



金博士

轻巧夺冠

同步讲解

全国著名特级、高级教师联合编写

北师大版

八年级数学

下



青岛出版社
Qingdao Publishing House

QINGQIAODUOGUAN

金博士

轻巧夺冠

同步讲解

全国著名特级、高级教师联合编写

北师大版

八年级数学 下

主 编 刘 茜

编 委 刘 茜 隋东红 李延亮 江 华 王曙光



青 岛 出 版 社
Qingdao Publishing House

QINGQIAODUOGUAN

书 名 金博士轻巧夺冠·同步讲解(北师大版八年级数学①)
作 者 《金博士轻巧夺冠》编委会
出版发行 青岛出版社
社 址 青岛市徐州路 77 号(266071)
本社网址 <http://www.qdpub.com>
邮购电话 13335059110 (0532)85814750(兼传真) 80998664
责任编辑 李忠东 都 兰 电话 (0532)80998611 E-mail:imue92@126.com
封面设计 李芳菲
照 排 青岛新华出版照排有限公司
印 刷 荣成市印刷厂有限公司
出版日期 2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷
开 本 大 16 开(890mm×1240mm)
印 张 8.25
插 页 1
字 数 200 千
书 号 ISBN 978-7-5436-4003-0
定 价 11.00 元
编校质量、盗版监督电话 (0532)80998671
青岛版图书售出后如发现印装质量问题,请寄回青岛出版社印刷物资处调换。
电话 (0532)80998826



目 录

第一章 一元一次不等式和一元一次不等式组

1.1 不等关系	(1)
1.2 不等式的基本性质	(3)
1.3 不等式的解集	(6)
1.4 一元一次不等式	(8)
1.5 一元一次不等式与一次函数	(11)
1.6 一元一次不等式组	(15)
回顾与思考	(18)
第一章测试题	(19)

第二章 分解因式

2.1 分解因式	(21)
2.2 提公因式法	(22)
2.3 运用公式法	(24)
回顾与思考	(27)
第二章测试题	(28)

第三章 分式

3.1 分式	(29)
3.2 分式的乘除法	(31)
3.3 分式的加减法	(32)
3.4 分式方程	(35)
回顾与思考	(37)
第三章测试题	(38)

第四章 相似图形

4.1 线段的比	(39)
4.2 黄金分割	(41)
4.3~4.4 形状相同的图形 相似多边形	(42)
4.5 相似三角形	(44)
4.6 探索三角形相似的条件	(46)
4.7 测量旗杆的高度	(51)
4.8 相似多边形的性质	(53)
4.9 图形的放大与缩小	(55)
回顾与思考	(57)
第四章测试题	(59)





第五章 数据的收集与处理

5.1~5.2 每周干家务活的时间 数据的收集	(62)
5.3 频数与频率	(64)
5.4 数据的波动	(68)
回顾与思考	(72)
第五章测试题	(74)

第六章 证明(一)

6.1 你能肯定吗	(76)
6.2 定义与命题	(80)
6.3 为什么它们平行	(83)
6.4 如果两条直线平行	(88)
6.5 三角形内角和定理的证明	(94)
6.6 关注三角形的外角	(98)
回顾与思考	(104)
第六章测试题	(107)

综合测试题(一)

综合测试题(二)

参考答案

第一章

一元一次不等式和一元一次不等式组



1.1 不等关系



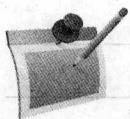
梳理知识要点

- 1 感受生活中存在着大量的不等关系.
- 2 会用适当的符号表示不等关系是本节课学习的重点,常用的不等号主要有“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $\geq$ ”、“ $\leq$ ”.用不等号连接的式子叫作不等式.



拓展与创新

- 3 根据文字说明列出不等式,是进一步学好不等式的重要方面,也是利用不等式解决实际问题的基础.因此,掌握列不等式的技巧和方法是十分必要的.重点是抓住关键词,弄清不等关系.此外,要准确使用不等式的连接语言和符号,如“非正数”、“至少”、“不大于”等等.



名师在线解题

例 1 用适当的符号表示下列关系:

- (1) x^2 是非负数;
- (2) m 与 n 两数的平方差不小于 10;
- (3) 在三角形中,两条边 a, b 的和大于第三条边 c , 两条边 a, b 的差小于第三条边 c .
- (4) 奶奶的年龄比小颖年龄的 6 倍还大.

解析 数量之间的运算除具有相等关系外还有不等关系.用不等式表示这些关系的方法步骤有:(1)认真审题,分清数量的大小关系;(2)列出相应的代数式,找出不等关系;(3)用表示不等关系的符号列出不等式.另外,对于题目中未能设定各未知数的情况,要提前设定.如例 1(4)中,应首先设出奶奶和小颖的年龄,再列出不等式.

- 解:(1) $x^2 \geq 0$;
 (2) $m^2 - n^2 \geq 10$;
 (3) $a + b > c, a - b < c$;

(4) 设奶奶的年龄为 x 岁,小颖的年龄为 y 岁,则 $x > 6y$.

例 2 若 a 是一个负整数,则 $a, -a, \frac{1}{a}$ 三者的大小关系满足().

- A. $a \geq \frac{1}{a} \geq -a$ B. $a \leq \frac{1}{a} \leq -a$
 C. $\frac{1}{a} \geq a \geq -a$ D. $\frac{1}{a} \leq a \leq -a$

解析 比较这三者的大小关系时,首先应确定它们的正负,

a 是负整数,则 $-a$ 是正整数, $\frac{1}{a}$ 是一个负数,因此 $-a$ 最大.在比较 a 和 $\frac{1}{a}$ 时,可先比较两者的绝对值: $|a| \geq |\frac{1}{a}|$,根据“两个负数比较大小时,绝对值大的反而小”,故有 $a \leq \frac{1}{a}$,所以 $a \leq \frac{1}{a} \leq -a$,选 B.

例 3 某饮料厂为了开发新产品,可用的 A, B 两种果汁原料分别是 19 kg, 17.2 kg, 试制甲、乙两种新型饮料共 50 kg, 下表是试验的相关数据:

饮 料	甲	乙
每 千 克 含 量		
A(单位:kg)	0.5	0.2
B(单位:kg)	0.3	0.4

现需配制甲种饮料 x kg, 试写出满足题意的所有的不等式.

解析 根据 A, B 两种果汁原料各为 19 kg 和 17.2 kg, 找出甲、乙两种饮料各自所需的 A, B 两种果汁原料的千克数, 列出两个不等式. 其中, 读懂表格的相关数据的含义是准确列出不等式的关键.

解: $0.5x + 0.2(50 - x) \leq 19$.
 $0.3x + 0.4(50 - x) \leq 17.2$.



课后大练兵

一、选择题

1. 下列表达式中,不等式有()个.

① $5m-6n>0$ ② a^2-6b ③ $x=1$ ④ $-7<0$ ⑤ $x-1>5y$

A. 1个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

2. 已知 a 为非零实数,下列各式中一定成立的是().

A. $a^2 \geq 0$ B. $-a^2 < 0$

C. $\frac{1}{a} > 0$ D. $-\frac{1}{a} > 0$

3. 下列不等关系中正确的是().

A. $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{6}$ B. $a^2-2 < a^2+2$

C. $\frac{3}{4} < -\frac{5}{6}$ D. $-7 > -5$

4. 如果 $a+b<0$,且 $b>0$,那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系为().

A. $a < b < -a < -b$ B. $-b < a < -a < b$

C. $a < -b < -a < b$ D. $a < -b < b < -a$

5. 如果 $0 < a < 1$,那么 $a, \frac{1}{a}, a^2$ 的大小关系是().

A. $a < \frac{1}{a} < a^2$ B. $\frac{1}{a} < a < a^2$

C. $a^2 < a < \frac{1}{a}$ D. $a < a^2 < \frac{1}{a}$

二、填空题

6. 用不等式表示:

(1) x 的 2 倍与 3 的差比 x 的 4 倍大:_____;(2) x 的算术平方根是一个非负数:_____;(3) 直角三角形两条直角边 a, b 的 和的平方比斜边 c 的平方大:_____.7. 月月准备去超市买笔记本和笔. 她一共带了 20 元钱,超市笔记本的单价为 2 元,笔的单价为 3 元,她买了 4 本笔记本和 x 支笔,那么 x 应满足的不等关系是_____.8. 一个两位数,其个位上的数字 x 比十位上的数字大 3,且这个两位数不小于 60,则 x 应满足的关系式为_____.9. 一根绳子长为 l cm,如果用它围成一个圆,那么这个圆的半径为_____cm,面积为_____cm²,如果这个圆的面积不大于 100 cm²,那么绳长 l 应满足的不等式为_____.

三、解答题

10. 某工厂 6 月份计划生产机器 190 台,前 10 天平均每天生产 6 台,后来由于改进技术,提前 4 天并且超额完成任务. 若该工厂 10 天后平均每天生产机器 x 台.(1) 请你试着写出 x 所满足的不等式;(2) 请你试着找出满足条件的 x 的最小值.

知识点回顾

选择题考查的知识点有:

填空题考查的知识点有:

解答题考查的知识点有:

11. 某种弹簧原长 10 cm, 载重在 1 kg 以内, 弹簧长度保持不变, 但超过 1 kg 以后, 每增加 1 kg, 弹簧长度增加 3 cm, 只要长度不超过 37 cm 弹簧就不会坏. 若设弹簧现载重 x kg, 请写出 x 满足的不等式.

12. 寒假第一天, 霖霖一家上午 10 点 10 分离家赶乘 11 点的火车外出旅游. 已知他们家距离车站 10 km, 离家后他们先以 3 km/h 的速度走了 5 min, 然后乘公共汽车去火车站. 若设公共汽车每小时走 x km. 要想霖霖一家不误当次火车, 试写出 x 应满足的关系式.



1.2 不等式的基本性质



梳理知识要点

1 不等式的基本性质:

不等式的基本性质 1: 不等式的两边都加上 (或减去) 同一个整式, 不等号的方向不变. 即: 若 $a > b$, 则 $a \pm c > b \pm c$ (c 为整式).

不等式的基本性质 2: 不等式的两边都乘以 (或除以) 同一个正数, 不等号的方向不变. 即: 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

不等式的基本性质 3: 不等式的两边都乘以 (或除以) 同一个负数, 不等号的方向改变. 即: 若 $a > b, c < 0$, 则 $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

2 不等式的其他性质:

(1) 不等式的对称性, 即: 若 $a > b$, 则 $b < a$.

(2) 不等式的传递性, 即: 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$.

(3) 若 $a > b, c > d$, 则 $a + c > b + d$.



拓展与创新

3 不等式性质的应用:

(1) 利用不等式性质, 比较未知数大小.

如: 试比较 $5a$ 与 a 的大小.

解: $\because 5 > 1$,

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, $5a > a$;

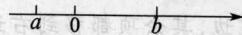
当 $a = 0$ 时, $5a = a = 0$;

当 $a < 0$ 时, $5a < a$.

这里既是为了巩固不等式的基本性质, 也是为了渗透

分类讨论的思想, 有利于学有余力的学生的发展.

(2) 综合利用不等式性质, 结合数轴, 比较未知数的大小, 如: a, b 两个实数在数轴上的对应点如图所示:

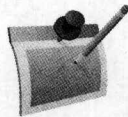


用“ $<$ ”或“ $>$ ”填空:

① $a + b$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $a - b$; ② $-ab$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 ; ③ $7a$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $7b$;

④ $-6a + 1$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-6b + 1$.

(3) 根据不等式的性质, 将不等式化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式, 如: $-\frac{1}{5}x > 1$, 利用不等式的基本性质 3, 得 $x < -5$.



名师在线解题

例 1 已知 $a > b$, 下列不等式一定成立吗?

(1) $a - 5 < b - 5$;

(2) $5a < 5b$;

(3) $-9a < -9b$;

(4) $3a + 10 > 3b + 10$.

解析

解决这类问题, 关键是看给出的不等式的两边与原不等式“ $a > b$ ”的两边相比较, 发生了怎样的变化, 然后根据不等式的基本性质作出判断. 如:

(1) 将 $a > b$ 的两边同时减 5, 根据不等式基本的性质 1, 不等号方向不变, 得 $a - 5 > b - 5$. (1) 不成立.

(2) 将 $a > b$ 的两边同时乘以 5, 利用不等式的基本性质 2, 不等号方向不变, 得 $5a > 5b$. (2) 不成立.

(3) 将 $a > b$ 的两边同时乘以 -9 , 利用不等式的基本性质 3, 不等号方向改变, 得 $-9a < -9b$. (3) 成立.



(4) 先将 $a > b$ 的两边同时乘以 3, 利用不等式基本性质 2, 不等号的方向不变, 得 $3a > 3b$, 再将其两边同时加上 10, 利用不等式基本性质 1, 不等号的方向不变, 得 $3a + 10 > 3b + 10$. (4) 成立.

例 2 已知 $x < y$, 用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空:

(1) $x - 1$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $y - 1$;

(2) $5x$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $5y$;

(3) $-x$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-y$;

(4) $x - y$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0.

解析 对于(4), 还可加问: 如果 $x > y$, 那么 $x - y$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0; 如果 $x = y$, 那么 $x - y$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0. 体现出作差比较法.

解: (1) $x - 1 < y - 1$;

(2) $5x < 5y$;

(3) $-x > -y$;

(4) $x - y < 0$.

例 3 将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式:

(1) $\frac{1}{2}x - 6 \leq -1$;

(2) $x > \frac{1}{2}x - 4$;

(3) $-\frac{m}{5} > 3$;

(4) $-3x + 2 < 2x + 5$.

解析 先利用不等式的基本性质 1, 将含有 x 的项都移到不等号的左边, 其余项都移到右边, 再利用不等式的基本性质 2 或 3, 把 x 项的系数化为 1.

解: (1) $\frac{1}{2}x - 6 \leq -1$,

$\frac{1}{2}x \leq 5$,

$x \leq 10$.

(2) $x > \frac{1}{2}x - 4$,

$x - \frac{1}{2}x > -4$,

$\frac{1}{2}x > -4$,

$x > -8$.

(3) $-\frac{m}{5} > 3$,

$m < -15$.

(4) $-3x + 2 < 2x + 5$,

$-3x - 2x < 5 - 2$,

$-5x < 3$,

$x > -\frac{3}{5}$.

例 4 若 $a - b > a$, $a + b < b$, 则有().

A. $ab < 0$

B. $\frac{a}{b} > 0$

C. $a + b > 0$

D. $a - b < 0$

解析 首先根据条件, 由不等式性质推出 a, b 的正负性, 再根据有理数运算法则进行选择.

解: $\because a - b > a, \therefore -b > 0$, 即 $b < 0$.

$\because a + b < b, \therefore a < 0$,

$\therefore a$ 与 b 同号.

故选 B.

例 5 若 $-\frac{m}{a} > \frac{n}{a}$, 则 a $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 时, $m > -n$; a $\underline{\hspace{1cm}}$ 时, $m < -n$.

解析 这是一道逆向思维题, 首先观察不等式左右两边的变化情况, 其次观察不等号的方向是否改变, 从而确定利用的不等式的基本性质, 判断出 a 的正负性.

由 $-\frac{m}{a} > \frac{n}{a}$ 得到 $m > -n$, 不等式左右两边同时乘以 $-a$, 且不等号的方向不变, 因此 $-a > 0$, 即 $a < 0$;

由 $-\frac{m}{a} > \frac{n}{a}$ 得到 $m < -n$, 不等式左右两边同时乘以 $-a$, 且不等号的方向改变, 因此 $-a < 0$, 即 $a > 0$.



课后大练兵

一、选择题

1. 若 a 是有理数, 则下列说法中正确的是().

A. $a > -a$

B. $a^2 \geq 0$

C. $a^2 < 0$

D. $\frac{1}{a} < a$

2. 下列变形中不正确的是().

A. 由 $a > b$, 得 $b < a$

B. 由 $-a > -b$, 得 $b < a$

C. 由 $-5x > m$, 得 $x < -\frac{m}{5}$

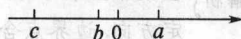
D. 由 $-\frac{1}{5}x < y$ 得 $x > -5y$

3. 若由 $x > y$, 得到 $mx \leq my$, 则 m 的取值范围为().

知识点回顾

选择题考查的知识点有:

- A. $m > 0$ B. $m < 0$
 C. $m \geq 0$ D. $m \leq 0$
4. 若 $a < b$, 下列不等式成立的是().
 A. $b - a < 0$ B. $\frac{a}{b} < 1$
 C. $-b < -a$ D. $ac < bc$
5. 已知实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示, 下列不等式中正确的是().



第5题图

- A. $cb > ab$ B. $ac > ab$
 C. $cb < ab$ D. $c + b > a + b$
6. 若关于 x 的不等式 $(m-5)x < 5-m$ 的解集为 $x < -1$, 则 m 的取值范围是().
 A. $m \leq 5$ B. $m > 5$
 C. $m < 5$ D. $m < 0$

二、填空题

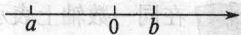
7. 用“ $<$ ”或“ $>$ ”填空:

若 $a > b$, 则 $a-1$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $b-1$; $7-5a$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $7-5b$.

8. 若 $-\frac{m}{5} > -\frac{n}{4}$, 则 $4m$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $5n$.

9. 将不等式 $-\frac{3}{2}x > -\frac{2}{3}$ 化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知 a, b 两个实数在数轴上的对应点如图所示,



第10题图

则: ① a $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 ; ② b $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 ; ③ a $\underline{\hspace{1cm}}$ b ; ④ a^2 $\underline{\hspace{1cm}}$ ab ; ⑤ ab $\underline{\hspace{1cm}}$ b^2 .

三、解答题

11. 根据不等式的性质, 把下列不等式化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式.

(1) $\frac{x}{4} - 7 > -3 + \frac{x}{2}$ (2) $5 - \frac{x}{3} < 6 - \frac{x}{2}$

12. 比较下列各题中两个式子的大小:

(1) $\frac{a}{3} - 3$ 与 $\frac{a}{3} - 4$;

(2) $a+b$ 与 $a-b$;

(3) $\frac{a^2 - b^2 + 2}{2}$ 与 $\frac{a^2 - 2b^2 + 1}{3}$.

填空题考查的知识
点有:

解答题考查的知识
点有:



1.3 不等式的解集



梳理知识要点

1 不等式的解集:

(1) 不等式的解: 能使不等式成立的未知数的值, 叫作不等式的解.

(2) 不等式的解集: 一个含有未知数的不等式的所有解, 组成这个不等式的解集.

如: 对于不等式 $x+3 < 6$ 的解是所有小于 3 的数, 其中的每一个数都是此不等式的解, 所有这些解的集合即是此不等式的解集.

(3) 解不等式: 求不等式的解集的过程, 叫作解不等式.

2 表示不等式的解集的两种方法:

(1) 用最简单的不等式表示法 (即 $x > a$ 或 $x < b$);

(2) 用数轴表示, 具体为: 大于向右画, 小于向左画; 有等号的画实心点, 无等号的画空心圆圈.

前者是用“数”来表示“解集”, 后者是用“形”来表示“解集”. 二者相互结合, 为解决实际问题提供了极大的方便.



拓展与创新

3 不等式的解与不等式的解集之间的联系和区别:

不等式的解与不等式的解集是两个不同的概念, 不等式的解是指满足这个不等式的未知数的某个值, 而不等式的解集是指满足这个不等式的未知数的所有值的集合.

不等式的所有解组成了解集, 解集中包括了每一个解.

4 “或”与“且”的意义及区别:

(1) “或”即“或者”, 表示选择关系. 通常, 它是指所列出的两种情况二者居其一或二者同时存在.

如: 若 $ab=0$, 则有如下 3 种情况: ① $a=0, b \neq 0$; ② $a \neq 0, b=0$; ③ $a=b=0$.

(2) “且”即“并且”, 表递进关系. 通常, 它是对已有情况再进一步限制或说明.

如: 若 $a^2+b^2=0$, 则有 $a=0$, 且 $b=0$, 即 $a=b=0$.



名师在线解题

例 1 将下列不等式的解集表示在数轴上:

(1) $x \geq 0$; (2) $x < -2$.

解析

在数轴上表示不等式的解集的步骤: 先定边界点, 再定方向. 边界点含在解集内的为实心点, 不含在解集内的为空心点; 定方向, 即相对于界点而言, 大于向右, 小于向左.

在 (1) 中, 一定要画对数轴. 部分同学容易忘记画上单位长度.

解: (1)

(2)

例 1 题图

例 2

根据给出的图示, 写出数轴上表示的解集.

(1) (2)

例 2 题图

解析

解: (1) $x < 5$

(2) $x \geq -2$ 且 $x \neq 2$.

例 3

在同一数轴上表示下列解集:

(1) $x \geq -3$ 和 $x > 4$;

(2) $x \leq -2$ 和 $x \geq -5$.

解析

解: (1)

(2)

例 3 题图

例 4

在数轴上表示出 $x \geq -6$ 的解集, 并找出所有的负整数解.

例 4 题图

∴ 满足条件的负整数解有 $-6, -5, -4, -3, -2, -1$.



课后大练兵

一、选择题

1. 下列说法:

① $x = \frac{3}{2}$ 是不等式 $2x - 3 > 0$ 的一个解;

② $x = \frac{3}{2}$ 不是不等式 $2x - 3 \geq 0$ 的解;

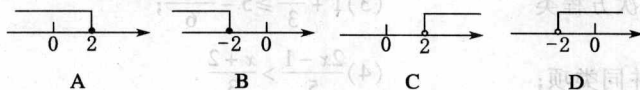
③ $x > \frac{3}{2}$ 是不等式 $2x - 3 > 0$ 的解集;

④ 因为满足不等式 $x - 2 > 0$ 的解都满足不等式 $x - 1 > 0$, 所以不等式 $x - 1 > 0$ 的解集也是不等式 $x - 2 > 0$ 的解集.

其中正确的有().

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 不等式 $-5x < 10$ 的解集在数轴上表示为().



3. 下列不等式的解集中, 不包括 -3 的是().

- A. $x \leq -3$ B. $x \geq -3$
C. $x \leq -4$ D. $x \geq -4$

4. 不等式 $x - 2 \leq 2$ 的非负整数解是().

- A. 1, 2, 3, 4 B. 0, 1, 2, 3, 4
C. 0, 1, 2, 3 D. 无穷多个

5. 已知 $(a-1)^2 + \sqrt{5a-4b-m} = 0$, b 为负数, 则 m 的取值范围是().

- A. $m > 2$ B. $m > 3$
C. $m > 4$ D. $m > 5$

二、填空题

6. 不等式 $x - 6 \leq 0$ 的解有 _____ 个, 其中正整数解有 _____.

7. 满足 $2006 < |x| \leq 2007$ 的所有整数之和是 _____, 所有整数之积是 _____.

8. 不等式 $5x > 8x$ 的解集是 _____.

9. 若关于 x 的不等式 $mx > -m$ 的解集是 $x < -1$, 则 m _____ 0; 若 $(m-1)x > 1-m$ 的解集为 $x > -1$, 则 m _____.

10. $x - 1 \leq \pi$ 的正整数解有 _____.

三、解答题

11. 在数轴上表示出下列解集:

(1) $x \geq -\frac{1}{2}$;

(2) $x < -1$;

(3) $x > -3$, 且 $x \leq 2$;

(4) $x \geq -3$, 且 $x \neq -2$.

12. (1) 你能找出几个使不等式 $2x - 2.5 \geq 15$ 成立的 x 的值吗?

(2) $x = 3, 6, 9$ 能使不等式 $2x - 2.5 \geq 15$ 成立吗?

知识点回顾

选择题考查的知识点有:



1.4 一元一次不等式



梳理知识要点

1 一元一次不等式:

像 $x > 1$, $7 - 6x < 34$ 这些不等式的左右两边都是整式,只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 1,这样的不等式叫作一元一次不等式.

2 一元一次不等式的解法及步骤:

解一元一次不等式的一般步骤与解一元一次方程类似,主要有:

(1) 去分母; (2) 去括号; (3) 移项; (4) 合并同类项; (5) 未知数系数化为 1.

3 列一元一次不等式解应用题:

列不等式所解决的问题,有的时候比列方程解决的问题更广泛,有些用方程不能(或不易)解决的问题用不等式却能轻易解决.

列不等式解应用题的一般步骤:

(1) 弄清题意和题目中数量关系,用字母表示未知数;
(2) 找出能够表示应用题全部含义的一个不等关系;
(3) 根据这个不等关系,列出必要的代数式,从而列出不等式;

(4) 解不等式,求出解集;

(5) 检验解集是否正确,是否符合实际问题情境;

(6) 写出答案.



拓展与创新

4 同解不等式:

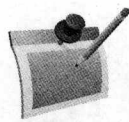
如果两个不等式的解集相同,那么这两个不等式叫作同解不等式. 同解原理如下:

不等式同解原理 1: 不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,所得的不等式与原不等式是同解不等式;

不等式同解原理 2: 不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数,所得的不等式与原不等式是同解不等式;

不等式同解原理 3: 不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数,并且把不等号的方向改变后,所得的不等式与原不等式是同解不等式.

我们在解不等式时所做的变形都符合不等式的同解原理,根据不等式的基本性质或同解原理对不等式变形,能保证最后得出的解集就是原不等式的解集.



名师在线解题

例 1 解下列不等式,并把它们的解集表示在数轴上:

$$(1) -\frac{x-5}{3} < 6;$$

$$(2) \frac{x+5}{2} - 1 < \frac{3x+2}{2};$$

$$(3) 1 + \frac{x}{3} \geq 5 - \frac{x-2}{6};$$

$$(4) \frac{2x-1}{5} > \frac{x+2}{3}.$$

解析

求不等式的解集,关键是正确运用不等式的 3 个基本性质,将不等式化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式. 解题过程中,还需注意如下问题:

① 不等式两边同时乘以同一个负数时,不等号的方向要改变,如例(1)中,不等式两边同时乘以 -3,得 $x - 5 > -18$.

② 例 1 的(2)中,在去分母时,不等式两边的各项都应乘以公分母,“-1”这一项也不能漏乘.

③ 分数线不仅有“除号”的作用,而且也起着括号的作用. 例 1 的(3)中,不等式两边同时乘以 6 后,应为

$$6 + 2x \geq 30 - (x - 2), \text{ 不等号右边的 } -\frac{x-2}{6} \text{ 这一项在}$$

分母变为 1 后,要写成 $-(x-2)$,而不是 $-x-2$.

④ 在去分母时,要找不等式所有分母的最小公倍数,不等式两边同时乘以这个最小公倍数. 如例 1 中的(4)中,两边需同时乘以 5 和 3 的最小公倍数 15.

$$\text{解: (1) } -\frac{x-5}{3} < 6,$$

$$x - 5 > -18,$$

$$x > -13.$$

$$(2) \frac{x+5}{2} - 1 < \frac{3x+2}{2},$$

$$x + 5 - 2 < 3x + 2,$$

$$x - 3x < 2 - 5 + 2,$$

$$-2x < -1,$$

$$x > \frac{1}{2}.$$

$$(3) 1 + \frac{x}{3} \geq 5 - \frac{x-2}{6},$$

$$6 + 2x \geq 30 - (x - 2),$$

$$6 + 2x \geq 30 - x + 2,$$

$$2x + x \geq 30 + 2 - 6,$$

$$3x \geq 26,$$

$$x \geq \frac{26}{3}.$$

$$(4) \frac{2x-1}{5} > \frac{x+2}{3},$$

$$3(2x-1) > 5(x+2),$$

$$6x-3 > 5x+10,$$

$$6x-5x > 10+3,$$

$$x > 13.$$

例2 三个连续正奇数的和小于21,这样的正奇数共有多少组?把它们都写出来.

解析 解决该题的关键是准确而合理地设出三个连续的正奇数,两个连续奇数相差2.因此可设这三个连续正奇数为 $x, x+2, x+4$,或设为 $x-2, x, x+2$,或设为 $x-4, x-2, x$.三种设法均可,但在具体计算时可以发现,第二种设法计算起来最方便,而且今后许多类似的题目我们大都采取这种设法.

解: 设中间的正奇数为 x ,则其余两个正奇数分别为 $x-2, x+2$,

$$(x-2) + x + (x+2) < 21,$$

$$3x < 21,$$

$$x < 7.$$

$\therefore x$ 是正奇数.

$$\therefore x = 1, 3, 5.$$

当 $x=1$ 时, $x-2=-1<0$,不合题意,舍去;

当 $x=3$ 时, $3-2=1, 3+2=5$;

当 $x=5$ 时, $5-2=3, 5+2=7$.

$\therefore$ 这三个连续正奇数共有2组,分别为1,3,5或3,5,7.

例3 有10名菜农,每人可种甲种蔬菜3亩或乙种蔬菜2亩.已知甲种蔬菜每亩可收入0.5万元,乙种蔬菜每亩可收入0.8万元,若要使总收入不低于15.6万元,最多可安排多少菜农种甲种蔬菜?

解析 例3是不等式建模的继续.在设未知数时,多数同学容易根据提出的问题设“最多可安排 x 名菜农种甲种蔬菜”这种设法就与列出的不等式 $3x \times 0.5 + 2(10-x) \times 0.8 \geq 15.6$ 相矛盾了.这种设法,应列出一个方程 $3x \times 0.5 + 2(10-x) \times 0.8 = 15.6$,但在某些问题中,往往有些方程的解是不符合实际情况的.这也是用不等式解决应用问题更贴近生活,更有价值的一种体现.

例3正确的设法应为“可安排 x 名菜农种甲种蔬菜”.在求出不等式的解集后,要根据问题的实际意义,取相应的符合实际情况的整数解.

解: 设可安排 x 名菜农种甲种蔬菜,则有 $(10-x)$ 名菜农种乙种蔬菜.

$$3x \times 0.5 + 2(10-x) \times 0.8 \geq 15.6,$$

$$\therefore x \leq 4.$$

答:最多可安排4名菜农种甲种蔬菜.

例4 小王家里装修,他去商店买灯.商店柜台里现有功率为100W的白炽灯和40W的节能灯,它们的单价分别为2元和32元,经了解知这两种灯的照明效果和使用寿命都一样.已知小王家所在地的电价为每度0.5元.请问:当这两种灯的使用寿命不低于多少小时,小王选择节能灯才合算?

[用电量(度)=功率了(kw)×时间(h)]

解析 当使用节能灯的总费用不超过使用白炽灯的总费用时,使用节能灯合算.两种的费用均为买灯的费用+电费.

解: 设当这两种灯的使用寿命为 x h时,小王选择节能灯合算.

$$2 + 0.5 \times \frac{100x}{1000} \geq 32 + 0.5 \times \frac{40x}{1000},$$

$$2 + 0.05x \geq 32 + 0.02x,$$

$$0.03x \geq 30,$$

$$x \geq 100.$$

$\therefore$ 当这两种灯的使用寿命不低于100h时,小王选择节能灯合算.



课后大练兵

一、选择题

1. 不等式 $\frac{x-7}{2} + 1 < \frac{3x+2}{2}$ 的负整数解有().

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

2. 某商品的进价是500元,标价为750元.商店要求以不低于5%的利润率的售价出售,则售货员最低可以打()折出售此商品.

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

3. 八年级(8)班几个同学外出旅游合影留念.为冲洗照片,打算每人交0.70元.已知一张底片0.68元,扩印一张相片0.50元,为了每人分得一张相片,在将收来的钱尽量用掉的前提下,这张相片上的同学最少有().

- A. 2人 B. 3人 C. 4人 D. 5人

知识点回顾

选择题考查的知识
点有:



4. 已知代数式 $\frac{x+2}{9} - 1$ 的值为非负数, 则 x 的取值范围应是().

- A. $x \geq 0$ B. $x \leq 0$ C. $x > -7$ D. $x \geq 7$

5. 若不等式 $\frac{2x-a}{3} \geq 4x+6$ 的解集为 $x \leq -4$, 则 a 的值为().

- A. 34 B. 22 C. -3 D. 0

6. 在一次爆破中, 用 1 m 的导火索来引爆炸药, 导火索的燃烧速度为 0.5 cm/s, 引爆员点着导火索后, 至少以()m/s 的速度才能跑到 600 m 或 600 m 以外的安全区域.

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、填空题

7. 关于 x 的方程 $10x - 3a = 6(2 + 3x)$ 的解为正数, 则 a 的取值范围是_____.

8. 三个连续正奇数的和小于 20, 这样的正奇数共有_____组, 它们是_____.

9. 不等式 $3x - 4 \geq 4 + 2(x - 2)$ 的最小整数解是_____.

10. 在一次知识竞赛中共有 25 道题, 每道题都给出 4 个答案, 其中只有 1 个答案正确, 要求把正确答案选出来, 每道题 4 分. 不选或选错扣 2 分. 如果赵明在这次竞赛中的得分不低于 60 分, 那么他至少答对了_____道题.

11. 甲、乙两地相距 30 km. 小亮按 5 km/h 的速度可按时到达, 实际小亮走了 3 h 后, 因故停留了半小时. 为了不迟到, 小亮后来的速度至少为_____才能到达.

三、解答题

12. 解不等式 $\frac{2-x}{3} > 4 - \frac{x}{2}$, 并把它解集在数轴上表示出来.

13. x 取何值时, 代数式 $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2}$ 的值不小于代数式 $\frac{x-1}{6}$ 的值?

14. 某工程队要招聘甲、乙两个工种的工人 150 人, 甲、乙两个工种的工人的月工资分别为 600 元和 1000 元, 现要求乙工种的人数不少于甲工种人数的 2 倍. 问: 甲、乙两个工种各招聘多少人, 可使得每月所付的工资最少?

15. 某童装加工企业工人每月平均加工童装 150 套, 最不熟练的工人加工的童装套数为平均套数的 60%. 为了提高工人的劳动积极性, 按时完成订货任务, 企业计划从下月起进行工资改革. 改革后每位工人的工资分两部分: 一部分为每人每月基本工资 200 元, 另一部分为每加工 1 套童装奖励若干元.

(1) 为了保证所有工人的每月工资收入不低于市有关部门规定的最低工资标准 450 元, 按以往工人加工的童装套数计算, 工人每加工 1 套童装, 企业至少应奖励多少元? (精确到分.)

填空题考查的知识点有:

解答题考查的知识点有:

甲 (2) 根据经营情况, 企业决定每加工一套童装奖励 5 元, 工人小张想争取以后每月工资不少于 1200 元, 则他以后每月至少应加工童装多少套?

解: 设工人小张以后每月加工童装 x 套, 则他以后每月工资为 $1200 - 5x$ 元. 根据题意, 得

$1200 - 5x \geq 1200$

解得 $x \geq 0$. 所以工人小张以后每月至少应加工童装 0 套.

16. 为了保护环境, 某企业决定购买 10 台污水处理设备. 现有 A、B 两种型号的设备, 其中每台的价格、月处理污水量及年消耗费如下表所示:

	A 型	B 型
价格(万元/台)	12	10
处理污水量(吨/月)	240	200
年消耗费(万元/台)	1	1

经预算, 该企业购买设备的资金不高于 105 万元.

(1) 该企业有几种购买方案? 请你设计一下;

(2) 若企业每月产生的污水量为 2040 吨, 为了节约资金, 应选择哪种购买方案?

(3) 在(2)题的条件下, 该企业每年污水处理消耗 10 万元, 若每台设备的使用年限为 10 年, 污水处理厂处理污水费为每吨 10 元, 请你计算, 该企业自己处理污水与将污水排到污水处理厂处理相比较, 10 年节约资金多少万元?

(注: 企业处理污水的费用包括购买设备资金和消耗费.)



1.5 一元一次不等式与一次函数



梳理知识要点

1 一元一次不等式与一次函数的关系:

对于一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$, 当 y 在一定范围内取值时, 则一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 即为一个一元一次不等式.

如: 对于一次函数 $y = 5x + 6$, 当 x 取何值时, $y > 12$? 也就是求一元一次不等式 $5x + 6 > 12$ 的解集 $x > \frac{6}{5}$, 即当 $x > \frac{6}{5}$ 时, 一次函数 $y = 5x + 6$ 的函数值 $y > 12$.



拓展与创新

2 一元一次不等式与一次函数图象的关系:

一元一次不等式的解集可通过函数的图象来体现, 若

要求一元一次不等式 $kx + b > m (k \neq 0)$ 的解集, 可先画出相应的 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的函数的图象, 在图象上找出相应的 $y = m$ 时的点 (n, m) , 则由函数图象的性质, 可得出 $kx + b > m$ 的解集为 $x > n$ (或 $x < n$).

如: 求一元一次不等式

$2x - 3 > 5$ 的解集. 它相应

的一次函数 $y = 2x - 3$ 的图

象如图所示, 当 $y = 5$ 时, 找

到相应的函数图象上的点

$(4, 5)$, 由于一次函数 $y = 2x$

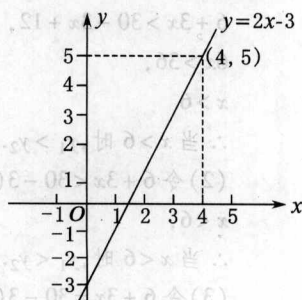
$- 3, 2 > 0$, y 随 x 的增大而

增大, 因此从图象上即可判

断出当 $x > 4$ 时, $y > 5$; 当 $x \leq$

4 时, $y \leq 5$, 所以一元一次不等式 $2x - 3 > 5$ 的解集即为

$x > 4$.





3 综合利用一元一次不等式的“数”与一次函数图象的“形”的关系, 解决实际问题.



名师在线解题

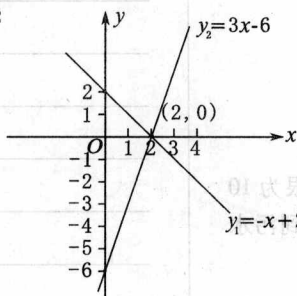
例 1 已知 $y_1 = -x + 2$, $y_2 = 3x - 6$, 观察其图象, 回答下列问题:

(1) 当 x 为何值时, $y_1 > y_2$?

(2) 当 x 为何值时, $y_1 < y_2$?

解析 利用一次函数图象解决一元一次不等式, 在同一平面直角坐标系内画准图象是关键, 通过图象, 分析得出符合题意的解集.

解:



例 1 题图

由函数图象知 $y = 3x - 6$ 与 $y = -x + 2$ 的交点坐标为 $(2, 0)$,

$\therefore$ 当 $x < 2$ 时, $y_1 > y_2$;

当 $x > 2$ 时, $y_1 < y_2$.

例 2 已知 $y_1 = 6 + 3x$, $y_2 = 30 - 3(x - 4)$.

(1) 当 x 为何值时, $y_1 > y_2$?

(2) 当 x 为何值时, $y_1 < y_2$?

(3) 当 x 为何值时, $y_1 = y_2$?

解析 对于例 2, 我们可以对不等式直接求解. 在解决例 1 和例 2 这类问题时, 我们既可以运用函数图象解不等式, 也可以运用不等式帮助我们研究函数问题, 二者相互渗透, 相互作用.

解: (1) 令 $6 + 3x > 30 - 3(x - 4)$,

$$6 + 3x > 30 - 3x + 12,$$

$$6x > 36,$$

$$x > 6.$$

$\therefore$ 当 $x > 6$ 时, $y_1 > y_2$.

(2) 令 $6 + 3x < 30 - 3(x - 4)$,

$$x < 6,$$

$\therefore$ 当 $x < 6$ 时, $y_1 < y_2$.

(3) 令 $6 + 3x = 30 - 3(x - 4)$,

$$x = 6,$$

$\therefore$ 当 $x = 6$ 时, $y_1 = y_2$.

例 3 某公司计划今年 10 月份组织员工到某景点旅游. 人数估计在 10~25 人之间. 甲、乙旅行社的服务质量

相同, 且到该旅游景点的价格都是每人 2000 元, 甲旅行社表示可以给予每位游客 7.5 折优惠; 乙旅行社表示可以免去一位带队领导的旅游费用, 其余游客 8 折优惠. 则该单位怎样选择, 可使其支付的旅游总费用较少?

解析 该单位所支付的旅游总费用将随着旅游人数的变化而变化. 因此, 在解决此类问题时, 应首先根据题意将甲、乙两旅行社的收费与游客人数之间的函数关系式表达出来, 然后, 根据题意, 确定因变量的大小关系, 将问题转化为解一元一次不等式即可.

解: 设参加旅游的人数为 x 人, 甲旅行社的收费为 y_1 元, 乙旅行社的收费为 y_2 元, 则:

$$y_1 = 2000 \times 0.75x = 1500x;$$

$$y_2 = 2000 \times 0.8(x - 1) = 1600x - 1600.$$

$$\text{令 } y_1 > y_2, \text{ 则 } 1500x > 1600x - 1600,$$

$$\text{解得 } x < 16.$$

$$\text{令 } y_1 < y_2, \text{ 则 } 1500x < 1600x - 1600,$$

$$\text{解得 } x > 16.$$

$$\text{令 } y_1 = y_2, \text{ 则 } 1500x = 1600x - 1600,$$

$$\text{解得 } x = 16$$

$\therefore$ 当人数在 10~15 人之间时, 选乙旅行社花费少;

当人数在 17~25 人之间时, 选甲旅行社花费少;

当 16 人参加旅游时, 两家收费相同.

例 4 某商场计划投入一笔资金采购一批紧俏商品, 经过市场调查发现, 如果月初出售可获利 15% 并可用本和利再投资其他商品, 到月末可获利 10%; 如果月末出售, 可获利 30%, 但要付出仓储费用 700 元. 请问: 根据商场的资金状况, 如何购销获利较多?

解析 题目中的 3 个百分数都指的是利润率.

利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{投入成本}}$, 可通过分别计算两种形式的获利情况, 然后进行比较.

解: 设该商场投资 x 元, 月初出售, 到月末可获利 y_1 元, 月末出售, 到月末可获利 y_2 元, 则:

$$y_1 = 15\%x + (1 + 15\%)x \times 10\% = 0.265x;$$

$$y_2 = 30\%x - 700 = 0.3x - 700.$$

$$\text{令 } y_1 > y_2, \text{ 则 } 0.265x > 0.3x - 700,$$

$$\text{解得 } x < 20000.$$

$$\text{令 } y_1 < y_2, \text{ 则 } 0.265x < 0.3x - 700,$$

$$\text{解得 } x > 20000.$$

$$\text{令 } y_1 = y_2, \text{ 则 } 0.265x = 0.3x - 700,$$

$$\text{解得 } x = 20000.$$

答: 当商场投资少于 20000 元时, 第一种情况获利较多; 当投资大于 20000 元时, 第二种情况获利较多;

当投资 20000 元时, 两种方式获利相同.