北大绿卡

BEIJING UNIVERSITY
PermanentResidentCard

人教版

新课标教材课时同步讲练

高中数学A版必修④

【主编】王瑞兰 孙春彬

NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
东北师范大学出版社

北大绿卡

BEIJING UNIVERSITY Famous card

人教版

新课标教材课时同步讲练

高中数学A版必修④

[主编]王瑞兰 孙春彬

NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

东北师范大学出版社 长春

□总 策 划：教育分社
□责任编辑：杜立新 杨 阳
□封面设计：宋 超
□责任校对：雁 涵 李 明
□责任印制：栾喜湖

□主 编：王瑞兰 孙春彬
□副 主 编：孟庆高 郑雪梅
□编 者：李文娟 张 凤 杨运财 王瑞兰 孙春彬
张玉环 殷存印 李书安 孟庆高 郑雪梅

图书在版编目（CIP）数据

北大绿卡．人教A版．高中数学必修④/王瑞兰，孙春彬主编．—长春：东北师范大学出版社，2007.10
ISBN 978-7-5602-4849-3

Ⅰ．北… Ⅱ．①王…②孙… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第070136号

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街5268号（130024）
电话：0431—85695744 85688470
传真：0431—85695744 85695734
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春新华印刷厂印装
长春市吉林大路535号（130031）
2007年10月第1版 2007年10月第1次印刷
幅面尺寸：210 mm×296 mm 印张：9.25 字数：200千

定价：14.00元

出版说明

《北大绿卡》是东北师范大学出版社全心打造、倾情奉献给莘莘学子的系列教辅读物。该书具有以下特点：

第一，覆盖面全。该丛书以人教社新课标教材为蓝本，配备了从小学到初、高中各科、各年级系列教辅，同时还涵盖了北师大版、华东师大版、沪科版、沪教版、苏教版、沪粤版、浙教版、冀教版等版本。

第二，体例新。该丛书从理顺本章或本节知识切入，在自主学习的基础上采取讲例、讲练对照，以练为主，双栏对照排版，双色印刷的形式，突出重点，使体例清新明了。同时根据各学科的特点，分别设计了不同的编写体例，这样更能突出本书的实用性。

第三，夯实基础。正确并全面地掌握教材中的基本概念。基本理论是学习的根本，任何成绩的取得都源于对教材基础知识的点滴积累及深入体会，基础知识是形成能力的前提，因此，本书特别注重对基础知识的讲解和练习。有专家说：分析问题和解决问题的能力是练出来的，只有运用所学的知识去解决问题，才能不断提高自己的能力。本丛书正体现了这一宗旨。

第四，对教材的讲解精。本书对教材知识点的讲解真正体现了围绕重点，突破难点，精讲精析，使学生透彻地理解并掌握教材，能以不变应万变，举一反三，触类旁通。

第五，注重能力培养。该丛书注重考纲、考点的提炼总结，注重对考试题型的变化和掌握，注重例题和习题的典型性和迁移性，避免随意性和孤立性。体现从基础到提高，由课内到课外，由综合创新再到中考和高考，实现从知识到能力的飞跃，使学生获得可持续发展的能力。

北大绿卡 BEIJING UNIVERSITY PermanentResidentCard

用东师绿卡 考北大清华


第1章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

要点透析

针对训练

三角函数习题课

典例透析

变式训练

A组

梳理知识，脉络清晰，重点突出，是你预习课本的好帮手。

整理知识，总结规律，点拨方法，围绕重点，突出难点，助学助教。

知识与问题相融，即学，即讲，即练，夯实基础，及时巩固解题方法。

题型全面，新颖，难度适中，题量合理，兼顾基础与综合，有助于透彻理解和掌握知识。

依据教学实际灵活设置，体现知识间的联系，总结并提炼规律、方法、技巧，注重能力培养。

深入剖析近年高考真题，把握命题走向。

针对讲解精心选题，突出综合，提高综合应用能力。

极限链接，体验近年高考真题，即时自我评价，全面提升应试能力。

目　录 CONTENTS

第1章 三角函数

一、教材分析

三角函数是中学数学的重要内容之一，它的基础主要是几何中的相似形和圆，研究方法主要是代数变形和图像分析，因此，三角函数的研究已经初步把几何与代数联系起来了. 本章所介绍的知识，既是解决生产实际问题的工具，又是学习中学后继内容和高等数学的基础.

本章主要内容是任意角的概念、弧度制、任意角的三角函数、同角三角函数间的关系、诱导公式，以及三角函数的图像和性质.

教科书首先推广了角的概念，介绍了弧度制，接着把三角函数的概念由锐角直接推广到任意角（都用坐标定义），然后导出同角三角函数的两个基本关系及正弦、余弦的诱导公式. 在"三角函数的图像和性质"中，教科书先利用正弦线画出函数 $x\in[0,2\pi]$ 的图像，并根据"终边相同的角有相同的三角函数值"，把这一图像向左、右平行移动，得到正弦曲线；在此基础上，利用诱导公式，把正弦曲线向左平行移动 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到余弦曲线. 接着根据这两种曲线的形状和特点，研究了正弦、余弦函数的性质，然后又研究了正弦函数的简图的画法，简要地介绍了利用正切线画出正切函数的图像以及正切函数的性质，最后讲述了三角函数值的简单应用.

本章的教学要求：使学生理解任意角的概念、弧度的意义；能正确地进行弧度与角度的换算；使学生掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义；掌握同角三角函数的基本关系式；掌握正弦、余弦的诱导公式；使学生会用单位圆中的三角函数线画出正弦函数、余弦函数、正切函数的图像，并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图像；理解周期函数与最小正周期的意义，并通过它们的图像理解正弦函数、余弦函数、正切函数的性质；会用"五点法"画正弦函数、余弦函数和正切函数的简图，理解 A,φ 的物理意义；会运用三角函数解决简单的问题.

本章内容的重点是任意角三角函数的概念，同角三角函数间的关系式、诱导公式及其运用，正弦曲线的画法和正弦函数的性质. 难点是弧度制的概念，周期函数的概念，函数的图像与正弦曲线的关系. 关键是使学生熟练掌握任意角三角函数的定义.

二、学法建议

理解弧度制表示角的优点在于把角的集合与实数集一一对应起来，也就是可把三角函数看成以实数为自变量的函数；要区别正角、负角、零角、锐角、钝角、区间角、象限角、终边相同角的概念；在应用诱导公式进行三角函数式的化简、求值时，应注意公式中符号的选取. 单位圆中的三角函数线，是三角函数的一种几何表示，用三角函数线的数值来代替三角函数值，比由三角函数定义所规定的比值得出三角函数值要优越得多，因此，三角函数图像是讨论三角函数性质的一个强有力的工具.

要善于将三角函数式尽可能化为只含一个三角函数的"标准式"，进而可求得某些复合三角函数的最值、最小正周期、单调性等. 对函数式作恒等变形时，须特别注意保持定义域的不变性. 函数的单调性是在给定的区间上考虑的，只有属于同一单调区间的同一函数的两个函数值才能由它的单调性来比较大小. 对于具有周期性的函数，在作图时只要先作它在一个周期中的图像，然后利用周期性就可作出整个函数的图像.

本章所使用的符号及其用法全部与国家标准所规定的取得一致，在书中逐渐达到规范化. 物理教科书也是这样做的，因此在作业中，对于本章中的几道与物理有关的习题，解答时使用的符号及其用法应与教科书上的尽量相同，以免与物理教师讲课时的要求发生矛盾，弄得学生无所适从.

在理解概念的基础上，要认真阅读课本例题，加深理解. 对公式要整理，使之条理化，便于记忆（最好做成表格）.

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任 意 角

基干知识梳理

1. 角可以看成平面内________绕着________从一个________旋转到另一个________所成的________.

2. 按________方向旋转形成的角叫做正角.

按________方向旋转形成的角叫做负角.

如果一条射线没有作任何旋转，则称它形成了一个________.

3. 任意角包括________、________和________.

4. 在直角坐标系内讨论角，应做到角的顶点与________重合，角的始边与____________重合，此时角的终边在第几象限，就说这个角是____________.

5. 所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=$______________，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成______________.

重点难点讲练

要点透析

一 象限角

当角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合时，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角.

例 1 给出下列四个命题：(1) -75° 是第四象限角；(2) 475° 是第二象限角；(3) 225° 是第三象限角；(4) -315° 是第一象限角. 其中正确的有(　　).

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

解：通过作出这些角的终边，可知命题(1)(2)(3)(4)均为真命题，故应选择 D.

针对训练

1. 已知集合 $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于90°的角$\}$，下列命题：①$A=B=C$，②$A\subset C$，③$C\subset A$，④$A\cap C=B$. 其中正确的命题的个数为(　　).

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

点评：分别作出这些角的终边，即知这些角为第几象限角，进而可以对各个命题的真假进行判断.

二 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

例 2 在 0° 到 360° 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $2\,903^\circ15'$；(2) $-845^\circ10'$.

解：(1)终边与 $2\,903^\circ15'$ 相同的角的集合为

$S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+2\,903^\circ15',k\in\mathbf{Z}\}$，

2. 与 -463° 终边相同的角可表示成(　　).

A. $k\cdot360^\circ+463^\circ(k\in\mathbf{Z})$

B. $k\cdot360^\circ+103^\circ(k\in\mathbf{Z})$

C. $k\cdot360^\circ+257^\circ(k\in\mathbf{Z})$

D. $k\cdot360^\circ-257^\circ(k\in\mathbf{Z})$

当 $k=-8$ 时，$\beta=23°15'$.

故在 $0°$ 到 $360°$ 之间，终边与 $2\ 903°15'$ 相同的角是 $23°15'$，它是第一象限角.

(2)终边与 $-845°10'$ 相同的角的集合是

$S=\{\beta|\beta=k\cdot 360°-845°10', k\in \mathbf{Z}\}$，

当 $k=3$ 时，$\beta=234°50'$.

故在 $0°$ 时到 $360°$ 之间，终边与 $-845°10'$ 相同的角为 $234°50'$，它是第三象限角.

点评：任何一个正角(或负角)都可以看成由 $0°\sim360°$ 间的某个角通过逆时针(或顺时针)方向旋转整数圈而得到的.

三 终边相同角的集合表示

例3 若 α 在第一象限，则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第几象限?

解：解法一：设 $\alpha=k\cdot 360°+\beta(0°<\beta<90°, k\in \mathbf{Z})$，

则 $\frac{\alpha}{2}=k\cdot 180°+\frac{\beta}{2}$.

当 $k=2n(n\in \mathbf{Z})$ 时，$\frac{\alpha}{2}=n\cdot 360°+\frac{\beta}{2}$，

由于 $0°<\frac{\beta}{2}<45°$，知 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限内.

当 $k=2n+1(n\in \mathbf{Z})$ 时，$\frac{\alpha}{2}=n\cdot 360°+180°+\frac{\beta}{2}$.

$\because 180°<180°+\frac{\beta}{2}<225°$，知 $180°+\frac{\beta}{2}$ 在第三象限.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 在第三象限.

综上知 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一、三象限.

解法二：设 $k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°(k\in \mathbf{Z})$.

则 $k\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+45°$，分 $k=2n, k=2n+1(n\in \mathbf{Z})$，依照解法一可得答案.

3. (1)若 α 为第二象限角，则 $-\alpha$ 为第几象限角?

(2)若 α 为第一象限角，则 2α 为第几象限角?

点评：(1)解法中讨论 k 的奇偶性的目的是凑出 $360°$ 的整数倍，利用终边相同的角的集合公式.

(2)类似本题解法知，当 α 在第二象限时，$\frac{\alpha}{2}$ 在第一、三象限；当 α 在三、四象限时，$\frac{\alpha}{2}$ 在二、四象限，并符合如图1-1-1之规律.

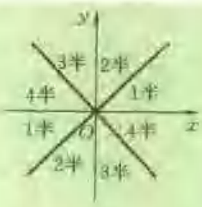


图1-1-1

四 用图形表示角的集合

例4 已知集合 $A=\{\alpha|30°+k\cdot 180°<\alpha<90°+k\cdot 180°, k\in \mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\alpha|-45°+k\cdot 360°<\alpha<45°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$.

解：如图1-1-2，集合 A 中的角的终边在阴影(Ⅰ)内，集合 B 中的角的终边在阴影(Ⅱ)内，因此集合 $A\cap B$ 的角的终边在阴影(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共部分内，所以 $A\cap B=\{\alpha|30°+k\cdot 360°<\alpha<45°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$.

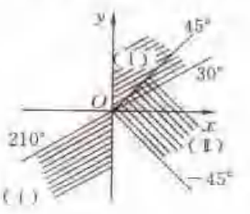


图1-1-2

4. 已知 $A=\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<150°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|-90°+k\cdot 360°<\alpha<45°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

点评：数形结合是解数学题的基本思想方法.

课时同步练习

巩固提高

1. 与 600° 终边相同的角表示为($k\in \mathbf{Z}$)(　　).

   A. $k\cdot 360^\circ+220^\circ$　　B. $k\cdot 360^\circ+240^\circ$

   C. $k\cdot 360^\circ+60^\circ$　　D. $k\cdot 360^\circ+260^\circ$

2. 若 α 是第一象限角，则下列各角中属于第四象限角的是(　　).

   A. $90^\circ-\alpha$　　B. $90^\circ+\alpha$

   C. $360^\circ-\alpha$　　D. $180^\circ+\alpha$

3. 若将时钟拨慢 5 min，则时针转了________°，分针转了________.

4. 终边落在 x 轴负半轴的角 α 的集合为________________，终边在直线 $y=-x$ 上的角 β 的集合为________________.

5. 求与 $-1\,692^\circ$ 终边相同的最大负角.

6. 已知角 α 终边与 -50° 角终边互相垂直，求角 α 的集合 M.

探究创新

7. 下列四个命题中，正确的是(　　).

   A. 若 α 是第一象限角，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 一定是第一象限角

   B. 若式子 $k\cdot 360^\circ+\alpha(k\in \mathbf{Z})$ 表示所有与 α 终边相同的角(包括 α 角在内)，那么 α 是锐角

   C. 终边相同的角不一定相等

   D. 角 α 和角 2α 的终边不可能相同

8. 已知集合 $M=\{\theta|\theta=k\cdot 45^\circ,k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{\alpha|\alpha=k\cdot 90^\circ\pm 45^\circ,k\in \mathbf{Z}\}$，那么集合 M 和 N 的关系为(　　).

   A. $M\supsetneqq N$　　B. $M=N$

   C. $M\subsetneqq N$　　D. 不确定

9. 若 4α 与 40° 角终边相同，则适合不等式 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 360^\circ$ 的角的集合为________________.

10. 若角 α 的终边落在 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x\geqslant 0)$ 与 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x(x\leqslant 0)$ 所夹的大区域内，求角 α 的集合.

1.1.2 弧　度　制

基本知识梳理

1. 角可以用度为单位进行度量，1 度的角等于周角的________. 这种用度作为单位来度量角的单位制叫做________.

2. 把长度等于________的弧所对的________叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读做弧度. 这种用弧度作为单位来度量角的单位制叫做________.

3. 正角的弧度数是一个________，负角的弧度数是一个________，零角的弧度数是________. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，那么，角 α 的弧度数的绝对值是________. 这里，α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

4. 用角度制度量周角，其度数为 360°，用弧度制度量周角，其弧度数为 2π，因此________. 进而 $1^\circ=$________$\approx$________；$1=$________$\approx$________$=$________.

5. 角的概念推广后，在弧度制下，角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立起________的关系，每一个角都有唯一的________(即这个角的________)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个________(即弧度数等于这个实数的________)与它对应.

6. 弧度制下扇形的弧长公式为________，面积公式为________或________.

重点难点讲练

➡要点透析⬅

一 角度制与弧度制的互换

用度为单位度量角的制度叫做角度制，用弧度为单位度量角的制度叫做弧度制. 角度制与弧度制之间的换算关系为 $360^\circ=2\pi$，$1^\circ=\frac{\pi}{180}$，$1=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

例 1 (1)将 $99^\circ30'$ 化为弧度；(2)将 $-\frac{7\pi}{18}$ 化为度.

解：(1) $\because 1^\circ=\frac{\pi}{180}$，

$\therefore 99^\circ30'=99.5^\circ=99.5\times\frac{\pi}{180}=\frac{199}{360}\pi$.

(2) $\because 1=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$，$\therefore -\frac{7\pi}{18}=-\left(\frac{7\pi}{18}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-70^\circ$.

➡针对训练⬅

1. 将 $1\ 690^\circ$ 化为弧度.

点评：角度与弧度的换算应熟练掌握，见下表：

角度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

角度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

二 用弧度制表示终边相同的角

用弧度制表示终边相同的角 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 时，$2k\pi$ 是 π 的偶数倍，同时要求 α 的单位为弧度制.

例 2 把下列各角化成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant2\pi, k\in\mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是第几象限角.

(1) $-1\ 500^\circ$；(2) $1\ 999\pi$；(3) -4.

解：(1) $-1\ 500^\circ=-1\ 500^\circ\times\frac{\pi}{180^\circ}=-\frac{25}{3}\pi=-10\pi+\frac{5\pi}{3}$，$\therefore -1\ 500^\circ$ 为第四象限角.

(2) $1\ 999\pi=2\times999\pi+\pi=999\times2\pi+\pi$，

$\therefore 1\ 999\pi$ 不属于任何象限.

(3) $-4=-2\pi+(2\pi-4)$，$\therefore -4$ 为第二象限角.

2. 把 $-1\ 485^\circ$ 化成 $\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha\leqslant2\pi, k\in\mathbf{Z})$ 的形式是(　　).

A. $\frac{\pi}{4}-4\pi$　　B. $-\frac{7}{4}\pi-8\pi$

C. $-\frac{\pi}{4}-10\pi$　　D. $\frac{7}{4}\pi-10\pi$

点评：先由度与弧度的换算关系化为弧度，再化为所需形式.

三 弧度制中的弧长和扇形面积

在弧度制中，弧长公式为 $l=|\alpha|\cdot r$，扇形面积公式为 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$，要注意圆心角的单位是弧度.

例 3 已知扇形的周长为 6 cm，面积为 2 cm^2，求扇形中心角的弧度数.

解：设扇形的中心角为 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$，弧长为 l，半径为 r，则有 $\begin{cases} l+2r=6, & ① \\ \frac{1}{2}lr=2. & ② \end{cases}$

由①得 $l=6-2r$，代入②得 $r^2-3r+2=0$，

$\therefore r=1$ 或 $r=2$.

当 $r=1$ 时，$l=4$，$\alpha=\frac{l}{r}=4$；

当 $r=2$ 时，$l=2$，$\alpha=\frac{l}{r}=1$.

3. 一扇形 $\overset{\frown}{AOB}$ 的面积是 1 cm^2，它的周长为 4 cm，求圆心角 $\angle AOB$ 的弧度数和弦长 AB.

点评：设出中心角、弧长、半径，列出方程给予解答. 列方程解答数学问题是基本思想方法，对于解决不便直接使用公式的问题十分方便.

例 4 若弧度为 2 的圆心角所对的弦长为 2,则这个圆心角所夹扇形的面积是( ).

A. cot 1 B. $\frac{1}{\sin 1}$ C. $\frac{1}{\sin^2 1}$ D. $\frac{1}{\cos 1}$

解:如图 1-1-3 所示,过 O 点作 $OC\perp AB$ 于 C,并延长 OC 交 AB 于 D,则 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}=1$ rad 且 $AC=\frac{1}{2}AB=1$.

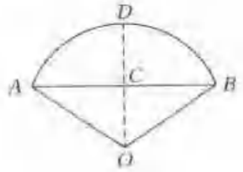


图 1-1-3

在 Rt$\triangle AOC$ 中,$OA=\frac{AC}{\sin\angle AOC}=\frac{1}{\sin 1}$,

$\therefore S_{扇形}=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot OA^2=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{\sin^2 1}=\frac{1}{\sin^2 1}$.

$\therefore$选 C.

4. 一条弦的长度等于半径 r.

(1)求这条弦所对的劣弧长;

(2)求这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

点评:注意 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 中 l 是弧长而不是弦长.

课时同步练习

巩固提高

1. 下列命题中,假命题是( ).

A. "度"与"弧度"是度量角的两种不同的度量单位

B. 1 度的角是周角的 $\frac{1}{360}$,1 弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$

C. 根据弧度的定义,180°一定等于 π 弧度

D. 不论用角度制还是用弧度制度量角,它们与圆的半径长度有关

2. 在半径为 10 的圆中,$\frac{4\pi}{3}$的圆心角所对弧长为( ).

A. $\frac{40}{3}\pi$ B. $\frac{20}{3}\pi$ C. $\frac{200}{3}\pi$ D. $\frac{400}{3}\pi$

3. 下列各角中终边相同的角是( ).

A. $\frac{\pi}{2}$和$-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ B. $-\frac{\pi}{3}$和$\frac{22}{3}\pi$

C. $-\frac{7}{9}\pi$和$\frac{11}{9}\pi$ D. $\frac{20}{3}\pi$和$\frac{122}{9}\pi$

4. 圆的半径变为原来的 3 倍,而所对弧长不变,则该弧所对圆心角是原来圆弧所对圆心角的________倍.

5. 已知 $\theta\in\{\alpha\mid\alpha=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,判断 θ 所在象限.

6. 已知扇形的周长为 30 cm,当它的半径和圆心角各取什么值时,才能使扇形的面积最大?最大面积是多少?

探究创新

7. 若 α 是第四象限角,则 $\pi-\alpha$ 一定在( ).

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

8. 若三角形三内角之比为 3∶4∶5,则三内角的弧度数分别是________.

9. 已知集合 $A=\{\alpha\mid 2k\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{\alpha\mid -4\leqslant\alpha\leqslant 4\}$,求 $A\cap B$.

10. 角 α 小于 π 而大于 $-\pi$,它的 7 倍角的终边又与自身终边重合,求角 α.

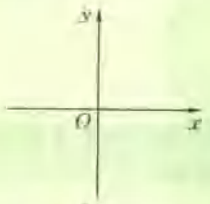
1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

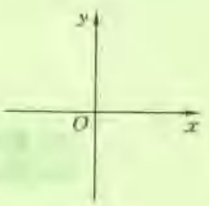
主干知识梳理

1 在平面直角坐标系中，设 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，它与原点的距离是 $r(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$，规定：(1)比值______叫做 α 的正弦，记做 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=$______；(2)比值______叫做 α 的余弦，记做 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=$______；(3)比值______叫做 α 的正切，记做 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=$______.

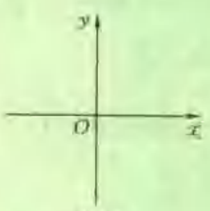
2 正弦、余弦、正切函数的值在各象限的符号为



$\sin\alpha$

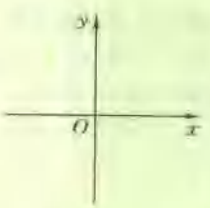


$\cos\alpha$



$\tan\alpha$

合并到一个直角坐标系内为



3 规定了方向(即规定了______和______)的线段称为______.规定了正方向的直线称为______.根据有向线段 AB 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度添上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的______，记做______.

4 圆心在______，半径等于______的圆，叫做单位圆.

5 如图 1－2－1，______、______分别叫做角 α 的正弦线、余弦线.

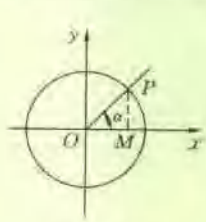


图 1－2－1

图 1－2－2

6 如图 1－2－2，______叫做 α 的正切线.

7 当角 α 的终边在 x 轴上时，正弦线、正切线分别变成______；当角 α 的终边在 y 轴上时，余弦线变成______，正切线______.

8 正弦函数、余弦函数、正切函数的定义域分别为______，______，______.

9 正弦函数、余弦函数、正切函数的值域分别为______，______，______.

重点难点讲练

➡要点透析⬅

一 坐标系中的三角函数

坐标系中任意角的三角函数的定义，是通过直角坐标系中角的终边上某一点的坐标，确定该角三角函数的值。根据定义可知，一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关。

例1 已知角 α 的终边上一点 $P(-15a,8a)$（$a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$），求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值。

解：$\because x=-15a,y=8a$，$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=17|a|(a\neq 0)$。

(1)若 $a>0$，则 $r=17a$，于是 $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$，

$\cos\alpha=-\dfrac{15}{17}$，$\tan\alpha=-\dfrac{8}{15}$。

(2)若 $a<0$，则 $r=-17a$，于是 $\sin\alpha=-\dfrac{8}{17}$，

$\cos\alpha=\dfrac{15}{17}$，$\tan\alpha=-\dfrac{8}{15}$。

➡针对训练⬅

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(3a,-4a)(a\neq 0)$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值。

点评：在三角函数的定义中，$r>0$，此题求出的 r 为字母，所以应加以讨论。

二 判断三角函数的符号

例2 判定下列各式的符号：

(1) $\sin 105°\cdot\cos 230°$；(2) $\tan 191°-\cos 191°$。

解：(1) $\because \sin 105°>0,\cos 230°<0$，

$\therefore \sin 105°\cdot\cos 230°<0$。

(2) $\because \tan 191°>0,\cos 191°<0$，

$\therefore \tan 191°-\cos 191°>0$。

2. 下列各三角函数值中，负值的个数是（　　）。

①$\sin(-660°)$；②$\tan 160°$；③$\cos(-740°)$；
④$\sin(-420°)\cdot\cos 570°$。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

点评：由角所在象限分别判断两个三角函数值的符号，再进一步确定各式的符号。

三 终边相同角三角函数的转换

终边相同的角的同一三角函数的值相等，利用这一关系（公式一），可以把求任意角的三角函数值，转化为求0°到360°角（或0到2π角）的三角函数值。

例3 求下列各式的值：

(1) $2\sin^2\dfrac{19}{4}\pi+\tan^2\dfrac{8\pi}{3}\cdot\cot\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right)$；

(2) $\sin(-1\,320°)\cdot\cos 1\,110°+\tan 495°$。

解：(1) $2\sin^2\dfrac{19}{4}\pi+\tan^2\dfrac{8\pi}{3}\cdot\cot\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right)$

$=2\sin^2\left(4\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)+\tan^2\left(2\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)\cdot\cot\left(-2\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=2\sin^2\dfrac{3\pi}{4}+\tan^2\dfrac{2\pi}{3}\cdot\cot\dfrac{\pi}{4}$

$=2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(-\sqrt{3})^2\times 1=4$。

3. 求 $\sin\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)+\cos\dfrac{12}{5}\pi\cdot\tan 4\pi$ 的值。

4. 求 $2\sin 405°-4\cos 390°+\tan 1\,125°-2\cos 1\,485°+2\tan 780°$ 的值。

(2) $\sin(-1\ 320°)\cdot\cos 1\ 110°+\tan 495°$

$=\sin(-4\times 360°+120°)\cdot\cos(3\times 360°+30°)+\tan(360°+135°)=\sin 120°\cos 30°+\tan 135°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\frac{1}{4}$.

点评：虽然可利用计算器求三角函数值，但特殊角的三角函数值还应熟记，以方便应用。

例 4 在$[0,2\pi]$上满足 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是(　　).

A. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$　C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

解：画出单位圆，并根据 $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$ 知 x 的范围为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

答案：B

求满足 $\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 θ 的取值范围.

点评：解三角函数不等式常使用单位圆.

巩固提高

$\sin 2\cos 3\tan 4$ 的值(　　).

A. 小于零　B. 等于零　C. 大于零　D. 不确定

在$[0,2\pi]$内，满足 $\sin x>\cos x$ 的 x 的取值范围为(　　).

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$　D. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

角 α 的终边经过点 $P(0,b)(b\neq 0)$，则 $\sin\alpha$ 等于(　　).

A. 0　B. 1　C. -1　D. ± 1

$5\sin 90°+2\cos 0°-3\sin 270°+10\cos 180°$ 的值为________.

求值：(1) $2\sin 510°+\cos(-600°)+\tan 405°$；

(2) $4\sin\frac{3\pi}{2}-2\cos 0+3\sin 2\pi-\cos\frac{25\pi}{6}$.

已知角 $\theta=-\frac{11}{6}\pi$，P 为角 θ 终边上一点，$|OP|=2\sqrt{3}$，求 P 点的坐标.

探究创新

已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是(　　).

A. 若 α,β 是第一象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

B. 若 α,β 是第二象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

C. 若 α,β 是第三象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

D. 若 α,β 是第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

利用正弦线比较 $\sin 1$，$\sin 1.2$，$\sin 1.5$ 的大小关系是(　　).

A. $\sin 1>\sin 1.2>\sin 1.5$

B. $\sin 1>\sin 1.5>\sin 1.2$

C. $\sin 1.5>\sin 1.2>\sin 1$

D. $\sin 1.2>\sin 1>\sin 1.5$

角 α 的终边上一点 $P(4t,-3t)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值(其中 $t\neq 0$).

利用单位圆解不等式组 $\begin{cases}2\sin x-\sqrt{2}>0,\\2\cos x\leqslant 1.\end{cases}$

1.2.2 同角三角函数的基本关系

主干知识梳理

1. 同角三角函数之间的基本关系为________，________，________.

2. ∵$\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$，

∴$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=$________，$\cos^2\alpha=$________.（用$\tan\alpha$表示）

3. $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$且α为第二象限角，则$\cos\alpha=$________，$\tan\alpha=$________.

重点难点讲练

➡要点透析⬅

一 利用平方关系，求一个角的第一函数值

例1 已知$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，求α的其他三角函数值.

解：∵$\cos\alpha<0$，

∴角α在二、三象限（不可能在x轴负半轴上）.

(1)若α在第二象限，则$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$，

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}$，$\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}=-\dfrac{4}{3}$，$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}=-\dfrac{5}{4}$，$\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{5}{3}$.

(2)若α在第三象限，则$\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4}$，$\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{4}{3}$，$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}=-\dfrac{5}{4}$，$\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}=-\dfrac{5}{3}$.

➡针对训练⬅

1. 已知$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{m}$$(m\geqslant1)$，求$\tan\alpha$的值.

点评：在解此类问题时，要注意：

(1)尽可能地确定α所在的象限，以便确定三角函数值的符号.

(2)尽可能地避免使用平方关系（在一般情况下只能使用一次）.

(3)必要时进行讨论.

二 化简求值

例2 已知$\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

(1)$\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$；(2)$\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$.

解：(1)∵$\tan\alpha=2$，∴$\cos\alpha\neq0$，将式子的分子、分母同除以$\cos\alpha$，得

$\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha-1}{2\tan\alpha+3}=\dfrac{3\times2-1}{2\times2+3}=\dfrac{5}{7}$.

(2)$\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{1}=\dfrac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha-2}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2^2-2}{2^2+1}=\dfrac{2}{5}$.

2. 已知$\tan\alpha=3$，求$\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1$的值.

点评：(1)(2)均为$\sin\alpha$，$\cos\alpha$的齐次式，因此可以变形为$\tan\alpha$的表达式，进而代入求值.

三 三角函数式的化简

三角函数式化简的结果应满足下述要求：
(1)函数种类尽可能少；(2)次数尽可能低；
(3)项数尽可能最少；(4)尽可能地不含分母；
(5)尽可能地将根号中的因式移到根号外.

例3 化简：(1)$\sin^2\alpha\cdot\tan\alpha+\cos^2\alpha\cdot\cot\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$；

(2)$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\left(\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

解：(1)原式$=\sin^2\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$.

(2)原式$=\sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}+\sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}=\dfrac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{|\sin\theta|}$
$=-2\csc\theta$.

3. 化简：$\dfrac{1-\sin^6\theta-\cos^6\theta}{1-\sin^4\theta-\cos^4\theta}$.

点评：将正切、余切化为正弦、余弦再化简，仍然是遵循减少函数种类的思路进行的. 而对带有根号式子的化简，则考虑将被开方式配成完全平方式，从而脱去根号，进而化简.

四 证明三角函数等式

证明等式成立的基本途径一般有三条：
(1)变化等式的一边，直至与另一边相同；
(2)变化等式的两边，使都等于第三式；
(3)证明一个与原等式等价的新的等式成立.

例4 求证：$\dfrac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$.

证明：证法一：右边$=\dfrac{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha-\tan^2\alpha\cos^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\sin\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\sin\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\sin\alpha}$

$=\dfrac{\tan\alpha\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=$左边.

∴原等式成立.

证法二：左边$=\dfrac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\tan\alpha-\tan\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$；

右边$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha\cos\alpha}{\tan\alpha\sin\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

∴左边=右边，原等式成立.

证法三：∵$\tan\alpha-\sin\alpha\neq0$，$\tan\alpha\cdot\sin\alpha\neq0$，

∴要证原等式成立，只要证 $\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$ 成立. 而 $\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\tan^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=\tan^2\alpha-(\tan\alpha\cos\alpha)^2=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$，即 $\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$ 成立.

∴原等式成立.

4. 求证：$\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

点评：证明三角恒等式，常常从左向右证，或从右向左证，或从两边证，或证变形式(如 $a=b\Leftrightarrow a-b=0$). 总的来说，坚持从繁到简的原则. 而在解题时，要全面地理解"繁"与"简"的关系，当题目中涉及多种名称的函数时，常常将切、割化为弦，或将弦化为切，以减少函数的种类.