

三  三 船舶工程精品图书

# 舰船结构 振动冲击与噪声

◎ 姚熊亮 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

# 舰船结构振动冲击与噪声

姚熊亮 编著

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

全书分6章,系统介绍了舰船结构振动冲击与噪声的理论和最新发展趋势,在兼顾结构动力本身的系统性的同时,着重强调工程应用技术。本书所涉及的专题内容全面、集中,是作者及其课题组在吸取国内外最新研究成果和总结所取得的工程技术经验的基础之上编著而成,概念清晰,论述由浅入深,科学严谨,可满足船舶行业广大读者的不同要求。

本书可作为船舶工程研究生教材,也可作为相关专业工程技术人员及科研人员的学习参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

舰船结构振动冲击与噪声/姚熊亮编著. —北京:国防工业出版社,2007.2

ISBN 7-118-04881-X

I. 舰... II. 姚... III. ①船舶振动—研究②船舶—力学冲击—研究③船舶噪声—研究 IV. U661.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第144791号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 印张 25 $\frac{1}{4}$  字数 583千字

2007年2月第1版第1次印刷 印数1—3000册 定价45.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

# 前 言

随着我国国防建设和海洋开发事业的蓬勃发展,舰船结构振动冲击及其噪声的理论与应用研究日渐拓展,尤其在舰船结构在爆炸冲击载荷作用下的动态响应、舰船结构的水下辐射噪声,舰船附体及陷落腔的流噪声,舰船的隐身性及海洋立管的涡激振动等方面新技术和新成果的涌现层出不穷。迄今为止,关于上述专题的研究零星地分散在不同的专著中,而作为船舶与海洋工程学科的研究生教材中所涉及的上述专题在国内尚没有适当的教材能将其最新内容比较系统、集中地展示出来。为了培养适应 21 世纪需要的厚基础、宽专业、重创新、高素质人才,作者编著了本教材。

20 世纪 80 年代初,上海交通大学陆鑫森教授在总结了当时研究成果的基础上编著了面向船舶与海洋工程学科的研究生教材《高等结构动力学》,此教材在我国某些高校作为研究生参考书一直沿用至今。为了反映当今船舶与海洋工程领域结构动力学的最新研究动态,作者及其课题组在陆鑫森教授编写的《高等结构动力学》的基础上,吸取了国内外最新研究成果,并将课题组近 10 余年承担的国家基金项目 and 参加部分工程研究任务所取得的成果编著在一起。其中的许多内容已在国内外重要刊物发表,有的已在相关技术与工程中应用。全书共 6 章。第 1 章讲述了结构系统的离散化,主要介绍了结构系统的离散化方法,线性及非线性系统的求解方法等内容。第 2 章讲述了大尺度物体的流—固耦合振动分析方法,含有限元法、边界元法、瞬态分析时的延迟势法及双渐近法。第 3 章讨论分析了小尺度物体的流固耦合振动,分别论述了小尺度物体在定常流场中的涡激振动及在波浪中结构的动力分析。第 4 章论述了舰船爆炸与冲击响应,即水下爆炸及空中爆炸的特性、舰船结构冲击响应分析方法及新型冲击因子的提出与应用等内容。第 5 章讲述了舰船舱室噪声与辐射噪声的预测与分析法。第 6 章介绍了智能材料在舰船上的应用与控制。

本书力图反映舰船结构振动冲击与噪声的最新发展趋势,兼顾结构动力本身的系统性,着重强调工程应用技术。在撰写中注重物理概念清晰,力求由浅入深,叙述严谨。

本书流—固耦合振动及涡激振动部分由戴绍仕博士编写,水下爆炸载荷及其对舰船的冲击响应部分由张阿漫博士完成研究和编写,结构噪声部分由康庄博士协助编写,在舰船智能结构方面邓忠超博士做出了很多贡献。此外郭君、庞福振也参与了本书部分内容的研究和讨论。

本书承蒙中国船舶研究中心吴有声院士的审阅,他提出了很多宝贵意见,尤其是他建议将本教材的名称改为《舰船结构振动冲击与噪声》,这些有意义的建议对本书的定稿起到了积极的作用。另外,海军工程大学朱锡教授,哈尔滨工业大学李惠教授,哈尔滨工程大学戴仰山教授和聂武教授也提出了许多宝贵意见,在此表示深切的敬意和感谢。

本书的出版得到哈尔滨工程大学“十五”研究生教材建设专项资金的资助,特此致谢!

还应该着重说明的是,本教材所涉及的内容属于不同专题中的研究热点,部分观点还有待进一步的完善和提高。因此,迫切希望读者对我们的工作提出宝贵意见,使其日臻成熟。

姚熊亮

2006年10月

# 目 录

<b>第 1 章 结构动力学基础</b> .....	1
1.1 结构系统的离散化 .....	1
1.1.1 结构离散化 .....	1
1.1.2 变分法 .....	1
1.1.3 加权残量法 .....	3
1.1.4 有限元法 .....	7
1.1.5 边界元法 .....	7
1.2 线性系统的动力响应求解方法 .....	9
1.2.1 结构振动特征值问题的性质 .....	9
1.2.2 模态叠加法 .....	11
1.2.3 直接积分法 .....	15
1.2.4 子空间迭代法 .....	18
1.3 动力子结构方法 .....	22
1.3.1 动力子结构方法的由来 .....	22
1.3.2 模态综合法 .....	22
1.3.3 界面位移综合法 .....	24
1.3.4 迁移子结构法 .....	25
1.4 非线性振动的时域解 .....	27
1.4.1 增量方程 .....	28
1.4.2 有限差分法 .....	30
1.4.3 Newmark 法 .....	31
1.4.4 Wilson 法 .....	32
1.5 人工边界多次透射理论 .....	33
1.5.1 理论和基本公式的推导 .....	34
1.5.2 波动的有限元模拟 .....	35
1.5.3 近场波动数值模拟的实现 .....	38
参考文献 .....	38
<b>第 2 章 大尺度物体流固耦合振动</b> .....	39
2.1 有限元法 .....	39
2.1.1 流体运动方程的建立 .....	40
2.1.2 流体元 .....	44
2.1.3 结构的运动方程式 .....	49

2.1.4	时域与频域求解 .....	50
2.1.5	湿模态法 .....	51
2.1.6	杂交子结构法 .....	52
2.1.7	干模态法 .....	57
2.2	边界元法 .....	59
2.2.1	流体控制方程式 .....	60
2.2.2	Green 方程 .....	61
2.2.3	干模态法 .....	62
2.2.4	Hess-Smith 方法 .....	65
2.2.5	湿模态法 .....	66
2.3	延迟势法 .....	69
2.3.1	延迟势法(Retarded Potential Method) .....	69
2.3.2	延迟势法的数值解法 .....	72
2.4	双渐近法 .....	78
2.4.1	早期近似法(Early Time Approximations, ETA) .....	78
2.4.2	后期近似法 LTA(Late Time Approximation) .....	79
2.4.3	双渐近法(Doubly Asymptotic Approximation, DAA) .....	81
2.4.4	声学近似 DAA 法 .....	83
	参考文献 .....	88
<b>第3章</b>	<b>小尺度物体的流固耦合振动 .....</b>	<b>89</b>
3.1	旋涡脱落与涡激振动 .....	89
3.1.1	旋涡形成和脱落机理 .....	89
3.1.2	旋涡脱落特性 .....	91
3.2	细长弹性体的流固耦合振动预报 .....	108
3.2.1	升力振子模型 .....	108
3.2.2	升力相关模型 .....	111
3.2.3	弹性双柱流固耦合振动预报方法 .....	118
3.3	线内振动(In-Line Vibrations) .....	120
3.4	跳跃振动 .....	120
3.4.1	发生跳跃振动的条件和判断准则 .....	121
3.4.2	跳跃振动 .....	123
3.4.3	减小跳跃振动的方法 .....	126
3.5	波流中小尺度物体振动分析 .....	126
3.5.1	Morison 公式 .....	126
3.5.2	Morison 公式中系数的讨论 .....	130
3.5.3	升力系数 .....	134
3.5.4	波浪中圆柱体的尾涡图形 .....	138
3.6	数值模拟 .....	139
	参考文献 .....	142

<b>第 4 章 舰船爆炸冲击响应</b> .....	144
4.1 水下爆炸载荷 .....	144
4.1.1 水中爆炸基本物理现象 .....	144
4.1.2 水下爆炸冲击波 .....	145
4.1.3 气泡脉动载荷 .....	147
4.1.4 水下爆炸载荷的半经验公式 .....	151
4.1.5 计算气泡脉动载荷的其他方法 .....	153
4.2 材料的冲击特性 .....	154
4.2.1 舰船用材料发展现状 .....	154
4.2.2 舰船材料的应变率效应 .....	155
4.2.3 舰船爆炸动响应研究中常用的材料模式 .....	156
4.2.4 917 低磁钢材料动态特性试验 .....	157
4.2.5 其他几种材料的动态性能简介 .....	162
4.3 舰船结构冲击响应分析方法及特征 .....	168
4.3.1 冲击响应谱概述 .....	169
4.3.2 冲击响应谱的生成 .....	172
4.3.3 舰船结构冲击响应特征 .....	176
4.4 水下爆炸载荷作用下的舰船总强度 .....	178
4.4.1 爆炸载荷作用下的船体响应 .....	178
4.4.2 水下爆炸气泡脉动威力 .....	179
4.4.3 波浪载荷与爆炸载荷联合作用下的船体总强度 .....	181
4.5 水下爆炸气泡动态特性 .....	185
4.5.1 理论基础 .....	186
4.5.2 初始条件 .....	188
4.5.3 数值解法 .....	189
4.5.4 气泡在重力场中的运动 .....	190
4.5.5 气泡与刚壁的相互作用 .....	192
4.5.6 气泡与自由表面及结构之间的相互作用 .....	194
4.6 新型冲击因子 .....	196
4.6.1 水下爆炸冲击因子 .....	196
4.6.2 结构在波阵面上投影面积 $S_e$ 的计算方法 .....	198
4.6.3 冲击波相似参数 .....	200
4.6.4 基于数值试验对各冲击因子的验证 .....	201
4.6.5 对新型冲击因子的讨论 .....	208
4.7 潜艇艇体结构抗爆性能 .....	210
4.7.1 双层加肋圆柱壳结构抗冲击性能仿真研究 .....	210
4.7.2 双层加肋圆柱壳冲击环境研究方法初探 .....	214
4.7.3 潜艇冲击环境仿真 .....	218
4.8 舰船接触爆炸冲击环境 .....	221



4.8.1	接触爆炸作用下舰船破损的估算 .....	221
4.8.2	接触爆炸作用下舰体板架的变形和破损 .....	223
4.9	水面舰艇舷侧防雷舱破损及防护机理 .....	229
4.9.1	典型结构开裂判据 .....	229
4.9.2	爆炸载荷作用下舰船板架的变形与破损 .....	232
4.9.3	局部接触和近距离非接触爆炸时的结构防护 .....	236
4.9.4	远场水下爆炸作用下的防护结构形式 .....	244
4.9.5	民船舷侧防撞结构形式 .....	247
4.10	空中爆炸载荷 .....	249
4.10.1	空气冲击波 .....	249
4.10.2	冲击波基本方程及其性质 .....	250
4.10.3	冲击波超压经验公式 .....	255
4.10.4	冲击波的破坏作用 .....	257
4.11	舰船空中爆炸下的冲击响应 .....	259
4.11.1	结构表面处的载荷计算 .....	259
4.11.2	船体结构加速度响应 .....	259
4.11.3	舰船冲击谱 .....	261
4.12	空爆时舱室破损形式 .....	262
4.12.1	弹体的穿甲效应 .....	263
4.12.2	超压引起的结构破坏 .....	268
4.12.3	弹丸的杀伤效应 .....	273
4.12.4	爆炸后的温度场效应 .....	277
	参考文献 .....	277
<b>第5章</b>	<b>结构辐射噪声与自噪声</b> .....	<b>280</b>
5.1	噪声测定的主要指标 .....	280
5.1.1	声速和波长 .....	280
5.1.2	声级和分贝 .....	280
5.1.3	频率、频带和分贝 .....	281
5.1.4	分贝的运算 .....	282
5.2	船舶的主要噪声源及声振动传播途径和特点 .....	282
5.2.1	船舶的主要噪声 .....	282
5.2.2	船舶舱室噪声特点与分析 .....	284
5.2.3	船舶噪声的传播途径和特点 .....	288
5.3	船舶舱室噪声灰色预测 .....	292
5.3.1	船舶上层建筑舱室噪声灰色关联分析 .....	293
5.3.2	船舶上层建筑舱室噪声灰色预测模型 .....	294
5.3.3	灰色预测模型的推广 .....	299
5.4	潜艇结构辐射噪声预报方法 .....	299
5.4.1	有限元法及边界元法 .....	300

5.4.2	统计能量分析法 .....	308
5.4.3	解析法 .....	317
5.5	月池流噪声及流体振荡特性研究 .....	326
5.5.1	经验模态分解(EMD)法简介 .....	327
5.5.2	月池的流激振荡特性 .....	337
5.5.3	月池侧壁压力分布趋势 .....	346
	参考文献 .....	350
<b>第6章</b>	<b>舰船智能结构动力学</b> .....	<b>352</b>
6.1	智能材料 .....	352
6.1.1	形状记忆材料 .....	352
6.1.2	压电材料 .....	353
6.1.3	电(磁)流变液 .....	353
6.1.4	磁致伸缩材料 .....	353
6.1.5	光导纤维 .....	353
6.1.6	智能高分子材料 .....	354
6.2	智能结构 .....	354
6.2.1	智能结构概念 .....	354
6.2.2	智能结构工作机理 .....	355
6.2.3	智能结构关键技术 .....	355
6.2.4	智能结构的应用前景 .....	356
6.3	智能结构振动控制方法 .....	357
6.3.1	主动减振智能结构的组成 .....	357
6.3.2	智能化控制理论方法简述 .....	358
6.3.3	智能结构控制方法 .....	359
6.4	压电材料的应用 .....	361
6.4.1	压电材料的基本性质 .....	361
6.4.2	压电方程 .....	361
6.4.3	压电特性参数 .....	363
6.4.4	压电材料在船体结构中的应用 .....	364
6.4.5	智能结构动态特性灵敏度分析 .....	371
6.5	形状记忆合金的应用 .....	378
6.5.1	形状记忆合金的材料属性 .....	378
6.5.2	形状记忆合金的本构模型 .....	380
6.5.3	形状记忆合金在小型驱动器中的应用 .....	384
	参考文献 .....	394

# 第 1 章 结构动力学基础

## 1.1 结构系统的离散化

### 1.1.1 结构离散化

在结构动力学问题中,通常可用偏微分方程描述并按给定的边界条件和初始条件求解,但实际上只有极少数简单的结构系统如弦、欧拉梁等,才能用数学解析的方法求得其精确解。对于比较复杂的结构或边界形状不规则的结构,是得不到数学解析解的。为了有效地利用计算机来求得具有足够精度的数值解,必须改变用偏微分方程建立数学模型,使之成为只包含基本运算的代数方程型式。为此,就要对在空间上和时间上连续的结构动力系统离散化。虽然结构系统可以同时和时间域和空间域上进行离散化,但较为方便的是采用“部分离散化”的方法,在空间域上先行离散化,将偏微分方程式离散成一组常微分方程,然后再对此常微分方程组在时间域内进行离散化,或直接采用解析解。

本节主要讨论结构系统在空间域内的离散技术,在时间域内离散化问题将在以后的章节中讨论。

### 1.1.2 变分法

#### 1. 广义变分原理

Hamilton's philosophy 是结构动力学中用得最普遍的一种变分原理。以连续介质力学中的最小势能原理为基础,考虑了结构的惯性效应,取位移矢量作为进行变分的独立函数,其附加约束条件是满足几何边界条件和初终值条件,除此以外的其他多种变分原理,一般均可从下列广义变分原理导出。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_G - \pi_G) dt = 0 \quad (1.1.1)$$

式中:  $T_G$  为动能的广义形式,即

$$T_G = \iiint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \mathbf{p}^T (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{r}}) \right] d\Omega \quad (1.1.2)$$

$\mathbf{v}$  由下式定义,即

$$\mathbf{v} - \dot{\mathbf{r}} = 0$$

$\mathbf{p}$  为 Lagrange 乘子

$$\mathbf{p} = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$$

泛函  $\pi_G$  为

$$\pi_G = \iiint_{\Omega} \{A(\epsilon) - \mathbf{p}^T \mathbf{r} - \boldsymbol{\sigma}^T [\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\varphi}]\} d\Omega - \iint_{S_1} \mathbf{F}^T \mathbf{r} ds - \iint_{S_2} \mathbf{R}^T (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}) ds \quad (1.1.3)$$

式中:  $A(\epsilon)$  为单位体积应变能;  $\mathbf{P}$  为体力矢量;  $\mathbf{F}$  为在  $S_1$  边界上的作用力;  $\bar{\mathbf{r}}$  为在  $S_2$  边界上给定的位移;  $\boldsymbol{\epsilon}$  为应变矢量;  $\boldsymbol{\varphi}$  为应变算子, 对小变形问题为

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  为应力矢量, 在式中可视为 Lagrange 乘子, 即

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yx} \quad \tau_{zx}]^T \quad (1.1.5)$$

$\mathbf{R}$  为 Lagrange 乘子矢量, 即

$$\mathbf{R} = [R_x \quad R_y \quad R_z]^T \quad (1.1.6)$$

广义变分式中均为参与变分的独立函数, 在空间域中无附加的约束条件, 但在时间域内应满足初终值条件。要取消这一时域内的约束条件, 建立一个更广泛的变分原理也是可能的, 但首要的是在  $t$  时刻的运动方程式和边界条件的推导及其在空间域内的离散化, 故一般没有这一必要。

## 2. 瑞利 - 李兹法

这是一种近似的变分直接解法, 是一种应用广泛的结构系统离散化和自由度缩减的方法。这种方法实际上是取一组相互独立的满足约束条件的函数作为坐标线性变换的底基矢量称为李兹基。将连续系统的无限自由度问题近似的转化为离散系统的有限自由度问题, 即简化为求解与李兹基相应的广义坐标所描述的问题。

这种方法的求解精度取决于李兹基的选取, 如果李兹基是完整的函数族, 即再也不存在不属于此函数族而与此函数族全都线性无关的函数, 则用李兹基变换后所得到的解可收敛至精确解。通常只取此完整函数族的一个子集作为李兹基以缩减自由度数目, 提高计算效率。所以瑞利 - 李兹法所得的结果是近似的, 相当于给结构系统附加了一些约束, 但如果李兹基选择得好, 则结构系统的真实运动能相当逼真地在李兹基所组成的子空间

中展现,这样就得到足够精确的近似解。

### 1.1.3 加权残量法

加权残量法是一种将未知函数在其定义域内用基函数展开的求解微分方程式的近似方法。对于几何形状规则的不太复杂的结构系统,这是一种比较方便和有效的、将连续介质系统离散成有限自由度系统的方法。

#### 1. 微分方程边值问题的加权残量近似法

讨论满足下列微分方程式和边界条件的结构系统的离散化问题

$$L[r(s,t)] = F(s,t) \quad \text{在空间域 } S \text{ 内} \quad (1.1.7)$$

$$g[r(s,t)] = h(t) \quad \text{在边界 } B \text{ 上} \quad (1.1.8)$$

式中: $r(s,t)$  为响应函数; $F(s,t)$  为激励函数; $h(t)$  为边界上的给定函数; $L$  和  $g$  为数学算子; $s \in S, t \in T$  分别为空间和时间坐标。

设  $r(s,t)$  可近似地用一组独立的基函数  $N_j(s) (j = 1, 2, \dots)$  表示,即

$$r(s,t) \cong \tilde{r}(s,t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(s) \quad (1.1.9)$$

式中: $q_j(t)$  是待定参数,与空间坐标  $s$  无关,可视为广义坐标;

$N_j(s)$  是一完备的函数族,当基函数的数目  $n \rightarrow \infty, \tilde{r}(s,t) \rightarrow r(s,t)$ 。

显然,有限个基函数所表示的近似值  $\tilde{r}$  不满足微分方程和边界条件。将  $\tilde{r}(s,t)$  代入式(1.1.7)和式(1.1.8),则在空间域  $S$  上和边界  $B$  上会分别有残量  $R_S$  和  $R_B$ ,且有

$$R_S = L[\tilde{r}] - F \quad (1.1.10)$$

$$R_B = g[\tilde{r}] - h \quad (1.1.11)$$

式中: $R_S$  和  $R_B$  均为空间坐标  $s$  的函数,分别表征在  $S$  域上和边界  $B$  上的误差量。加权残量法就是用一组权函数  $\omega_i(s)$  使误差量  $R_S$  和  $R_B$  在  $S$  内和  $B$  上加权平均值等于零,即

$$\int_S \omega_i R_S ds + \int_B \overline{\omega_i} R_B dB = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.12)$$

边界上的权函数  $\overline{\omega_i}(s)$  和空间域内的权函数  $\omega_i(s)$  可以独立地选取。

对基函数  $N_j(s)$  的完备性的要求,即保证  $n \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{r} \rightarrow r$  的要求,现在可表示成当  $n \rightarrow \infty$ , 对所有的  $i$ , 式(1.1.12)均成立。实际上,这就保证了在所有  $S$  和  $B$  上,  $R_S \rightarrow 0$  和  $R_B \rightarrow 0$ , 在  $N_j(s)$ 、 $\omega_i(s)$  和  $\overline{\omega_i}(s)$  选定的情况下,式(1.1.12)是一组广义坐标  $q_j(t) (j = 1, 2, \dots, n)$  的常微分方程组。如果  $L$  和  $g$  为线性算子,则此为一线性常微分方程组;如果  $L$  和  $g$  不是线性的,即系统是非线性的,则此为一非线性常微分方程组。这样,连续体系统就离散成  $n$  个自由度系统。

#### 2. 加权残量法的“弱形式”(Weak Form)和自然边界

加权残量式(1.1.12)中第一项的积分式中包含微分算子  $L$ ,用分部积分法(Green公式)将式(1.1.12)化为

$$\int_S L_w[\omega_i] \cdot L_r[\tilde{r}] ds + \int_B \omega_i L_B[\tilde{r}] dB - \int_S \omega_i F ds + \int_B \overline{\omega_i} g[\tilde{r}] dB - \int_B \overline{\omega_i} h dB = 0 \quad (1.1.13)$$

式中:  $L_w$ 、 $L_r$  和  $L_B$  为微分算子, 它们的微分阶数均比原来的算子  $L$  低, 这样, 在选取  $\tilde{r}$  的形状函数(试验函数)时, 对这些函数的连续性阶数的要求就可以降低些。但对权函数, 因为出现了  $L_w$  算子, 其连续性的要求就提高了。式(1.1.13) 称为加权残量法的弱形式表达式。对于某些边界条件, 在适当地选取边界积分中的权函数  $\overline{\omega_i}$  后可使上式中含  $g[\tilde{r}]$  和  $L_B[\tilde{r}]$  的边界积分消除掉, 或部分地消除掉, 此类边界条件亦称为自然边界条件。

### 3. 伽辽金(Galerkin)法

权函数的取法不同可形成各种不同的近似方法, 著名的伽辽金法实际上就是一种把权函数取得与基函数相同的加权残量法。按伽辽金法取

$$\omega_i(s) = N_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.14)$$

并使之满足所有的边界条件, 则线性系统离散化后的质量阵  $\mathbf{M}$ , 阻尼阵  $\mathbf{C}$  和刚度阵  $\mathbf{K}$  的第  $(i, j)$  元为

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_S N_i L_M[N_j] ds \\ c_{ij} &= \int_S N_i L_C[N_j] ds \\ k_{ij} &= \int_S N_i L_K[N_j] ds \end{aligned} \right\} \quad (1.1.15)$$

### 4. 配点法

此种方法取狄拉克(Dirac)  $\delta$  函数作为权函数。

$$\omega_i(s) = \delta(s - s_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.16)$$

式中:  $s_i$  是所选定的要配置的点的坐标。用这种方法对线性振动系统离散化后,  $m_{ij}$ 、 $c_{ij}$  和  $k_{ij}$  分别为

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_S \delta(s - s_i) L_M[N_j(s)] ds = L_M[N_j(s_i)] \\ c_{ij} &= \int_S \delta(s - s_i) L_C[N_j(s)] ds = L_C[N_j(s_i)] \\ k_{ij} &= \int_S \delta(s - s_i) L_K[N_j(s)] ds = L_K[N_j(s_i)] \end{aligned} \right\} \quad (1.1.17)$$

力矢量  $f$  的元为

$$f_i = \int_S \delta(s - s_i) \{ F(s, t) - L_K[r_b(s, t)] - L_C[\dot{r}_b(s, t)] - L_M[\ddot{r}_b(s, t)] \} ds = \\ F(s_i, t) - L_K[r_b(s_i, t)] - L_C[\dot{r}_b(s_i, t)] - L_M[\ddot{r}_b(s_i, t)] \quad (1.1.18)$$

这种方法实际上是保证在所有的配置点  $s_i$  上满足微分方程式。同样, 也可在边界上设配置点使边界条件也满足, 由上式可以看出此法的优点是配置点的选取很灵活, 在计算  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $f$  时毋需对  $S$  求积, 但  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  是非对称的。

### 5. 子域配置法

将空间域  $S$  划分为若干个子域  $s_i$ , 即

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.19)$$

并取权函数

$$\omega_i(s) = \begin{cases} 1, & s \in S_i \\ 0, & s \notin S_i \end{cases} \quad (1.1.20)$$

用此种权函数的加权残量法称为子域配置法。对于线性振动系统, 由下式

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_S \omega_i L_M [N_j] ds \\ c_{ij} &= \int_S \omega_i L_C [N_j] ds \\ k_{ij} &= \int_S \omega_i L_K [N_j] ds \end{aligned} \right\} \quad (1.1.21)$$

和广义力矢量  $f$  的第  $i$  元

$$f_i = \int_S \omega_i (F - L_K [r_b] - L_C [\dot{r}_b] - L_M [\ddot{r}_b]) ds \quad (1.1.22)$$

可得

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_{S_i} L_M [N_j] ds_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ c_{ij} &= \int_{S_i} L_C [N_j] ds_i, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ k_{ij} &= \int_{S_i} L_K [N_j] ds_i \\ f_{ij} &= \int_{S_i} (F - L_K [r_b] - L_C [\dot{r}_b]) ds_i \end{aligned} \right\} \quad (1.1.23)$$

这种方法实际上就是在各子域  $S_i$  上残量平均等于零, 将子域划分的越多、越小就越接近于各处都满足微分方程式。可以说这是配点法的一种拓广。

### 6. 最小二乘法

这是一种变分法与加权残量法结合的方法。定义残量  $R$  的乘方和为误差函数或目标函数  $E$ , 即

$$E = \int_S R^2(Q) ds \quad (1.1.24)$$

式中

$$Q = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)]^T \quad (1.1.25)$$

为广义坐标矢量, 按下列使目标函数  $E$  极小的条件可把连续系统离散化, 即

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.26)$$

或 
$$\int_s \frac{\partial R}{\partial q_i} R(\mathbf{Q}) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.27)$$

可见,这种方法实际上就是取权函数

$$\omega_i = \frac{\partial R}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.28)$$

### 7. 积分方程的加权残值近似式

前面讨论的是用微分方程和边界条件描述的结构动力系统的离散化,对于用积分方程描述的结构动力系统,同样也可用加权残值法离散化。为简便起见,以一维结构系统振动的积分方程式为例来说明,即

$$r(x, t) = \int_L G(x, s) \left[ P(s, t) - m(s) \frac{\partial^2 r(s, t)}{\partial t^2} \right] ds \quad (1.1.29)$$

式中: $G(x, s)$  是格林函数或影响函数,表示在  $s$  处作用一单位力在  $x$  处所产生的位移。对于线性结构系统,根据马克斯威尔互易定理有

$$G(x, s) = G(s, x) \quad (1.1.30)$$

式中: $P(s, t)$  是分布动载荷; $m(s)$  是单位长度质量; $L$  是积分域。

设积分方程的解  $r(x, t)$  可近似地展开成下列形式

$$r(x, t) \cong \tilde{r}(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x) \quad (1.1.31)$$

式中: $N_j(x)$  是基函数; $q_j(x)$  是广义坐标。将上式代入积分方程式(1.1.29)可得残值

$$\begin{aligned} R = \tilde{r}(x, t) - \int_L G(x, s) \left[ P(s, t) - m(s) \frac{\partial^2 \tilde{r}(s, t)}{\partial t^2} \right] ds = \\ \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x) - \int_L G(x, s) \left[ P(s, t) - m(s) \sum_{j=1}^n \ddot{q}_j(t) \cdot N_j(s) \right] ds \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

取权函数  $w_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),按加权平均等于零的条件可得

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (1.1.33)$$

式中: $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{f}$  的元分别为

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_L w_i(x) \int_L G(x, s) m(s) N_j(s) ds dx \\ k_{ij} &= \int_L w_i(x) N_j(x) dx \\ f_i &= \int_L w_i(x) \int_L G(x, s) P(s, t) ds dx \end{aligned} \right\} \quad (1.1.34)$$

一般, $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  均为非对称矩阵。

为使  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  对称化,对残值  $R$  乘以  $\sqrt{m(x)}$ ,并取新的基函数,即

$$\varphi_j(x) = \sqrt{m(x)} N_j(x) \quad (1.1.35)$$

再按伽辽金法取权函数等于  $\varphi_j(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),离散化后得到的  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{f}$  的元为



$$\left. \begin{aligned}
 m_{ij} &= \int_L \int_L \varphi_i(x) \sqrt{m(x)} G(x,s) \sqrt{m(s)} \varphi_j(s) ds dx = \\
 &\int_L \int_L N_i(x) m(x) G(x,s) m(s) N_j(s) ds dx \\
 k_{ij} &= \int_L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \int_L m(x) N_i(x) N_j(x) dx \\
 f_i &= \int_L \varphi_i(x) \sqrt{m(x)} \int_L G(x,s) P(s,t) ds dx = \\
 &\int_L \int_L N_i(x) m(x) G(x,s) P(s,t) ds dx
 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.36)$$

### 1.1.4 有限元法

在结构系统是二维或三维的连续体、其形状或边界形状较复杂的情况下,基函数的选取相当困难,而用有限元法可很方便地克服这一困难。这种方法是将结构分割成一组有限尺寸的单元,称为有限元,然后在各子域内分别选取基函数并用变分原理的直接解法:瑞利-李兹法或加权残量法建立近似式将各有限元离散化。由于在将结构割分成有限元时一般总可使有限元的形状变得十分简单、整齐,如三角形、矩形、多面体等,或用拓扑技术转变成很规则的形状,这样对各有限元试验函数或基函数的选择就相当方便。

### 1.1.5 边界元法

边界元法的优点是毋需将整个空间域划分成有限元离散化,只要将空间域的边界积分离散化。这样三维问题就转变成二维问题,二维问题就转变成一维问题,使问题的维数降低一档。因此,在电脑上解题的规模、所需的内存以及输入数据的准备工作量等都可大大减小,这对流体结构耦合问题和土壤结构耦合问题等具有无限域的问题特别有利。

以 Laplace 方程问题为例阐明边界元法的基本特点,这对分析流体结构耦合问题是十分有用的。讨论不可压缩流体的有势流动问题,速度势  $\phi$  在  $\Omega$  域内满足 Laplace(拉普拉斯)方程(见图 1.1)

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.1.37)$$

在表面  $S$  上,可有两种边界条件

$$(1) \text{Dirichlet 条件: } \phi(p) = f(p), p \in S_1 \quad (1.1.38)$$

$$(2) \text{Neumann 条件: } \frac{\partial \phi(p)}{\partial n} = g(p), p \in S_2$$

$$(1.1.39)$$

$S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \phi$ .  $p$  是场点,  $n$  是边界  $S_2$  的法线方向。  $f(p), g(p)$  为给定函数。

为了建立等效的积分方程式,需求出 Laplace 方程的基本解——Green 函数  $G(p, q)$ , 它满足下列方程式

$$\nabla^2 G(p, q) = -\delta(p, q) \quad (1.1.40)$$

式中:  $p \in \Omega, q \in \Omega, \delta$  为 Dirac  $\delta$  函数,且

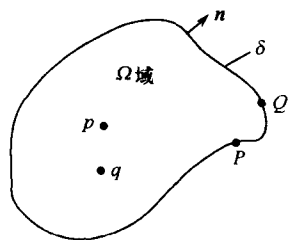


图 1.1 场点  $p \in \Omega, P \in S$ ,  
物点  $q \in \Omega, Q \in S$