

一般而言,$\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial w}$仍然是以 u,v,w 为中间变量,x,y 为自变量的复合函数,对它们求偏导数时必须重复使用上述的复合函数求导法.

(3)全导数

设 $z=f(u,v,w)$可微,$u=u(t)$, $v=v(t)$, $w=w(t)$都是 t 的可导函数,则 $z=f[u(t),v(t),w(t)]$是 t 的可导函数,且有全导数公式

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

类似地,对于函数 $z=f[u(x),v(x)]$,具有全导数公式

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

对于其他情况,都可以类似推出其求偏导数的公式.

对于上述公式不必刻意去记忆,但要深刻理解.一般一个函数对某自变量的偏导数的结构为:

1°　出现的项数 = 中间变量的个数;

2°　每一项 = 函数对某中间变量的偏导数乘该中间变量对其指定自变量的偏导数.即用一元复合函数求导法则来求每一项.

6.全微分形式不变性

设 $z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$都具有连续偏导数,则 $f[u(x,y),v(x,y)]$可微,而且

$$dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

这就是一阶全微分形式不变性.

同样,若 $z=f(u,v,w)$,则

$$dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw.$$

可利用全微分形式不变性,直接先求出复合函数或隐函数的全微分,然后求出复合函数或隐函数的偏导数.

7.隐函数微分法

(1)设 $F(x,y)$具有连续偏导数,而且 $F'_y\neq 0$,则由 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$具有连续导数,而且

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

(2)设 $F(x,y,z)$具有连续偏导数,而且 $F'_z\neq 0$,则由 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$具有连续偏导数,而且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

8.高阶偏导数

(1)定义　$f(x,y)$的一阶偏导数 $f'_x(x,y)$与 $f'_y(x,y)$的偏导数,称为 $f(x,y)$的二阶偏导数,通常记为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}=z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}=z''_{xy}\text{(混合偏导数)};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}=z''_{yx}\text{(混合偏导数)};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}=z''_{yy}.$$

高于二阶的偏导数可以类似地定义与表示.

定理 如果$f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)$在$(x,y)$连续,则这两个混合偏导数相等.即混合偏导数与求导次序无关.

(2)复合函数的二阶偏导数求法

1° 首先用复合函数求偏导的法则或用全微分形式不变性,求出一阶偏导数.

2° 然后利用求导的四则运算法则求二阶偏导数.特别对于抽象函数$z=f(u,v)$,一般采用记号f'_1和f'_2分别代替$\frac{\partial f}{\partial u}$和$\frac{\partial f}{\partial v}$,注意$f'_1(u,v),f'_2(u,v)$仍是复合函数,对它们求偏导时必须重复使用复合函数求导法,并且用记号$f''_{11},f''_{12},f''_{21},f''_{22}$分别代替记号$f''_{uu},f''_{uv},f''_{vu},f''_{vv}$,这样较为简便且不易出错.同样对于复合函数$f(u,v,w)$,类似的记号$f''_{12}$表示$f$对第一、第二中间变量的二阶偏导;$f''_{23}$表示$f$对第二、第三中间变量的二阶偏导;如此等等.

(3)隐函数的二阶偏导数求法

方法有两种,设$z=z(x,y)$由方程$F(x,y,z)=0$所确定.

方法1: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}\left(=-\frac{F'_1}{F'_3}\right),\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}\left(=-\frac{F'_2}{F'_3}\right)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}(F'_1)F'_3-F'_1\frac{\partial}{\partial x}(F'_3)}{(F'_3)^2}$$

$$=-\frac{\left[\left(F''_{11}+F''_{13}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)F'_3-F'_1\left(F''_{31}+F''_{33}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]}{(F'_3)^2}.$$

再将$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1}{F'_3}$代入上式后化简即可;

同样可求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

方法 2：　将方程 $F(x,y,z)=0$ 两边分别同时对 x 和 y 分别求偏导数，得

$$F_1' + F_3'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ F_2' + F_3'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

对上述式子同时分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$F_{11}'' + F_{13}''\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + F_3'\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(F_{31}'' + F_{33}''\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0;$$

$$F_{12}'' + F_{13}''\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + F_3'\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(F_{32}'' + F_{33}''\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0;$$

$$F_{22}'' + F_{23}''\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + F_3'\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(F_{32}'' + F_{33}''\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0;$$

$$\vdots$$

从上述等式中逐步解出$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\cdots$,例如

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\left[F_{11}'' + 2F_{13}''\dfrac{\partial z}{\partial x} + F_{33}''\cdot\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}{F_3'},$$

再将$\dfrac{\partial z}{\partial x}$的表达式代入即可.

9.空间曲线的切线和法平面

设空间曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \\ z = z(t), \end{cases}$$

函数 $x(t),y(t),z(t)$可微，且 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$不全为零，$t_0\in[\alpha,\beta]$，则曲线 C 上 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$点处的切线方程为

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)};$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0.$$

10.空间曲面的切平面与法线

曲面 S 的方程为 $F(x,y,z)=0, M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$.设 F'_x,F'_y,F'_z 在 M_0 点连续,而且不全为零,则曲面在 M_0 处的法向量为

$$n=\{A,B,C\},$$

其中 $A=F'_x(x_0,y_0,z_0)$, $B=F'_y(x_0,y_0,z_0)$, $C=F'_z(x_0,y_0,z_0)$,在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (*)$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \qquad (**)$$

如果 S 是由显函数 $z=f(x,y)$所确定,则 $A=f'_x(x_0,y_0)$, $B=f'_y(x_0,y_0)$, $C=-1$.以此 A,B,C 用公式(*),(**)来计算切平面方程和法线方程.对于 S 由 $y=g(z,x)$或由 $x=h(y,z)$确定的情形,用类似的方法求 A,B,C.

11.二元函数的极值

(1)定义 设 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义,如果对该邻域内的一切点(x,y)都有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0) \quad (f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)),$$

则称 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$取得极大值 $f(x_0,y_0)$(极小值 $f(x_0,y_0)$),称(x_0,y_0)为 $f(x,y)$的极大值(极小值)点.极大值点与极小值点统称为极值点.

(2)极值的必要条件和充分条件

定理 1(必要条件) 设 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$具有一阶偏导数,而且 $P_0(x_0,y_0)$为 $f(x,y)$的极值点.则 $P_0(x_0,y_0)$必为 $f(x,y)$的驻点,即

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

定理 2(充分条件) 设 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$某邻域内有连续的二阶偏导数,(x_0,y_0)为 $f(x,y)$的驻点(即 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$).记

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0).$$

则

(1)当 $\Delta=B^2-AC<0$ 时,$P_0(x_0,y_0)$是 $f(x,y)$的极值点,而且当 $A>0$ 时,$f(x_0,y_0)$是极小值;当 $A<0$ 时,$f(x_0,y_0)$是极大值;