



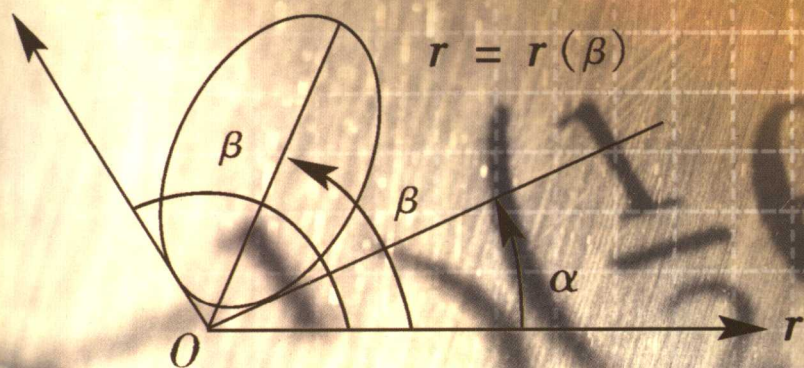
世纪高职高专规划教材

高等数学

(上册)

AODENGSHUXUE

主编 邹豪思 冯 尚



A

内蒙古大学出版社



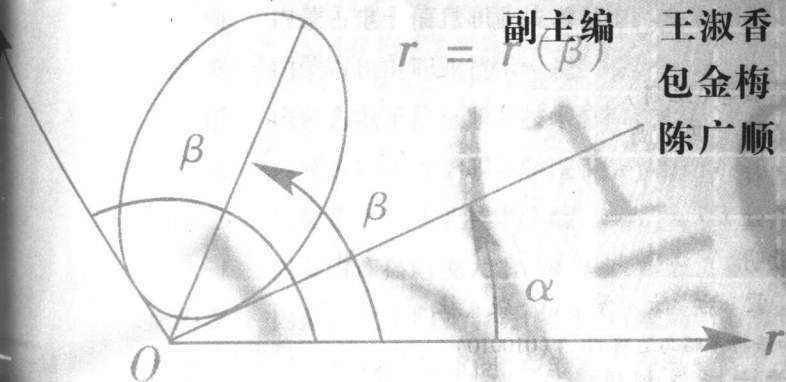
21世纪高职高专规划教材

高等数学

(上册)

AODENGSHUXUE

主 编 邹豪思 冯 尚
副主编 王淑香 刘美英
包金梅 其木格
陈广顺



内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/邹豪思,冯尚主编. -呼和浩特:内蒙古大学出版社,2006.8
ISBN 7-81115-002-6

I. 高… II. ①邹…②冯… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 106328 号

书 名	高等数学(上册)
主 编	邹豪思 冯 尚
责 任 编 辑	张国柱
封 面 设 计	张燕红
责 任 校 对	李敬明
出 版	内 蒙 古 大 学 出 版 社 呼和浩特市昭乌达路 88 号(010010)
发 行	内 蒙 古 新 华 书 店
刷 印	呼和浩特市欣欣彩虹印刷包装有限责任公司
开 本	787×1092/16
印 张	12
字 数	292 千
版 期	2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷
标 准 书 号	ISBN 7-81115-002-6/O·2
定 价	15.00 元

本书如有印装质量问题,请直接与出版社联系

前 言

为了进一步贯彻落实教育部和自治区关于高职高专教育的具体要求,内蒙古大学出版社组织了一批具有多年教学实践经验的一线骨干教师编写了这套《高等数学》教材。

本书是为高职高专理工科各专业学生编写的,编写本教材以高职高专理工科《高等数学》教学大纲为指导;以“删繁就简、适度、够用”为基本思路;以掌握基础知识,强化基本运算能力,为学习专业课提供必备的数学素养为根本目的。在编写过程中,力求语言叙述通俗易懂,在保证知识系统、连贯的同时,对较繁琐的理论证明不作介绍,而直接给出结论,本书配有大量练习题,旨在强化学生对基本概念的掌握和提高学生应用数学的能力。

本书分上下册,上册包括集合与函数、一元函数微分学和一元函数积分学等内容;下册包括微分方程、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和线性代数初步。参加本书编写的有:

- | | |
|-----|------------------------|
| 冯 尚 | 内蒙古电子信息职业技术学院(第一、二章) |
| 刘美英 | 内蒙古机电职业技术学院(第三、四章) |
| 其木格 | 内蒙古电子信息职业技术学院(第五、六章) |
| 陈广顺 | 内蒙古农业大学职业学院(第七章) |
| 邹豪思 | 内蒙古大学职业技术学院(第八、九章) |
| 包金梅 | 内蒙古广播电视大学(第十章,第十二章部分) |
| 王淑香 | 内蒙古化工职业学院(第十一章,第十二章部分) |

全书由邹豪思、冯尚统稿审阅。在编写过程中参阅了大量相关书籍并做了一些适当引用,在此向原著者表示真诚的谢意。由于编者水平有限,加之时间仓促,缺点和不足在所难免,恳请读者提出批评和建议并及时反馈给我们,以便进一步修订完善。

编者

2006年7月

目 录

第一章 函数	1
§ 1.1 集合与函数	1
§ 1.2 初等函数与函数的几个特性	10
复习题一	16
第二章 极限与连续	18
§ 2.1 数列的极限	18
§ 2.2 函数的极限	21
§ 2.3 无穷小量与无穷大量	24
§ 2.4 极限运算法则	27
§ 2.5 两个重要极限	31
§ 2.6 无穷小量的比较	36
§ 2.7 函数的连续性	39
复习题二	45
第三章 导数与微分	48
§ 3.1 导数概念	48
§ 3.2 函数求导法则	55
§ 3.3 微分及其在近似计算中的应用	65
§ 3.4 高阶导数	72
复习题三	75
第四章 导数的应用	76
§ 4.1 微分中值定理与洛必达法则	76
§ 4.2 函数的极值	83

§ 4.3 曲线的凹凸、拐点及函数作图	92
§ 4.4 曲率	97
复习题四	101
第五章 不定积分	103
§ 5.1 原函数与不定积分的概念	103
§ 5.2 凑微分法	108
§ 5.3 变量置换法	116
§ 5.4 分部积分法	120
§ 5.5 有理函数的积分举例	123
§ 5.6 积分表的使用	125
复习题五	127
第六章 定积分及其应用	129
§ 6.1 定积分概念	129
§ 6.2 定积分的性质	133
§ 6.3 定积分的基本公式(牛顿—莱布尼兹公式)	138
§ 6.4 变量置换法与分部积分法	142
§ 6.5 定积分的几何应用	147
§ 6.6 定积分的物理应用	153
§ 6.7 广义积分	157
复习题六	160
习题参考答案	163
附录 积分表	175
参考书目	186

第一章 函 数

初等数学研究的主要是常量及其运算,而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系,函数正是这种依赖关系的体现.因此,我们有必要对函数的概念、图像及性质进行复习.

§ 1.1 集合与函数

一、集合

1. 集合的概念

集合是指具有某种属性的一些事物所组成的全体.例如,某班全体同学组成一个集合;太阳系的所有星球组成一个集合;自然数1、2、3、4、5组成一个集合;满足不等式 $a < x < b$ 的 x 组成一个集合等等.集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**.习惯上集合用大写字母 A 、 B 、 C …表示,而元素用小写字母 a 、 b 、 c …表示.

如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a \in A$,读作“ a 属于 A ”.否则记作 $a \notin A$,读作“ a 不属于 A ”.含有有限个元素的集合称为**有限集**.含有无限个元素的集合称为**无限集**.

给定一个集合,就是给出这个集合由哪些元素组成.给出的方式不外两种:**列举法**和**描述法**.所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内.例如集合 A 包含1、2、3、4、5五个数,就可记为

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

所谓描述法,就是把集合中的元素的公共属性描述出来.它可记为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$$

大括号内先写上这个元素的一般形式,再划一竖线,然后写上这个集合的元素所具有的共同属性.例如满足不等式 $a < x < b$ 所有 x 的集合,可表示为

$$A = \{x \mid a < x < b\}$$

集合 $M = \{C \mid C \text{ 是圆心在原点的圆}\}$. 表示所有圆心在原点的圆的集合.

集合 $P = \{(x, y) \mid y = 2x + 1, x \in R\}$

表示所有在直线 $y = 2x + 1$ 上的点的集合, 其中 R 表示全体实数集合. 显然点 $(1, 2) \in P$, 而点 $(1, 3) \notin P$.

不含任何元素的集合叫做空集, 记为 ϕ . 例如, 方程 $x^2 = -1$ 的实数解是一个空集.

2. 集合的运算

定义 1 如果集合 A 中的每一个元素都属于集合 B , 则称 A 为 B 的子集. 记作

$$A \subseteq B$$

或

$$B \supseteq A$$

称为 A 包含于 B 或 B 包含 A .

例如, R 表示全体实数的集合, Q 表示全体有理数的集合. 显然 Q 中每一个元素都属于 R . 所以集合 Q 是集合 R 的子集, 即 $Q \subseteq R$.

如果 A 是 B 的子集, 并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫集合 B 的真子集, 记作

$$A \subset B$$

例如, 所有有理数集合 Q 是所有实数集合 R 的真子集, 即

$$Q \subset R$$

由定义 1 可知, 任何一个集合 A 是它自己的子集, 即 $A \subseteq A$. 空集是任何集合的子集.

定义 2 设两个集合 A, B . 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等. 记作

$$A = B$$

定义 3 既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素的集合叫做集合 A 与集合 B 的交集. 记作

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

如图 1.1 中阴影部分表示集合 A 与集合 B 的交集.

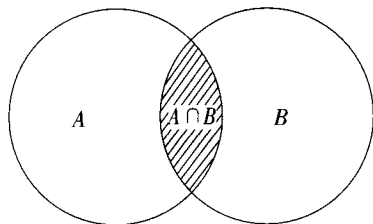


图 1.1

定义 4 所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集. 记作

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

如图 1.2 中阴影部分表示集合 A 与集合 B 的并集.

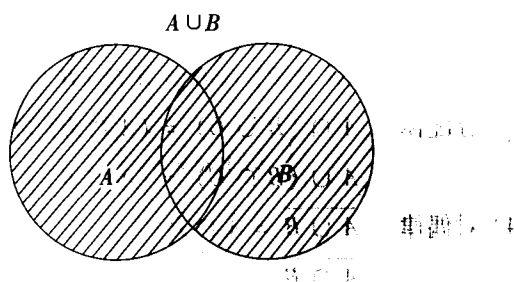


图 1.2

例如, $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 2\}$, 那么

$$A \cap B = \{x \mid 1 < x < 2\}; \text{ 而 } A \cup B = \{x \mid 0 < x < 3\}$$

又例如, $\{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{0, 2, 4, 8, 10\} = \{2, 4\}$

$$\{1, 2, 3, 4, 6\} \cup \{0, 2, 4, 8, 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$$

如果所讨论的集合都是某一个集合 I 的子集. 那么集合 I 称为全集.

定义 5 如果集合 A 是全集 I 的子集, 则在 I 中由不属于 A 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 的补集. 记作 $\bar{A}$. 如图 1.3 中阴影部分是集合 A 的补集 $\bar{A}$ (长方形表示全集 I), 它可表示为

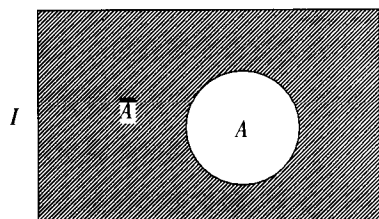


图 1.3

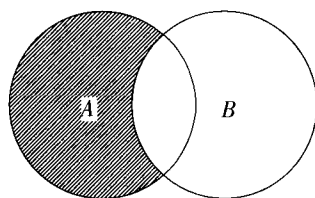


图 1.4

$$\bar{A} = \{x \mid x \in I, \text{ 且 } x \notin A\}$$

显然, $A \cup \bar{A} = I$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$. $\bar{\bar{A}} = A$. 例如, 全集 I 为所有实数集合. Q 表示所有有理数集合, 则

$$\bar{Q} = \{x \mid x \in R, \text{ 且 } x \notin Q\}$$

即 $\bar{Q}$ 为所有无理数集合.

定义 6 属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的差集. 记作

$$A - B = \{x \mid x \in A, \text{ 但 } x \notin B\}$$

如图 1.4 中阴影部分表示集合 A 与集合 B 的差集, 从定义知道补集是差集的特例.

例如, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, 则 $A - B = \{1, 4, 5\}$

集合的并、交、补运算满足:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3. 区间

集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记作 (a, b) . 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段, 但不包括端点 a 及端点 b (图 1.5).

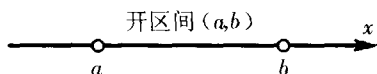


图 1.5

集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$. 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段, 包括其两个端点 (图 1.6).

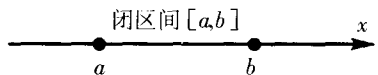


图 1.6

还有其他类型的区间:

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| $\{x \mid a < x \leq b\}$ | 记作 $(a, b]$; |
| $\{x \mid a \leq x < b\}$ | 记作 $[a, b)$; |
| $\{x \mid x > a\}$ | 记作 $(a, +\infty)$; |
| $\{x \mid x < a\}$ | 记作 $(-\infty, a)$; |
| $\{x \mid x \text{ 为任何实数}\}$ | 记作 $(-\infty, +\infty)$. |

区间长度为有限的, 称为**有限区间**, 区间长度为无限的称为**无限区间**.

集合 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为以点 a 为中心, δ 为半径的**邻域**. 记作 $U(a, \delta)$.

显然 $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$. 从数轴上看, 该邻域表示: 以点 a 为中心, 长度为 2δ 的开区间 (图 1.7).

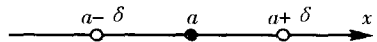


图 1.7

在 $U(a, \delta)$ 中, 去掉中心点 a 得到的实数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为 a 的**去心邻域**, 记

作 $\dot{U}(a, \delta)$. 例如, 以 -1 为中心, $\frac{1}{2}$ 为半径的邻域表示成开区间. 即

$$|x - (-1)| < \frac{1}{2}$$

去绝对值, 得

$$-\frac{1}{2} < x + 1 < \frac{1}{2}$$

即

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

即为开区间 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

去心邻域 $\dot{U}(-1, \frac{1}{2})$, 可用不等式表示为 $0 < |x - (-1)| < \frac{1}{2}$, 也可表示为区间 $(-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$.

二、函数

1. 函数的定义

定义 7 设有两个非空实数集合 D, M , 如果对于数集 D 中的每一个数 x , 按照确定的规则 f , 对应着数集 M 中唯一的一个数 y , 则称 y 是定义在集合 D 上的**函数**, 记作 $y = f(x)$.

函数也称为映射.

D 称为函数的**定义域**, 与 x_0 对应的 y 称为**函数值**, 记为 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$ 或 $y(x_0)$, 集合 $M_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**. 显然 $M_f \subseteq M$.

习惯上, 把 x 称为**自变量**, y 称为**因变量**.

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0 , 因变量 y 能得出一个确定的值, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义, $f(x_0)$ 称为**函数值**.

同一问题中不同的函数, 应该用不同的记号, 如 $f(x), g(x), F(x), G(x)$ 等等.

有时, 会出现对于变量 x , 有几个 y 值与之对应的情形, 根据函数定义, y 不是 x 的函数, 但为了方便, 我们约定把这种情况称之为 y 是 x 的多值函数. 对于多值函数通常是限制其 y 的变化范围使之成为单值, 再进行研究. 例如, 反三角函数 $y = \text{Arcsin} x$ 是多值函数, 当 y 限制在 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 就是单值函数了, 记为 $y = \arcsin x$.

例 1 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

求 $f(0), f(1), f(-x), f(x) + 1, f(x+1), f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}, f[f(x)]$.

解 $f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$$f(1) = 0$$

$$f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x} (x \neq 1)$$

$$f(x) + 1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x} (x \neq -1)$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{2+x} (x \neq -2)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1} (x \neq 0, x \neq -1)$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x} (x \neq 1, x \neq -1)$$

$$f[f(x)] = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = x (x \neq -1)$$

容易看出: $f(x) + 1 \neq f(x+1)$ $f\left(\frac{1}{x}\right) \neq \frac{1}{f(x)}$

例2 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+3 = t$, 则 $x = t-3$

$$f(x+3) = \frac{(t-3)+1}{(t-3)+2} = \frac{t-2}{t-1}$$

即

$$f(t) = \frac{t-2}{t-1}$$

所以

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

例3 求函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \lg(x-1)$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 必须使 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$

解得: $-2 \leq x \leq 2$ 且 $x > 1$

∴ 函数的定义域为 $\{x \mid 1 < x \leq 2\}$. 用区间可表示为 $(1, 2]$

函数有三种表示法:公式表示法、图形表示法、表格表示法. 图形表示法在工程中常用, 例如生产的进度表、仪器的记录等. 它的优点是直观, 一目了然, 它的缺点是不便于分析研究. 表格表示法在设计工作中常用. 它的优点是使用方便, 如对数表、三角函数表, 它的缺点也是不便于分析研究. 公式表示法在理论研究中、推导论证中使用, 它的优点是表达清晰、紧凑, 缺点是抽象, 不易理解.

2. 建立函数关系举例

建立函数关系是高等数学所要研究的课题之一. 在这里我们仅介绍利用简单的几何或物理关系建立函数关系. 在以后的一些章节中还将介绍利用微积分建立函数关系.

例 4 倒圆锥形蓄水器 (图 1.8), 口径与深度都是 10m, 如果以每分钟 6m^3 的速度往容器里注水, 求容器水深与时间的函数关系.

解 设 t 分钟时容器内水深为 h , 水面半径为 r . 由几何关系, t 时刻容器内水的体积 V 为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

已知 t 时刻注入水为 $6t$, 又圆锥口径与深度相等, 故 $r = \frac{h}{2}$,

于是有

$$6t = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$

即

$$h = \sqrt[3]{\frac{72t}{\pi}}$$

此为水深 h 与时间 t 的函数关系.

设容器注满水所需时间为 T

则
$$6T = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{10}{2}\right)^2 10$$

所以
$$T = \frac{125}{9}\pi$$

故所求函数的定义域为

$$0 \leq t \leq \frac{125}{9}\pi$$

例 5 如图 1.9 所示的图形, 在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN , 试将 MN 左边阴影部分的

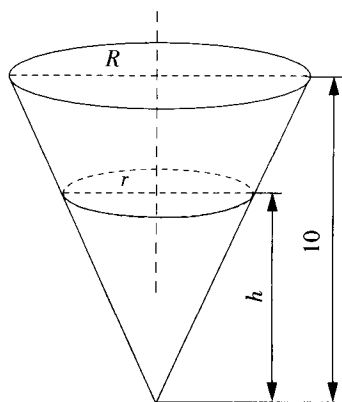


图 1.8

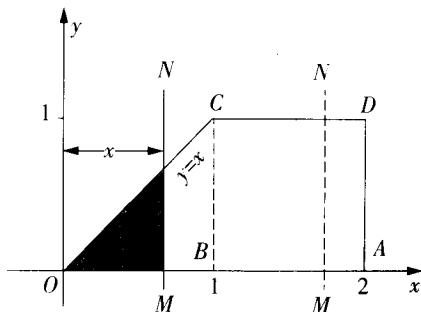


图 1.9

面积 S 表示为 x 的函数.

解 当直线 MN 位于区间 $[0,1]$ 时, 即 $x \in [0,1]$ 时

$$S = \frac{1}{2}x^2$$

当直线 MN 位于区间 $[1,2]$ 内时, 即 $x \in [1,2]$ 时

$$\begin{aligned} S &= \triangle OBC \text{ 面积} + \text{矩形 } BCNM \text{ 的面积} \\ &= \frac{1}{2} + (x-1) = x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以面积 S 为

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{当 } x \in [0,1] \text{ 时} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{当 } x \in (1,2] \text{ 时} \end{cases}$$

这是在定义域内不同区间上用不同式子表示的一个函数, 这种形式的函数, 称为**分段函数**. 要注意它是用两个式子表示的函数, 而不是两个函数.

3. 反函数

设函数 y 定义在数集 A 上, 其值域为数集 M . 如果对于数集 M 中每一个数 y , 数集 A 中都有唯一的一个数 x , 使 $f(x) = y$. 记由 y 对应于 x 的规则为 f^{-1} , 则称 f^{-1} 为 f 的**反函数**, 记为 $x = f^{-1}(y)$, 习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示. 因此, $y = f(x)$ 的反函数常记为 $y = f^{-1}(x)$, 称 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数, 其图形关于直线 $y = x$ 对称.

求反函数的步骤一般是: 先从 $y = f(x)$ 中解出 x , 得 $x = f^{-1}(y)$, 再将 x, y 分别换为 y, x . 即 $y = f^{-1}(x)$ 就是 $y = f(x)$ 的反函数.

例 6 求 $y = 2x - 5$ 的反函数.

解 解出 x , 得

$$x = \frac{1}{2}(y + 5)$$

将 x, y 分别换为 y, x , 得

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

所以, $y = 2x - 5$ 的反函数为 $y = \frac{1}{2}(x + 5)$.

还有许多反函数的例子. 如 $y = \log_a x$ 与 $y = a^x$ 互为反函数; $y = \arcsin x$ 和 $y = \sin x$ 互为反函数, 等等.

习题 1.1

1. 设 $A = \{x \mid x \geq 0\}$, $B = \{x \mid x < 3\}$. 求 $A \cap B, A \cup B, A - B$.

2. 用区间表示下列范围.

$$(1) |x - 2| < \delta \quad (2) U(2, \frac{1}{3}) \quad (3) \dot{U}(1, \frac{1}{2})$$

3. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2} \quad (2) y = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x - 1}$$

$$(3) y = \ln(1 - x) + \sqrt{x + 2} \quad (4) y = \sqrt{16 - x^2} + \lg \sin x$$

$$(5) y = \frac{1}{\sqrt{6 - x}} + \arcsin \frac{x - 6}{5}$$

4. $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否相同, 为什么?

$$(1) f(x) = x \text{ 与 } \varphi(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(2) f(x) = \lg(x^2) \text{ 与 } \varphi(x) = 2\lg x$$

5. 将半径为 R , 中心角为 α 的扇形做成一个无底的圆锥体, 试将圆锥体体积 V 表示为 α 的函数.

6. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

求 $\varphi(3), \varphi(2), \varphi(0), \varphi(0.5)$ 及 $\varphi(-0.5)$.

$$7. \text{ 设 } f(x) = \frac{x+1}{x+5}, \text{ 求 } f(1), f(3), f\left(\frac{1}{x}\right), f\left(\frac{x+1}{x+5}\right).$$

$$8. \text{ 设 } f(x+1) = x^2 + x. \text{ 求 } f(x), f(x-1).$$

9. 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 $f(e^x)$ 和 $f(\ln x)$ 的定义域区间.

10. 已知一物体与地平面的磨擦系数是 μ , 质量是 m . 设有一水平方向成 α 角的拉力 F , 使物体从静止开始移动(图 1.10), 求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

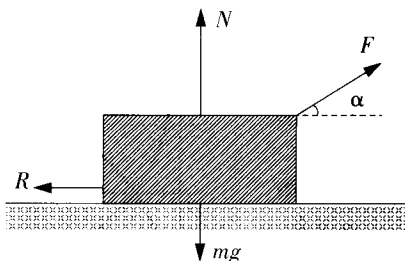


图 1.10

§ 1.2 初等函数与函数的几个特性

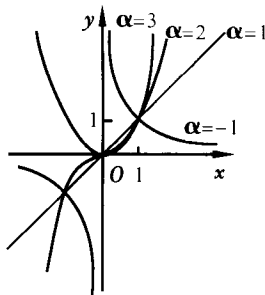
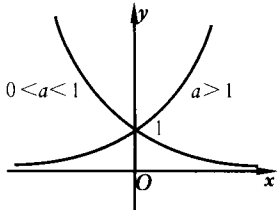
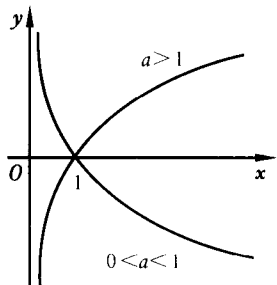
一、初等函数

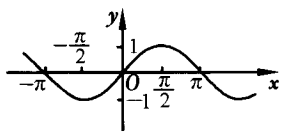
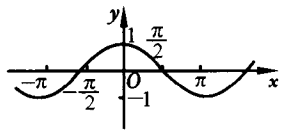
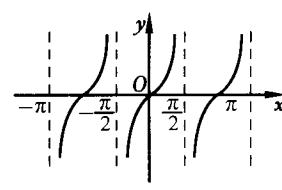
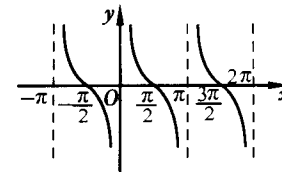
1. 基本初等函数及其图形

幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为任何实数); 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$); 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$); 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ 以及反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 等五类函数统称为基本初等函数。

下面我们把基本初等函数的图形列出来, 以便查用。

基本初等函数的图形及其主要性质

函 数	图 形	定义域	值 域	主要性质
幂函数 $y = x^\alpha$ (α 是常数)		随 α 不同而不同, 但不论 α 取什么值, x^α 在 $(0, +\infty)$ 内总有定义	随 α 不同而不同	若 $\alpha > 0, x^\alpha$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加. 若 $\alpha < 0, x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少.
指数函数 $y = a^x$ (a 是常数, $a > 0$, $a \neq 1$)		$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$a^0 = 1$. 若 $a > 1, a^x$ 单调增加; 若 $0 < a < 1, a^x$ 单调减少. 直线 $y = 0$ 为函数图形的水平渐近线.
对数函数 $y = \log_a x$ (a 是常数, $a > 0$, $a \neq 1$)		$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\log_a 1 = 0$. 若 $a > 1, \log_a x$ 单调增加; 若 $0 < a < 1, \log_a x$ 单调减少. 直线 $x = 0$ 为函数图形的垂直渐近线.

函 数	图 形	定义域	值 域	主要性质
正弦函数 $y = \sin x$		$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	以 2π 为周期的周期函数. 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加. 奇函数.
余弦函数 $y = \cos x$		$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	以 2π 为周期的周期函数. 在 $[0, \pi]$ 上单调减少. 偶函数.
正切函数 $y = \tan x$		$(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	$(-\infty, +\infty)$	以 π 为周期的周期函数. 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加. 奇函数. 直线 $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ 为函数图形的垂直渐近线 ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
余切函数 $y = \cot x$		$n\pi < x < (n+1)\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	$(-\infty, +\infty)$	以 π 为周期的周期函数. 在 $(0, \pi)$ 内单调减少. 直线 $x = n\pi$ 为函数图形的垂直渐近线 ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).