21世纪应用型本科系列教材

线性代数

寿纪麟 魏战线 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪应用型本科系列教材

线性代数

寿纪麟 魏战线 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
·西安·

内容提要

本教材是针对应用型本科院校的教学需要编写的，包含教育部制订的大学本科线性代数的“教学基本要求”的内容，适度地减弱了理论上的严密性和运算上的技巧性。

全书共分六章：第1章，行列式；第2章，矩阵；第3章，线性方程组及其求解法；第4章，n维向量与线性方程组的解的结构；第5章，特征值与特征向量；第6章，实二次型。每章后面附有习题(A)、(B)、复习题等三种练习。

本教材适用于应用型本科院校各专业，也适用于学时较少的其他院校。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 寿纪麟，魏战线编著．—西安：西安交通大学出版社，2007.2

(21世纪应用型本科系列教材)

ISBN 978-7-5605-2396-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①寿… ②魏… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第158169号

书　　名：线性代数
编　　著：寿纪麟　魏战线
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路10号(邮编:710049)
电　　话：(029)82668357,82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315,82669096(总编办)
印　　刷：陕西江源印刷科技有限公司
字　　数：222千字
开　　本：727mm×960mm　1/16
印　　张：12
版　　次：2007年2月第1版　2007年2月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5605-2396-5/O·255
定　　价：16.00元

前　　言

随着我国的高等教育从精英教育进入大众化教育的发展阶段，高等教育在不同层次上的建设已经成为不可避免。近年来为培养应用型人才的本科大学已迅速发展起来，并已成为时代的不可忽视的潮流之一。然而目前还缺乏适用于这类学生的教材，本书就是针对应用型本科院校的教学需要而编写的，它与重点院校的教材相比，既有共同的基本内容，也有明显的差别。

首先，本书保留了教育部制订的大学本科线性代数的“教学基本要求”的内容，并凸显以矩阵为工具，研究线性方程组与线性变换等问题。

其次，在处理具体教学内容方面，在确保整体框架的逻辑完整性的前提下，适度地减弱理论上的严密性和运算上的技巧性，为了适应不同学时和专业要求的教学需要，我们对部分内容，特别是较困难的定理证明打“*”号，这些内容可以不讲或者选讲。

在阐述一些重要的概念与定理时，常常用具体例子为先导，使学生从实例中了解问题的由来，掌握解决问题的思路和算法步骤，以减少理解的障碍。在内容论述上力求逻辑严谨，清晰易懂，易于自学。

本书共分六章：第 1 章，行列式；第 2 章，矩阵；第 3 章，线性方程组及其求解法；第 4 章，n 维向量与线性方程组的解的结构；第 5 章，特征值与特征向量；第 6 章，实二次型。线性空间与线性变换安排在第 4 章中，每章后面都附有习题(A)、(B)、复习题等三种练习，学生在课后只须选做习题(A)中的题。

线性代数是一门高度抽象且逻辑性很强的基础课程，但它的系统性很强，问题的背景和方法比较清晰，相信读者通过本课程的学习应能逐步培养抽象思维和逻辑分析的能力，提高自学的能力。

在本课程试讲和教材编写的过程中得到西安交通大学城市学院的鼓励和支持。在教材评审中，西安交通大学理学院的王绵森教授对教材内容的改进提出许多具体建议，这些建议对保证教材的质量起到十分重要的作用。在此一并表示衷心的感谢。

由于编写的时间仓促以及编者水平有限，不妥与错误之处在所难免，敬请同行与读者批评指正。

编者

2007 年 1 月于西安

目　录

第1章　行列式

行列式是线性代数的一个基本工具,在很多问题的研究中都要用到行列式. 在初等代数中,为了求解2元及3元线性方程组(即关于未知量的1次方程组),引入了2阶和3阶行列式,并用2阶(3阶)行列式简明地表达了一类2元(3元)线性方程组的解. 本章将把类似的讨论及求解方法推广到n元线性方程组,为此,先要引入n阶行列式的概念和定义;进而讨论n阶行列式的基本性质及常用的计算方法;最后介绍求解n元线性方程组的克拉默法则. 克拉默法则只是行列式的一个应用,在本书后面关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中,行列式都是必不可少的研究工具.

第1节　行列式的定义与性质

1.1.1　2阶行列式与一类2元线性方程组的解

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的线性方程组时提出的. 例如,对于由2个方程2个未知量组成的线性方程组(其中x_1,x_2为未知量)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \cdots① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \cdots② \end{cases} \tag{1.1}$$

我们用消元法来求它的解. 注意x_1的系数a_{11}、a_{21}不全为零,不妨设$a_{11}\neq 0$,于是可利用方程①消去方程②中的未知量x_1,这只要方程②加上方程①的$\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$倍,便可把方程组(1.1)化成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ (a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \cdots③ \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} & \cdots④ \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，由方程④解出 x_2，再把解出的 x_2 代入方程③解出 x_1，便得方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了简明地表达这个解，人们引入了 2 阶行列式. 2 阶行列式是由 4 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 排成 2(横)行、2(竖)列的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

并用它来表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即 **2 阶行列式定义为**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{def}} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.4}$$

其中，a_{ij} 称为行列式的**元素**. a_{ij} 的两个下标用来表示该元素在行列式中的位置，第 1 个下标(称为行标)为 i，表明该元素位于行列式的第 i 行；第 2 个下标(称为列标)为 j，表明该元素位于行列式(左起)的第 j 列. 通常称位于行列式的第 i 行、第 j 列处的元素 a_{ij} 为行列式的(i,j)元素.

(1.4)式的右端也称为 2 阶行列式(1.3)的展开式，它可用对角线计算法则来记忆：如图 1.1，用实联线(称为行列式的主对角线)上两个元素的乘积，减去虚联线(称为行列式的副对角线)上两个元素的乘积，所得的差就是 2 阶行列式(1.3)的展开式.

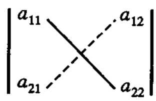

图 1.1

利用 2 阶行列式，(1.2)式可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.5}$$

其中，分母是由方程组(1.1)的系数按它们原来在方程组中的次序所排成的 2 阶行列式，称为方程组(1.1)的**系数行列式**. 于是，可把方程组(1.1)的上述解法总结为：如果方程组(1.1)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.6}$$

其中，D_j 是将系数行列式 D 的第 j 列元素依次用方程组右端的常数项替换后所得的 2 阶行列式($j=1,2$)，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

例 1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 - 4x_2 = -14 \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times 1 = -11 \neq 0$$

所以方程组有唯一解. 又由

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -14 & -4 \end{vmatrix} = 5 \times (-4) - 3 \times (-14) = 22$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -14 \end{vmatrix} = 2 \times (-14) - 5 \times 1 = 33$$

代入(1.6)式，得方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 3 \quad \blacksquare$$

利用行列式对方程组(1.1)的上述讨论，其结果是优美的，而且是很有用的. 那么，能否将这一结果推广到由 n 个方程、n 个未知量组成的线性方程组上去呢？答案是肯定的. 先从 3 阶行列式开始，对于由 3 个方程 3 个未知量组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

它的系数行列式为未知量的系数按它们原来在方程组中的次序所排成的一个 3 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

我们定义上述 3 阶行列式的计算公式为

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.8}$$

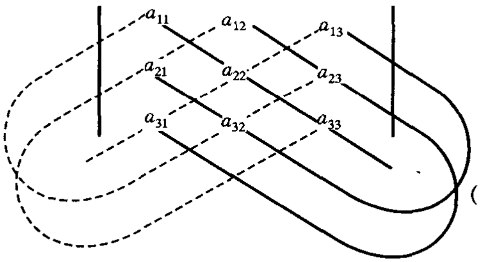

图 1.2

在上述 3 阶行列式的定义中，共由六项组成，前三项均取正号，分别是图1.2中三条实连线上元素的乘积. 后三项均取负号，分别是图 1.2 中虚连线上元素的乘积①. 现在我们将式(1.8)进行整理和变形，并用低一阶的行列式来表示如下：

$$\begin{aligned} D &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \end{aligned}$$

其中 M_{11} 是原 3 阶行列式 D 中划掉元素 a_{11} 处所在的第 1 行和第 1 列的所有元素后所剩余下来的低一阶(2 阶)的行列式. 称 M_{11} 为元素 a_{11} 的余子(行列)式. 同理，M_{12} 和 M_{13} 分别是 a_{12} 和 a_{13} 的余子式. 一般地，记 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**，即划掉第 i 行和第 j 列的所有元素后所剩余下来的低一阶的行列式. 为了进一步使 3 阶行列式的表达式更加规范化，令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

则 3 阶行列式的值可表示为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j} \tag{1.9}$$

其中：$\sum$ 是求和符号；A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**. 利用代数余子式，(1.9)式中的各项都规范化为正号.

例如，在 3 阶行列式

① 必须指出，对角线展开法则只适用于 2 阶及 3 阶行列式，它对 4 阶及 4 阶以上的行列式不适用.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

中，a_{23}元素的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 6$$

这样一来，根据(1.9)式便可把3阶行列式的定义说成：**3阶行列式等于它的第1行各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和**，并称(1.9)式为**3阶行列式按第1行展开的公式.**

例 1.2 计算3阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

解 由定义(1.9)式，得

$$\begin{aligned} D &= 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 2 + 2 \times 4 + 1 \times 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$ ▌

一般地，由定义(1.9)式，可得3阶行列式的计算公式为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

以上定义了2阶和3阶行列式. 特别是对3阶行列式规范化表示后，3阶行列式按第1行展开的公式(1.9)实质上是由3个2阶行列式项来表示3阶行列式. 这种由低一阶行列式项来表示高一阶行列式的方法称为**递归法**，正是这种递归法启发人们将行列式的定义推广到一般的n阶行列式的情况.

1.1.2 行列式的定义

定义 1.1 (n 阶行列式) n阶行列式是由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成n行、n列的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

可简记成 $\det(a_{ij})_{n\times n}$ 或 $\det(a_{ij})$，并用它来表示一个数. 当 $n=1$ 时，规定

$$D=|a_{11}|\xlongequal{\text{def}}a_{11}$$

(注意不要把 1 阶行列式 $|a_{11}|$ 与 a_{11} 的绝对值相混淆). 当 $n=2,3,\cdots$ 时，用以下公式递归地定义 n 阶行列式的值为

$$D\xlongequal{\text{def}}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1.11}$$

其中，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，而 M_{1j} 是删去 D 中第 1 行元素和第 j 列元素后所形成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n$$

定义 1.2 (余子式与代数余子式) 在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中，称删去 a_{ij} 所在的第 i 行元素和第 j 列元素后所形成的 $n-1$ 阶行列式为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为 a_{ij} 的**代数余子式**.

在 n 阶行列式(1.10)中，称元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线为行列式的**主对角线**，相应地称 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为行列式的**主对角线元素**；另一条对角线(即从右上角到左下角的对角线)称为行列式的副对角线，位于副对角线上的元素称为行列式的副对角线元素.

n 阶行列式代表一个数，以后在不致发生混淆时，我们把 n 阶行列式与它的值不予严格区分.

例 1.3 证明：下三角行列式(主对角线上(下)边的元素全为零的行列式称为**下(上)三角行列式**)的值等于它的主对角线元素之积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证　对行列式的阶数 n 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立,则由定义 1.1,得 n 阶下三角行列式

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式是一个 $n-1$ 阶的下三角行列式,由归纳假设,它等于其主对角线元素之积 $a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$,所以

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \blacksquare$$

作为下三角行列式的特例,可知对角行列式(主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式)的值也等于它的主对角线元素之积,即

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

同理可证,副对角线上边的元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

注意这种行列式并不都等于其副对角线元素之积. 事实上,当 $n=4k$,或 $n=4k+1$ 时,它等于副对角线元素之积;而当 $n=4k-2$,或 $n=4k-1$ 时,它等于副对角线元素之积的负值($k=1,2,\cdots$).

1.1.3　行列式的基本性质

行列式的计算是一个重要问题. 但是,一般来说,按照定义来计算 n 阶行列式,当 n 较大时,计算将变得很复杂,计算量也很大. 所以,要解决行列式的计算问题,就必须利用行列式的定义,推导出行列式的一些基本性质,并利用这些性质来简化行列式的计算.

以下来讨论 n 阶行列式 D 的基本性质. 这些性质在行列式的计算及应用中都起着很重要的作用.

把行列式 D 的行依次换成列(或者说把 D 的列依次换成行)所得到的行列式称为 D 的**转置行列式**,记成 D^{T}(或 D'),即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1.1 可知，行列式对行成立的性质，对列也成立；反之亦然. 因此，以下仅以"行"或"列"的一种情形来论述行列式的其他性质.

性质 1.2 互换行列式两列的位置，行列式的值相反.

性质 1.1 和性质 1.2 都可用数学归纳法来证明，但由于其证明的表述较繁，本书略去其证明.

性质 1.3[①] 行列式 D 等于它的任一行各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.12}$$

并称(1.12)式为**行列式按第 i 行展开的公式.**

证 将 D 的第 i 行依次与它的前面 1 行作相邻两行位置的互换，直至将 D 的第 i 行换到了第 1 行，由性质 1.2，得

$$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意上式右端行列式的$(1,j)$元素的余子式就是 D 的(i,j)元素的余子式 M_{ij} $(j=1,2,\cdots,n)$，利用定义 1.1，将上式右端的行列式按第 1 行展开，得

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{i-1}[a_{i1}(-1)^{1+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{1+2}M_{i2}+\cdots+a_{in}(-1)^{1+n}M_{in}] \\ &=a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2}+\cdots+a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} \\ &=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

性质 1.3 表明行列式可以按任一行展开，这就把由定义 1.1 所提供的行列式计算方法作了很大推广. 再结合性质 1.1，可知行列式也可按任一列展开，即

① 性质 1.3 在行列式的理论中有极其重要的作用，从应用的角度甚至可以把(1.12)和(1.13)式看作行列式的出发点或定义.

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{1.13}$$

并称(1.13)式为**行列式按第 j 列展开的公式**，而把由公式(1.12)(公式(1.13))提供的行列式计算法则称为**行列式按一行(列)展开法则**. 由于用这个法则计算行列式，是将较高阶行列式的计算化为较低阶行列式的计算，因而也称这个法则为**降阶法**.

例如计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 由性质 1.3

按第 1 行展开：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\times(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$+3\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

按第 1 列展开：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\times(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

按第 2 行展开：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\times(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$+2\times(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

按第 2 列展开：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$+0\times(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

按第 3 行或第 3 列展开的结果都是零，请读者自行验证.

性质 1.4　若行列式某行的各元素有公因子 k，则可将 k 提到行列式符号外边来(或者说，用一个数 k 去乘行列式，就等于用 k 去乘行列式某行的每个元素)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

证 记(1.14)式左端的行列式为 M,则 M 与行列式 $D=\det(a_{ij})$ 所不同的仅仅是第 i 行元素. 注意行列式的 (i,j) 元素的代数余子式与行列式的第 i 行元素和第 j 列元素都是无关的,所以,M 的 (i,j) 元素的代数余子式就是 D 的 (i,j) 元素的代数余子式 A_{ij}. 于是利用性质 1.3,将 M 按第 i 行展开,便得

$$M = \sum_{j=1}^{n}(ka_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}k(a_{ij}A_{ij}) = k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} = kD$$

即(1.14)式的左端与其右端相等. ▌

在(1.14)式中取 $k=0$,可得

推论 1.1 若行列式 D 的某行元素全为零,则 $D=0$.

性质 1.5 若行列式某行的每个元素都是两个数的和,则可将此行列式写成两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

性质 1.5 的证明也是利用性质 1.3,其证明留给读者完成.

性质 1.6 若行列式 D 中有两行的对应元素都相等,则 $D=0$.

证 设 D 的第 i 行与第 j 行相同,将这两行互换,由性质 1.2 得 $D=-D$,所以,$D=0$. ▌

由性质 1.4 和性质 1.6,立即可得

推论 1.2 若行列式 D 中有两行的元素对应成比例,则 $D=0$.

利用性质 1.5 和性质 1.6 的推论,立即可得

性质 1.7 行列式某行加上另一行的 k 倍(指某行每个元素加上另一行对