[北师课标版]

导学诱思
焦点突破
融会贯通

新教材 焦点

JIAO DIAN

高中数学(选修2-1)

安徽教育出版社

[北师课标版]

XIN JIAO CAI JIAO DIAN

新教材焦点

JIAO DIAN

高中数学

（选修2–1）

总策划：安　星

编　者：汪春杰

安徽教育出版社

责任编辑:文　乾

新教材焦点(北师课标版)
高中数学
(选修 2—1)
安徽教育出版社出版发行
(合肥市回龙桥路 1 号)
新华书店经销　　　安徽天歌印刷厂印刷
安徽飞腾彩色制版有限责任公司照排
*
开本 880×1230　1/16　印张 8.25　字数 280 000
2007 年 10 月第 1 版　　　2007 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 5336 - 4657 - 8

定价:15.00 元
发现印装质量问题,影响阅读,请与我社出版科联系调换
电话:(0551)2823297　2846176　邮编:230063

焦点源自关注

关注锤炼精品

精品成就精彩

《焦点》见证你的每一点成长！

安徽教育出版社

焦点工作室祝广大学子：

梦想成真！

内容导读

- 佳点
  - 导学诱思
    - 焦点导入　激发学习兴趣，引发问题和思考
    - 课标聚焦　了解课标要求，明确学习目标
  - 焦点突破
    - 自主预习　倡导自主学习，感知焦点内容
    - 逐点扫描
      - □ 焦点辨析　提炼教材焦点，挖掘焦点内涵
      - □ 焦点例题　紧扣每个焦点，选择经典例题，深入分析、解答
      - □ 变 身 题　触类旁通，举一反三
      - □ 点评（拓展、反思）　引导思维发散，点击思维盲点，提炼思想方法
    - 焦点训练　夯实基础知识，提升应用能力
  - 融会贯通
    - 焦点回眸　归纳总结焦点内容，揭示学习、认识规律
    - 背景链接　链接课外知识，拓展思维空间
    - 高考链接　立足单元焦点，链接高考考点

我学习 ☺ 我快乐

单元验收卷　（便于拆卸）

模块综合验收卷　（便于拆卸）

参考答案与简析　（详解，另册装订）

《焦点》访谈

■ 问：《新教材焦点》书名比较独特，请问其主要含义是什么？

■ **答：**本套书根据新课标要求和新教材特点，对新教材内容逐点扫描：直击重点、剖析难点、补遗盲点、关注热点、演练交点。五点聚焦，是大家关注的焦点，也是本套书的焦点。请看下列图示：

■ 问：请问书名《焦点》除了表示"五点聚焦"的编写理念外，是否还有什么特别的含义？

■ **答：**《新教材焦点》是安徽教育出版社高中教育编辑部着力打造的第一套高中新课标同步教辅用书。高中部于2006年8月份成立，成立以后我们确立了围绕"焦点"二字打造高中品牌教辅的整体发展思路。安徽是教育大省，安徽教育出版社作为省内唯一教育类品牌出版社，一直备受全国市场关注。而随着我省新课标教材全面使用和高考命题权的进一步下放，安教社的高中学生读物也必然会成为广大师生关注的"焦点"。

■ 问：目前，市场上新课标同步类教辅较多，你们认为《焦点》最主要靠什么取胜？

■ **答：**简而言之，一流的质量。编辑室在创意《新教材焦点》过程中，经过了半年多的详细的市场调研和样张征求意见后才确定最后的编写体例，每个学科的样稿都经过了3轮修订。另外，本套书网罗了全国的编写高手和学科专家。在遴选作者的过程中，我们要求首先必须是上过新课标教材的学科带头人；另外必须是写作能力较强的和有创造性思维的。写稿过程中编辑和作者共同讨论，反复推敲，不放过稿件中的每一点瑕疵。很多作者都感叹这次编稿是他们编得最辛苦的一次，也是收获最大的一次。有了这样一个创作团体，《焦点》的质量得到了有力的保证。

■ 问：确实，《焦点》制作精美，整体设计也很有特色。在内容安排上主要遵循怎样的原则？

■ **答：**总原则是依据课标、紧扣教材、充分拓展。具体来说：激发学习兴趣、引导自主学习、强调基础夯实、注重能力提升，这些都是新课标所倡导的，在本套书中都通过具体栏目得以落实。实际上，

《焦点》访谈

新课标的这些理念渗透在本套书的每个栏目、每点讲解，甚至每道试题、每次点评中。另外在栏目顺序安排上也遵循新课标的要求：先兴趣导入，再自主学习，再总结归纳和思维拓展，而且每个栏目内容都充分考虑到其实用性，以方便学生自学和自测。

■ 问：《焦点》立足于同步辅导，却■出了“放■新课标高考”的口号，请问有何重要的意义？

■ 答：宏伟的大厦是一砖一瓦垒砌起来的，优异的高考成绩是平常一点一滴积累起来的。安教社焦点工作室着眼平常知识的积累，放眼未来的新课标高考，融高考的焦点于平常学习之中，在一点一滴的学习中，走近高考，体验高考。2009年新课标高考面临重大改革，安教社作为专业的教育类出版社，帮助学生从容应对新高考责无旁贷。《新教材焦点》将传达最新的高考信息，把握最新高考动向。《焦点》全体工作人员坚信：《焦点》一定会帮助学子成就精彩的人生，见证他们的每一点成长。

■ 问：《新教材焦点》内容特色明显，质量一流，它无疑是高中学生新■标同步学习辅导的首焦用书。请问学生如何使用才能达到最好的效果？

■ 答：《焦点》在编排时充分考虑到学生使用和课堂教学的方便，学生可以在老师指导下按编排顺序使用本书：

先浏览第一板块的“焦点导入”和“课标聚焦”，然后带着问题预习章节内容。第二板块的“自主预习”引导学生认真阅读课本，初步了解将要学习的内容；“逐点扫描”讲练紧密结合，讲解详细、透彻，变身题触类旁通；“焦点训练”梯度分明，分层训练，可以和课堂教学配套使用。第三板块功能是：归纳、总结、拓展、提高，可以在章节的课堂学习结束后使用。“单元验收卷”和“模块综合验收卷”附在本书最后，便于拆卸，学生可以在老师指导下使用，也可以用于自测。答案详解并另册装订。

另外，“我学习，我快乐”为学生在紧张学习之余提供了轻松、愉快的园地。

总之，只要像《焦点》所倡导的那样快乐、自主、自信地学习，就一定会事半功倍，梦想成真！

目录

第一章　常用逻辑用语

导学诱思

焦点导入

我们看看下面一段对话：

小李（身高一米七，十分喜爱篮球运动）：唉，我要是能长得像姚明那样高大就好了，这样，我也就能到美国打 NBA 并作一个有统治力的中锋了.

小王：嘀嘀，除非太阳从西边出来！

（注：姚明，在美国篮球联盟打球的中国籍高大中锋，身高近两米三十）

我们这样来描述小王所说的话的意思：如果太阳从西边出来，你小李就能长得和姚明一样高大；否则，你是不可能长得和姚明一样高大的.

很显然，小王的话我们是赞同的，也就是说，他所说的是真的. 这实际上反映了逻辑中的这样一个原理：在一个错误的前提下，任何结果都是有可能成立的. 比如说：如果 $1>2$，你就能像小鸟一样在天上飞来飞去.

由此可见，在我们的生活中，逻辑学的力量无处不在. 本章将在义务教育阶段的基础上，学习常用的一些逻辑用语，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，并更好地进行交流.

课标聚焦

1. 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题；
2. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系；
3. 通过数学实例，了解逻辑联结词“或、且、非”的含义；
4. 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义；
5. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

焦点突破

§1 命题

自主预习

1. 一般地,我们把语言、符号或式子表达的,可以__________的______________叫作命题;其中______________的语句叫作真命题;______________的语句叫作假命题.

2. 下面的语句能判断真假吗?

①垂直于同一个平面的两个平面互相平行;

②$x>2$;

③4 的平方根是 2;

④两个全等三角形的面积一定相等吗?

逐点扫描

焦点一　命题的概念

1. 一般地,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫作命题. 其中,经判断为真的语句叫作真命题,判断为假的语句叫作假命题.

2. 命题的概念中有两个关键词:可以判断真假、陈述句. 我们判断一个句子是不是命题,正是紧紧扣住这两个关键词进行判断的.

例 1

下列语句中,哪些是命题,哪些不是命题;是真命题还是假命题.

①最小的素数是 2;

②$y=2\cdot 3^x(x\in\mathbf{R})$是指数函数;

③平行于同一平面的两个平面平行吗?

④$x+1>y$;

⑤到两定点距离之和为定长的点的轨迹是椭圆.

【分析】 ①是陈述句,而且 2 确实是最小的素数,所以为真命题;

②是陈述句,但指数函数指的是形如 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$的函数,显然,$y=2\cdot 3^x$ 不符合指数函数的定义,因此是假命题;

③是疑问句,不是陈述句,所以不是命题;

④是陈述句,但无法判断真假,所以不是命题;

⑤是陈述句,但椭圆是指"平面上到两定点距离之和为定长的点的轨迹",所以是假命题.

【解答】 ①②⑤是命题,其中①是真命题,②⑤是假命题;③④不是命题.

【点评】 对"命题"这一重要的数学概念进行判断时,必须抓住本概念中两个不可或缺的特征,即"陈述性语句"和"可以判断真假",只具备其中一个特征的语句或两个特征均不具备的语句,都不是命题.

变身题

1. 下列语句是否是命题? 是真命题还是假命题?

①一个数不是奇数就是偶数;

②若 xy 是有理数,则 $x+y$ 也是有理数;

③对任意实数 a,$y=2a$ 是偶数;

④奇函数的图像一定关于原点对称吗?

焦点二　"若 p,则 q"形式的命题

在本章中,我们只研究"若 p,则 q"形式的命题,其中 p 叫作命题的条件,q 叫作命题的结论.

例 2

指出下列命题中的条件 p 和结论 q:

①若 $x>1$，则 $x>0$；

②若 $x=4n+1, n\in \mathbf{N}$，则 x 为奇数；

③如果两直线 a,b 无公共点，那么 a,b 为平行或异面直线；

④两直线平行，同旁内角互补.

【分析】 一般地，按照命题的条件和结论的意义，由关键词“若、如果、只要”等引领的均可视为条件，而由关键词“则、那么、就、必”等引领的均可视为结论.

【解答】①条件 $p:x>1$，结论 $q:x>0$；

②条件 p：条件 $p: x=4n+1, n\in \mathbf{N}$，结论 $q:x$ 为奇数；

③条件 p：两直线 a,b 无公共点，结论 $q:a,b$ 为平行或异面直线；

④条件 p：两直线平行，结论 q：同旁内角互补.

【点评】 从逻辑上说，“若 p，则 q”形式的命题是充分条件的假言命题；其常见形式除了“若 p，则 q”外，也可表现为“如果 p，那么 q”、“只要 p，则 q”、“只要 p，就有 q”、“若 p，必 q”等种种形式，这些表述在形式上是等价的. 有时数学中的命题表面上不是“若 p，则 q”的形式，但我们仍然可以通过明确它的条件和结论，把它改写成“若 p，则 q”的形式，如命题④就可以改写成“若两直线平行，则同旁内角互补”.

变身题

2. 指出下列命题中的条件 p 和结论 q：

①三边对应成比例的两个三角形相似；

②两个偶数的和与积仍为偶数；

③奇函数图像关于原点对称；

④若 $k>0$，则 $y=kx$ 为增函数.

焦点三 “若 p，则 q”形式命题的真假判断

如果条件 p 以及结论 q 均为命题，则“若 p，则 q”形式的命题的真假与 p,q 的真假联系如下表所示：

p	q	若 p，则 q
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

本章【焦点导入】中小王对小李的理想的评述“如果太阳从西边出来，你就可以长得和姚明一样高大”中，条件和结论均是错误的，但该评述在逻辑上却是正确的，因为从上表对应关系上可以看到：当 p,q 均假时，命题“若 p，则 q”却是一个真命题.

例3

判断下列命题的真假：

①若 $x>y, y>z$，则 $x>z$；

②若平面 α∥平面 β，直线 $a\perp\alpha$，则 a∥β；

③若函数 $y=\log_a x$ 中 $a>1$，则该函数为增函数；

④若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，$b^2-4ac>0$，则方程有两不等实根.

【分析】 在数学命题的判断中，我们总是以条件真为前提. 如命题①中，条件“$x>y, y>z$”的真假本是无法判断的，但在判断命题①的真假时，我们却假定此条件为真，再以此为前提进行逻辑推理，若能得到所给结论，则命题真，若不能得到所给结论，则命题为假.

【解答】 ①真命题，因为实数大小具有传递性，即由 $x>y, y>z$ 可以推出 $x>z$；

②假命题，因为由条件平面 α∥平面 β，直线 $a\perp\alpha$，可以推出直线 $a\perp$平面 β；

③真命题，对数函数当底大于1时为增函数；

④真命题，由方程根的理论可知.

【点评】 如分析中所述，判断命题的真假时，总是在条件为真的前提下进行推理. 在推理的过程中，我们不能在判断时有意或无意增加条件，比如判断命题“$2>1$”的真假时，我们总是依据大家都一致认可的“数轴上越往右的点，对应的实数值越大”这个性质判断它为真，尽管在这个命题中，这条性质并没有作为条件写出来. 实际上，所有此前定理、公理、性质或有关结论均是该命题的隐含条件. 我们绝不可以说“若 $3<2$，则 $2<1$”是真命题，从而说明2并不总是大于1，有时也可小于1，从而说明“$2>1$”的真假无法判断.

变身题

3. 判断下列命题的真假：

①若集合 $A=\{x|x=4n\pm1,n\in \mathbf{N}\}$，$B=\{y|y=2k-1,k\in \mathbf{N}\}$，则 $A=B$；

②若 x 不能被 4 整除，则 x 也不能被 2 整除；

③若直线 a,b 无公共点，则平行.

焦点四 四种命四

1. 原命题与逆命题

①一般地，对于两个命题，如果说一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们就把这样的两个命题称为互逆命题；其中一个命题叫作原命题，另一个叫作原命题的逆命题.

②互逆命题的形式特征是条件和结论相互换位，即

原命题：若 p，则 q；

逆命题：若 q，则 p.

例 4

已知命题 M：各位上数字之和是 3 的倍数的正整数可以被 9 整除. 试写出命题 M 的逆命题 N，并判断命题 M 和 N 的真假.

【分析】 由原命题写出它的逆命题可采用"换位"的方法，即将原命题的条件和结论的位置互换，故要求能够熟练地区分所给命题(即原命题)的条件和结论.

【解答】 原命题 M 可改写为：

若正整数各位上的数字之和为 3 的倍数，则它可被 9 整除.

故逆命题 N 为：

若正整数可被 9 整除，则其各位上的数字之和为 3 的倍数.

原命题为假命题，如 66，各位上数字之和是 12，可被 3 整除，但该数不能被 9 整除；逆命题为真，因为 9 是 3 的倍数，可被 9 整除的数一定能被 3 整除.

【点评】 原命题为假，逆命题未必假；原命题为真，逆命题也未必真. 两者之间没有必然的联系，应视所给命题进行具体判断.

变身题

4. 已知命题 M：若 $a-\sqrt{2}$ 是有理数，则 a 是无理数. 试写出命题 M 的逆命题 N，并判断命题 M,N 的真假.

2. 原命题与否命题

①概念：一般地，对于两个命题，若其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们就称这样的两个命题为互否命题；如果把其中一个命题叫作原命题，那么另一个命题就叫做原命题的否命题.

②互否命题的形式特征：对原命题的条件和结论同时进行否定(不妨称为"换质")，即：

原命题：若 p，则 q；

否命题：若 $\neg p$，则 $\neg q$.

(注：符号"$\neg$"表示对其后内容进行否定，"$\neg p$"读作"非 p")

例 5

已知命题 M：若 $|f(x)|<a(a>0)$，则 $-a<f(x)<a$. 试写出命题 M 的否命题 N，并判断命题 M,N 的真假.

【分析】 欲写出一个命题的否命题，只需对该命题的条件和结论同时进行否定即换质，但不换位.

【解答】 否命题：若 $|f(x)|\geqslant a(a>0)$，则 $f(x)\geqslant a$ 或 $f(x)\leqslant -a$.

原命题和否命题均为真命题.

【点评】 ①对"$>$"、"$<$"进行否定时，不要忘了加等号；

②原命题与否命题的真假关系也无必然联系.

变身题

5. 已知命题 M：若 $a>1$，则关于 x 的不等式 $ax^2+2x+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 试写出其否命题 N，并判断命题

M,N 的真假.

3. 原命题与逆否命题

①概念：一般地，对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们称这样的两个命题为互为逆否命题；如果把其中的一个命题叫做原命题，另一个命题就叫作原命题的逆否命题.

②互为逆否命题的形式特征：对原命题的条件和结论分别先进行否定再交换位置，或者先交换位置再分别进行否定（既换位又换质）. 即

原命题：若 p，则 q；

逆否命题：若 $\neg q$，则 $\neg p$.

例 6

已知命题 M：若实数 $xy\geqslant 0$，则 $|x+y|=|x|+|y|$. 试写出其逆否命题 N，并判断命题 M 和 N 的真假.

【分析】 由原命题构造其逆否命题的做法是“换位＋换质”，即将原命题的条件和结论先分别进行否定，再交换位置；也可先交换原命题的条件和结论的位置，然后再分别进行否定.

【解答】 逆否命题 N：若 $|x+y|\neq|x|+|y|$，则 $xy<0$. 原命题和它的逆否命题均为真命题.

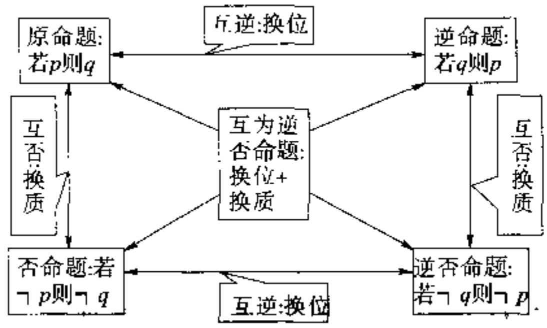
【点评】 对一个命题而言，先换位再换质，或者先换质再换位，均可构造出它的逆否命题；原命题和它的逆否命题的真假性是一致的.

变身题

6. 已知命题 M：$a,b\in\mathbf{R}$，若 $|a|+|b|>1$，则 $|a+b|>1$. 试写出命题 M 的逆否命题 N 并判断命题 M 和 N 的真假.

焦点五 四种命题的相互关系

1. 四种命题的相互关系——构造关系：



2. 四种命题的相互关系——真假关系：

互逆或互否的两个命题之间的真假性没有必然联系；互为逆否的两个命题有相同的真假性.

由同一个命题构造出的这四个命题的真假情形只有四种：四真，四假，两真两假（包括原、逆否两真，逆、否两假，以及原、逆否两假，逆、否两真这样两种情形）.

例 7

已知命题 M：若实数 $a=b$，则 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$. 试写出以命题 M 为原命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这四个命题的真假.

【分析】 由原命题构造逆命题、否命题以及逆否命题，可分别采用“换位”、“换质”、“换位＋换质”的方法进行；

判断真假时只需判断原命题和逆命题的真假，再根据互为逆否命题同真假的性质，对原命题的逆否命题和否命题的真假进行判断.

【解答】 逆命题：若 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，则 $a=b$；

否命题：若 $a\neq b$，则 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>\frac{a^2+b^2}{2}$；

逆否命题：若 $\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{a^2+b^2}{2}$，则 $a\neq b$.

其中，原命题和它的逆否命题为真命题；原命题的逆命题和它的否命题为假命题.

【点评】 仍然要注意"≤"的否定是">"，"="的否定是"≠"。

变身题

7. 已知命题 M：若 $\alpha\neq\beta$，则 $\cos\alpha\neq\cos\beta$，试写出以命题 M 为原命题的逆命题、否命题以及逆否命题，并判断它们的真假.

焦点六　利用互为逆否关系进行命题证明

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性，因而对某命题进行直接证明有困难时，可通过证明它的逆否命题来达到间接证明原命题的目的(是为反证法).

该证法的一般思路是：从否定结论出发，或从结论的反面出发，经过正确的逻辑推理和论证，得出一个与原命题的条件相矛盾的结论(包括和此前定理、公理、结论矛盾)，即完成了原命题的逆否命题的证明，再由原命题和它的逆否命题同真，说明原命题也是真命题.

例 8

利用互为逆否关系证明：若 $a^2+b^2=c^2$，则 a,b,c 不都是奇数.

【分析】 本题若直接证明，需要对 a,b,c 进行分类讨论，因情形太多而比较麻烦，所以改证它的逆否命题：若 a,b,c 都是奇数，则 $a^2+b^2\neq c^2$.

【证明】 若 a,b,c 都是奇数，则 a^2,b^2,c^2 都是奇数，从而 a^2+b^2 为偶数，所以 $a^2+b^2\neq c^2$.

这表明原命题的逆否命题为真命题，所以原命题也是真命题.

【点评】 "不都是"的否定语是"都是".

变身题

8. 利用互为逆否的两个命题的关系证明：若 p,q 为奇数，则方程 $x^2+px+q=0$ 没有整数根.

焦点训练

基础夯实

1. 下列属于命题的是(　　).

A. 空集和非空集合

B. $a>0$

C. 若 $a>1$，难道还推不出 $a>0$ 吗?

D. 若 $a>1$ 成立，则 $a\geq1$ 也成立

2. 下列属于假命题的是(　　).

A. 若 $abc=0$，则 a,b,c 中至少有一个为零

B. $x<-1$

C. $x^2+y^2\geq0$

D. 长方形的对角线互相垂直平分

3. 命题"若 $A=B$，则 $A\subseteq B$"与其逆命题、否命题和逆否命题共四个命题中，真命题的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 在命题"若 p，则 q"中，若"$p\Rightarrow q$"成立，则命题"若 p，则 q"为________(从"真"、"假"中选填).

5. 命题"不经过原点的直线都可以用 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示"的逆否命题是________________.该命题为________(从"真"、"假"中选填).

6. 试将下列语句改写成"若 p，则 q"的形式并判断真假：

(1)空集是任何非空集合的真子集；

(2)$m>0$ 时，关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根.

能力提升

7. 下列属于假命题的是（　　）.

A. 若$|a+b|>1$，则$|a|+|b|>1$

B. $\log_3 4>\log_4 5$

C. 若$ab>ac$，则$b>c$

D. 若$f(x)=x^2+2x+3$，则$f(x)$的最小值为 2

8. 若命题"函数$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$的定义域是 **R**"为真命题，试求$a$的取值范围.

综合探究

9. 若$m:y\geqslant x$，$n:x+y\leqslant 1$，$p:y\geqslant 0$都是真的，试求$2x-y$的最值.

§2　充分条件与必要条件

自主预习

1. 一般地，"若p，则q"为真命题，则记作____________，并且说：p是q的________条件，q是p的________________条件.

2. 已知$p:x>1$，$q:x>2$，则p是q的什么条件？q是p的什么条件？

逐点扫描

焦点一　充分条件与必要条件

1. 概念：一般地，"若p，则q"为真命题，是指以p为条件，经过正确的推理论证，可以得出结论q. 此时我们可以说，由p可以推出q. 记作：$p\Rightarrow q$. 一般读作：p蕴涵q. 并且称：p是q的充分条件，q是p的必要条件.

2. "充分条件"和"必要条件"这两个概念总是同时出现的，在真命题"若p，则q"中，p是q的充分条件，同时q是p的必要条件.

例 1

下列命题中，哪些命题中的p是q的充分条件：

①若$p:b^2-4ac>0$，则q：关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有两不相等的实数根；

②若$p:a>b>0,c\neq 0$，则$q:ac>bc$；

③若p：直线$a\perp b$，则q：直线a,b有且只有一个公共点；

④若p：四边形$ABCD$为圆内接四边形，则$q:AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$.

【分析】 只需判断命题是否为真命题，若命题是真命题，则条件p是结论q的充分条件.

【解答】

①真命题，所以p是q的充分条件；

②假命题，所以p不是q的充分条件；

③假命题，所以p不是q的充分条件；

④真命题，所以p是q的充分条件.

【点评】 在命题①④中，p是q的充分条件，而且q是p的必要条件.

变身题

1. 在下列"若p，则q"形式的命题中，哪些命题中的q是p的充分条件？

①若p：$\triangle ABC$中，$\angle A>\angle B$，则$q:a>b$；

②若p：关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$

的解集为$\mathbf{R}$,则q:$a>0$且$\Delta<0$;

③若p:$x=1$,则q:$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$;

④若p:$x^2-4<0$,则q:$-1<x<1$.

变身题

2. 已知命题M为"若p:$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$,则$q$:函数$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$".试判断命题中的$p$是$q$的什么条件.

焦点二 充分不必要条件和必要不充分条件

一般地,若命题"若p,则q"为真命题,且其逆命题"若q,则p"为假命题,即:$p\Rightarrow q$,而$q\nRightarrow p$,则称p是q的充分不必要条件,q是p的必要不充分条件.如果原命题和它的逆命题均为假命题,则称p是q的既不充分也不必要条件(此时,q也是p的既不充分也不必要条件).

例2

(2006全国Ⅰ卷)设$a,b\in\mathbf{R}$,已知命题p:$a=b$,命题q:$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$,则$p$是$q$成立的( ).

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【分析】 解此类题须同时考虑原命题及其逆命题的真假;

若原、逆命题均为真命题,则p是q的充分条件,也是q的必要条件;

若原、逆命题均为假命题,则p是q的既不充分也不必要条件;

若原命题为真、逆命题为假命题,则p是q的充分不必要条件;

若原命题为假、逆命题为真命题,则p是q的必要不充分条件.

【解答】 因为$p\Rightarrow q$,而$q\nRightarrow p$,所以p是q的充分不必要条件,选B.

【点评】 须准确判断命题"若p,则q"及其逆命题"若q,则p"这两个命题的真假.

焦点三 充要条件

1. 概念:一般地,对于命题"若p,则q",如果既有$p\Rightarrow q$,而且又有$q\Rightarrow p$,则记作:$p\Leftrightarrow q$.

此时,我们说:p是q的充分必要条件,简称充要条件,也可称为"p,q等价"或"q当且仅当p".

2. 显然,如果p是q的充要条件,那么q也是p的充要条件,即若$p\Leftrightarrow q$,那么p,q互为充要条件.

例3

下列哪些命题中的p是q的充要条件?

①若p:函数$y=x^2-2x+3$是增函数,则q:$x\geqslant1$;

②若p:函数$y=\sin x$的值域为$[0,1]$,则q:$x\in[0,\pi]$;

③若p:$a=1$,则q:函数$y=\cos^2ax-\sin^2ax$的最小正周期为π.

【分析】 只需考察"$p\Rightarrow q$"和"$q\Rightarrow p$"是否同时成立;一旦同时成立,则互为充要条件.

【解答】

①因为$p\Leftrightarrow q$,所以p是q的充要条件;

②因为$p\nRightarrow q$,但$q\Rightarrow p$,所以p是q的必要而不充分条件;

③因为$p\Rightarrow q$,但$q\nRightarrow p$,所以p是q的充分而不必要条件;

综上可知,只有命题①中的p才是q的充要条件.

【点评】 结合前述内容可知:p,q的关系及条件类型对应如下:

①$p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$:p是q的充分而不必要条件,同时,q是p的必要而不充分条件;

②$p\nRightarrow q$，$q\Rightarrow p$：p 是 q 的必要而不充分条件，同时，q 是 p 的充分而不必要条件；

③$p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$：p，q 互为充要条件；

④$p\nRightarrow q$，$q\nRightarrow p$：p 是 q 的既不充分也不必要条件，同时，q 也是 p 的既不充分也不必要条件.

变身题

3. 判断正误：

①在$\triangle ABC$中，$B=60°$是三个内角 A,B,C 成等差数列的充要条件；

②$\lg x>\lg y$ 是$\sqrt{x}>\sqrt{y}$的充要条件；

③$ab\leqslant 0$ 是$|a-b|\leqslant|a|-|b|$取等号的充要条件；

④两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$.

焦点四 充要性的证明与充要条件的探究

1. 充要性的证明：欲证 p 是 q 的充要条件，须分别证明条件的充分性（即 $p\Rightarrow q$）和条件的必要性（即 $q\Rightarrow p$）成立；

2. 充要条件的探究：欲探究结论 q 成立的充要条件，通常的做法是先探求 q 成立的必要条件，再以此必要条件为基础探求充分条件；如果在此过程中，一直保持恒等变形或等价推理，则所探求条件即为充要条件.

例4

设 $x,y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

【分析】 本题也可叙述为：

设 $x,y\in\mathbf{R}$，p：$xy\geqslant 0$，q：$|x+y|=|x|+|y|$.

求证：p 是 q 成立的充要条件.

因此，在此命题中，充分性是指由 $xy\geqslant 0$ 能推导出 $|x+y|=|x|+|y|$，必要性是指由 $|x+y|=|x|+|y|$ 能推导出 $xy\geqslant 0$.

【证明】 先证充分性. 因为 $xy\geqslant 0$，则可分下列两种情况：

①若 $xy=0$，则 $x=0,y\neq 0$，或 $x\neq 0,y=0$，或 $x=y=0$，此时均有 $|x+y|=|x|+|y|$；

②若 $xy>0$，则 $x>0,y>0$，或 $x<0,y<0$，

当 $x>0,y>0$ 时：$|x+y|=x+y=|x|+|y|$；

当 $x<0,y<0$ 时：$|x+y|=-(x+y)=(-x)+(-y)=|x|+|y|$.

总之，当 $xy\geqslant 0$ 时总有 $|x+y|=|x|+|y|$，所以充分性成立.

下证必要性. 因为 $|x+y|=|x|+|y|$，所以 $(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$，故 $|xy|=xy$，所以 $xy\geqslant 0$，从而必要性也成立.

综上所述，原命题为真命题.

【点评】

①此种题型中的充分性和必要性均对条件 p 而言.

即若 $p\Rightarrow q$：则称条件 p 是 q 的充分条件，充分性成立；

若 $q\Rightarrow p$：则称条件 p 是 q 的必要条件，必要性成立；

②此种题型的常见叙述形式是“求证：M 的充要条件是 N”，其“若 p，则 q”形式是“若 N，则 M”.

变身题

4.（2004 年湖南）设集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是（　　）.

A. $m>-1,n<5$　　B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$　　D. $m<-1,n>5$

焦点训练

基础演练

1. 用符号“$\Rightarrow$”、“$\Leftarrow$”或“$\Leftrightarrow$”填空：

①$m>1,n>-1$ ________ $m+n>0$；

②$y=\sin x(x\in(-\pi,\pi))$为增函数 ________ $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2. 已知 P：$\triangle ABC$ 为锐角三角形，Q：$\sin A>\cos B$.