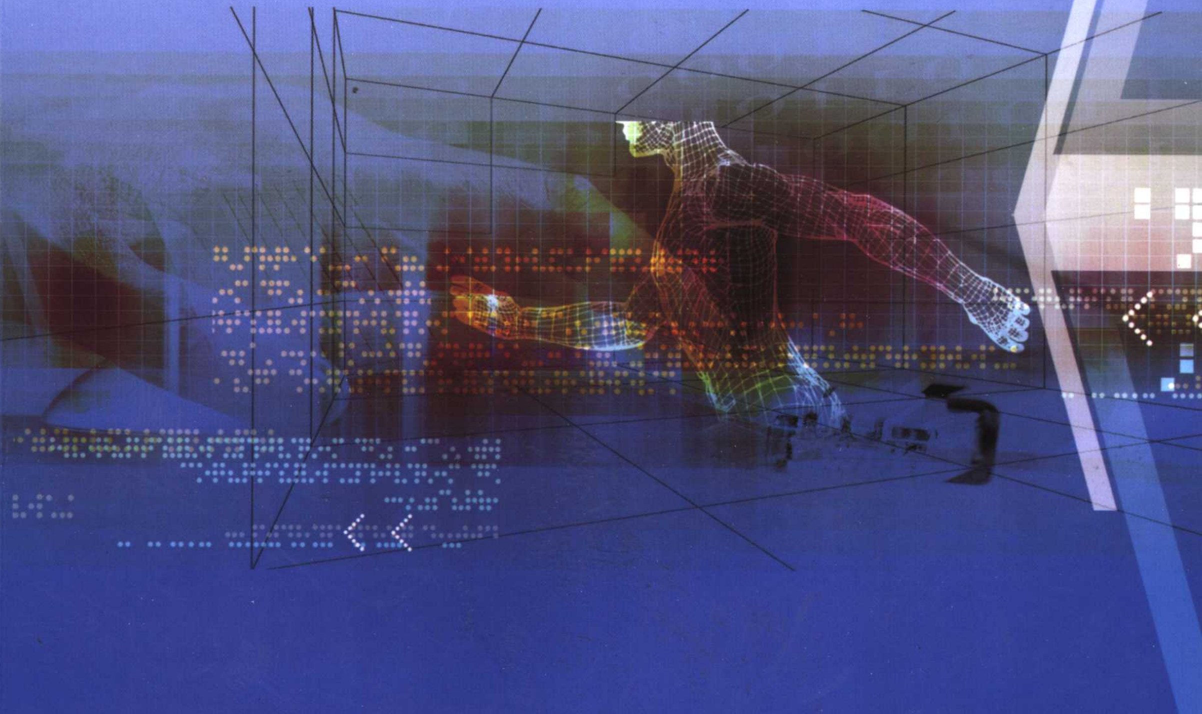
新兴

高职高专系列规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编◎戴振强



中国科学技术大学出版社

高 等 数 学

GAODENG SHUXUE

主　编：戴振强

编　者：（以章节顺序排列）

叶春辉　邓树民

叶红卫　戴振强

潘　恋　刘亚国

钟薛涛　黄　华

匡　华　盛建洪

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/戴振强主编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2007.6
ISBN 978-7-312-02075-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. 戴… Ⅲ. 高等数学—高等学校:技术学校—教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 064037 号

组稿编辑:职教部　　文字编辑:陈隆隆

出版	中国科学技术大学出版社 安徽省合肥市金寨路 96 号,230026 http://press. ustc. edu. cn	**开本**	700 mm×1000 mm　1/16
		印张	10.5
		字数	190 千
印刷	合肥学苑印务股份有限公司	**版次**	2007 年 6 月第 1 版
发行	中国科学技术大学出版社	**印次**	2007 年 6 月第 1 次印刷
经销	全国新华书店	**定价**	16.00 元

前　言

本书是作者根据多年的高职高专数学教学经验，结合教育部《高职高专教育数学课程的基本要求》和《高职高专教育人才培养目标及规格》，以及高职高专教育现状与学生的实际学习需要编写出来的. 本书注重培养学生运用数学知识解决工程及管理问题以及把数学问题转化为数学模型的能力.

本书在不影响数学的系统性的基础上，在取材及深度上力求尽量适合高职高专学生学习，具体有如下几个特点：

(1) 重视数学知识的应用. 本书案例(或例题)大多是贴近生活的实际例子，复杂一些的例子则作为数学建模的典型例题讲解，使学生了解数学建模的过程和简单方法，同时提高学生的学习兴趣.

(2) 删繁就简. 每部分内容都由基本概念、基本法则、运算公式、概念与法则的应用以及习题组成. 对一些繁难的内容采用描述性的方法简化，省略掉一些繁难的证明.

(3) 适合高职高专学生的认知习惯和能力. 内容编排上多由具体的案例入手归纳出法则、公式，再举出运用该法则、公式的例子和练习题. 符合由具体到抽象，再由抽象到具体的认知规律，便于学生掌握数学知识.

(4) 内容有较强的可读性. 为了便于学生理解概念、法则，本书尽量借助图形、物理意义和生产生活实践来进行解释.

本书分为 5 章，分别为：函数、极限与连续；微分及其应用；积分及其应用；概率统计；线性代数.

本书编写由河源职业技术学院的教师完成，第 1 章由叶春辉编写，第 2 章由邓树民、叶红卫编写，第 3 章由戴振强、潘恋、刘亚国编写，第 4 章由钟薛涛编写，第 5 章由黄华、匡华、盛建洪编写. 全书由戴振强进行框架结构安排、统稿与定稿. 河源职业技术学院刘安华、李正吾两位教授对本书的编写提出了许多宝贵的意见和建议，在此向他们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，本书难免有不足之处，敬请读者指正.

编　者

2007 年 1 月

目　录

第1章 函数、极限与连续

学习目标

1. 复习函数知识,能建立实际问题中的函数关系式.
2. 理解函数极限与连续的概念.
3. 会用极限的有理运算法则以及两个重要极限熟练地计算极限.
4. 会求函数的间断点并判断其类型.
5. 会用函数和极限的知识解决一些实际问题.

现实世界中,存在着各种各样不停变化着的量,它们之间相互依存、相互联系.函数就是对各种变量之间的相互依存关系的一种抽象,是微积分研究的基本对象,是高等数学中最重要的概念之一.

函数的概念在17世纪之前一直与公式紧密相连,到了1837年,德国数学家狄利克雷(Peter Dirichlet,1805 ~ 1859)抽象出了较为合理的至今仍为人们普遍接受的函数概念.

函数极限是一个最基本、最重要的概念.19世纪以前人们用朴素的极限思想计算了圆的面积、体积等.19世纪以后,柯西(Cauchy,1789 ~ 1851)以物体运动为背景,结合几何直观,引入了极限概念.极限概念奠定了微积分的基础,以后的微分和积分都将借助于极限来描述.本章重点讨论极限与连续的基本概念、基本性质和基本运算,并介绍它们的一些实际应用.

1.1 函　　数

1.1.1 函数的概念

【案例1.1】 (气温变动)某气象站测得早上6时至晚上22时的气温如表

1.1 所示.

表 1.1

时间(h)	6	8	10	12	14	16	18	20	22
温度(℃)	12.1	14.3	17	18.5	20.5	16.8	16.3	15.2	12

【案例 1.2】 (心电图)仪器记录某人的心电图如图 1.1 所示.

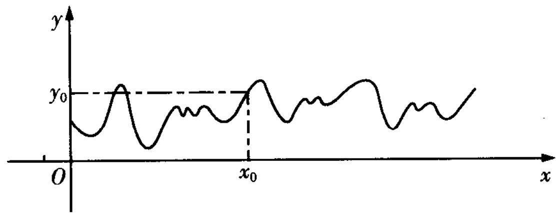


图 1.1

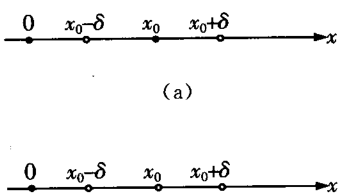
【案例 1.3】 (自由落体)在自由落体运动中,物体下落的距离 s 随下落的时间 t 的变化而变化,下落的距离 s 与时间 t 的关系可表示为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 为重力加速度,$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$.

在研究事物内部、事物与事物各因素间的关系时,我们常常通过对客观事物的分析,建立各因素之间的关系式,这也是我们揭示事物发展规律,对事物进行分析和研究的重要基础. 由上述几个具体例子,我们给出函数的概念.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则总有惟一的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x), x \in A$. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量;x 的取值范围 A 称为函数 f 的定义域,与 x 的值相对应的 y 的值称为函数值. 函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数的值域,记作 $W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$.



(a)

(b)

图 1.2

人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域,其中有一种不等式,以后会常遇到:我们把满足不等式 $|x - x_0| < \delta$(其中 δ 为大于 0 的常数)的一切 x 的解集,称为 x_0 的 δ- 邻域,记作 $U(x_0, \delta)$. 其几何意义为:以 x_0 为中心,δ 为半径的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 称为点 x_0 的去心邻域,记作 $U(\widehat{x_0}, \delta)$,如图 1.2 所示.

【例 1.1】 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域.

解 函数的定义域是满足不等式

$$x^2-2x-3>0$$

的 x 的集合，解此不等式，得其定义域为 $x>3$ 或 $x<-1$，即 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

【例 1.2】 确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解 函数的定义域是满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体. 解此不等式组，得其定义域 $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$.

1.1.2 函数的表示法

函数常用的表示法有三种：解析法、表格法和图示法.

(1) 解析法

用数学式表示函数的方法，叫解析法. 如，$y=f(x)$，其中 y 是因变量，f 为对应法则，x 是自变量.

解析法的优点是便于数学上的分析和计算，本书主要讨论用解析式表示的函数，如案例 1.3 表示自由落体运动的路程与时间的函数关系式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$.

(2) 表格法

用表格形式表示函数的方法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如案例 1.1 气象站测量的不同时间的温度.

(3) 图示法

以图形表示函数的方法叫做函数的图示法，也称图形法，其优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势，如案例 1.2 某人的心电图记录.

1.1.3 分段函数

【案例 1.4】 矩形波的函数表示. 图 1.3 为一个矩形波的图形，它在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 内的解析式为：

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\leqslant x<0)\\ A & (0\leqslant x<\pi)\end{cases}.$$

这个函数的特点是其由多个表达式构成，在工程实践及日常生活中常常会遇到此类函数.

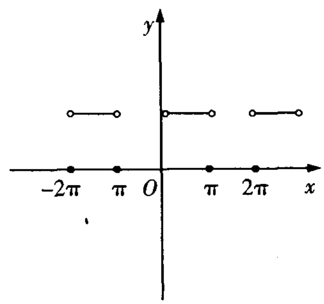


图 1.3

定义 1.2　在不同的定义域上用不同的函数表达式表示的函数称为分段函数.

下面介绍几种特殊的分段函数.

(1) 绝对值函数(图 1.4)

$$y = |x| = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}.$$

(2) 符号函数(图 1.5)

$$y = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}.$$

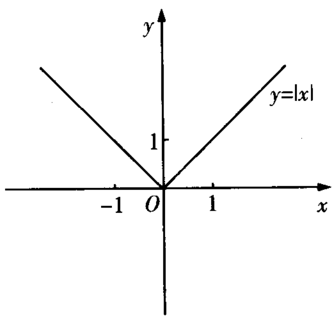


图 1.4

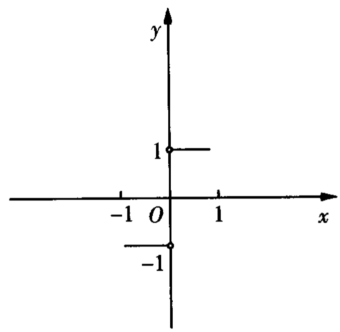


图 1.5

(3) 特征函数

$$y = x_A = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

其中 A 为数集,此函数常用于计数统计.

(4) 取整函数(图 1.6)

记为 $y = [x]$,即若 $n \leqslant x \leqslant n+1$,则 $[x] = n$,其中 n 为整数.因此其数学表达式为:

$$y = \begin{cases} \cdots & (\cdots) \\ -2 & (-2 \leqslant x < -1) \\ -1 & (-1 \leqslant x < 0) \\ 0 & (0 \leqslant x < 1) \\ 1 & (1 \leqslant x < 2) \\ 2 & (2 \leqslant x < 3) \\ \cdots & (\cdots) \end{cases}.$$

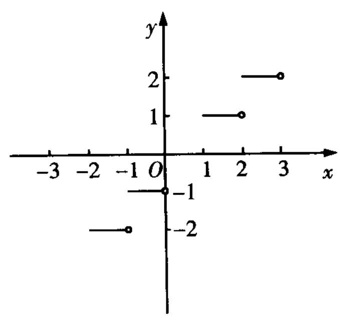


图 1.6

【例 1.3】　一旅馆有 200 间客房,如果定价不

超过 40 元 / 间，则全部出租；若每间定价高出 1 元，则会少出租 4 间. 设房间出租后的服务成本费为 8 元，试建立旅馆一天的利润与房价间的函数关系.

解 设旅馆的房价为 x 元 / 间，旅馆一天的利润为 y 元.

若 $x \leqslant 40$，则旅馆出租 200 间，利润为：

$$y = 200(x - 8).$$

若 $x > 40$，则旅馆少出租 $4(x - 40)$ 间，出租了 $200 - 4(x - 40)$ 间，利润为

$$y = [200 - 4(x - 40)](x - 8).$$

综上分析，旅馆利润与房价之间的函数为

$$y = \begin{cases} 200(x - 8) & (x \leqslant 40) \\ [200 - 4(x - 40)](x - 8) & (x > 40) \end{cases}.$$

1.1.4 初等函数

【案例 1.5】 (生产利润) 某玩具厂生产 x 件玩具将花费 $400 + 5\sqrt{x(x-4)}$ 元. 如果每件玩具卖 48 元，那么该厂生产 x 件玩具获得的净利润是多少？

解 设净利润为 y，则

$$y = 48x - 400 - 5\sqrt{x(x-4)}.$$

此函数为一个表达式，它是由一些简单函数经过有限次的四则运算或有限次的复合而得到的.

1. 基本初等函数

基本初等函数分为以下 5 类函数：

(1) 幂函数

$y = x^u$　　(u 是常数).

(2) 指数函数

$y = a^x$　　($a > 0$ 且 $a \neq 1$)　　$x \in (-\infty, +\infty)$.

(3) 对数函数

$y = \log a^x$　　($a > 0$ 且 $a \neq 1$)　　$x \in (0, +\infty)$.

(4) 三角函数

正弦函数

$y = \sin x$　　$x \in (-\infty, +\infty)$　　$y \in [-1, 1]$；

余弦函数

$y = \cos x$　　$x \in (-\infty, +\infty)$　　$y \in [-1, 1]$；

正切函数

$y = \tan x$　　$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$　　$y \in (-\infty, +\infty)$；

余切函数

$y=\cot x \qquad x\neq k\pi, k\in \mathbf{Z} \qquad y\in(-\infty,+\infty).$

(5) 反三角函数

反正弦函数

$y=\arcsin x \qquad x\in[-1,1] \qquad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];$

反余弦函数

$y=\arccos x \qquad x\in[-1,1] \qquad y\in[0,\pi];$

反正切函数

$y=\arctan x \qquad x\in(-\infty,\infty) \qquad y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);$

反余切函数

$y=\operatorname{arccot} x \qquad x\in(-\infty,\infty) \qquad y\in(0,\pi).$

2. 复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域或其中一部分取值时，$\varphi(x)$ 的值均在 $y=f(u)$ 的定义域内，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

3. 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数. 如 $y=\ln(\sin 2x)+x^2$，$y=e^{\sqrt{\arctan x}}+\cos x$ 等都是初等函数，而 $y=|x|$ 不是初等函数.

【例 1.4】 指出 $y=(3x+5)^{10}$，$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由哪些函数复合而成.

解 $y=(3x+5)^{10}$ 是由 $y=u^{10}$ 和 $u=3x+5$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

掌握复合函数的“复合”及“分解”过程，对于后面的学习有很大帮助，读者对此应予以重视.

1.1.5 函数的基本性质

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，其性质如下：

1. 有界性

设数集 $X\subset A$，存在正常数 M，任意 $x\in\mathbf{Z}$，相应的函数值满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果不存在这样的正常数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上

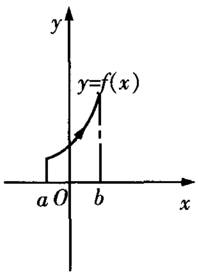
无界.

如果 $f(x)$ 在 A 上有界,则称 $f(x)$ 为有界函数. 例如,$y=\sin x$ 是有界函数;$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,但它在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 是有界的. 因此,我们说一个函数有界或者是无界的同时应指出其自变量的相应范围.

2. 单调性

设区间 $I\subset D$,任意 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;如果任意 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

在区间 I 上单调增加或单调减少的函数统称为区间 I 上的单调函数. 从几何直观上看,区间 I 上单调增加(减少)的函数,其图像自左向右是上升(下降)的(图 1.7).



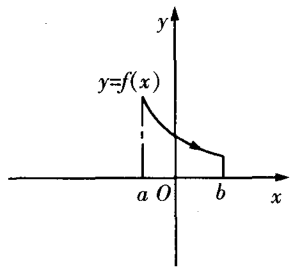


图 1.7

3. 奇偶性

设 D 关于原点对称,任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数;任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 周期性

设存在一个不为零的常数 T,任意 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期. 当周期函数存在最小正周期时,通常所说的周期指的是最小正周期.

周期函数若以 $T(>0)$ 为周期,则在每个长度为 T 的区间 $[nT,(n+1)T]$ $(n\in\mathbf{Z})$ 上函数的图像是相同的.

【例 1.5】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的特性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1) 任意 $x\in\mathbf{R}$, $|f(x)|=\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|\leqslant\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$.

(2) 任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$.

(3) 任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0.$$

因此, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界, 单调增加的奇函数, $f(x)$ 不具有周期性.

1.1.6 建立函数关系的实例

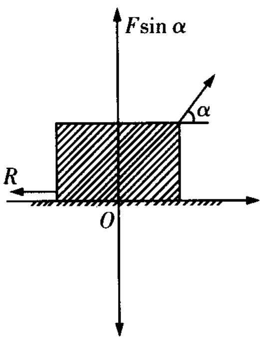


图 1.8

【例 1.6】 已知一物体的质量为 m, 它与地面的摩擦系数为 μ, 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F, 要使物体从静止状态沿水平方向移动(图 1.8), 求拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

解 当水平拉力 $F\cos\alpha$ 与摩擦力 R 平衡时, 物体开始移动, 而摩擦力

$$R=\mu(mg-F\sin\alpha),$$

所以

$$F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},\quad 0°<\alpha<90°.$$

【例 1.7】 某人在公园里一环湖车道上进行自行车运动, 出发 x min 时与走过的路程 y m 的关系式为: $y=ax^2+bx$. 他最初用了 3 分钟骑完第 1 圈, 接下去用了 2 分钟骑完第 2 圈和第 3 圈, 一共骑了 4 圈. 设圆形车道的周长为 360 m.

(1) 求出路程 y 与时间 x 的函数关系式;

(2) 求骑第 3 圈所用的时间(结果精确到 0.01).

解 (1) 依题意, 得

$$\begin{cases}9a+3b=360\ (\mathrm{m})\\25a+5b=1\,080\ (\mathrm{m})\end{cases}.$$

解得 $a=48, b=-24$.

又由 $48x^2-24x=4\times 360$,

得 $x\approx 5.37\ (\mathrm{min})$.

故路程与时间得函数关系式为

$$y=48x^2-24x,\quad 0\leqslant x\leqslant 5.37.$$

(2) 设骑完 2 圈一共所用的时间为 x min, 则

$$48x^2-24x=2\times 360.$$

解得 $x\approx 4.13\ (\mathrm{min})$.

因此 $(5-4.13)\times 60=52.2\ (\mathrm{s})$.

故跑第三圈所用时间为 52.2 s.

【例 1.8】 北京到某地的行李费，当行李不超过 50 kg 时，按基本运费 0.3 元 /kg计算；当超过50 kg时，超过部分按0.45元 /kg收费，试求北京到该地的行李费 y 元与行李重量 x kg 之间的函数关系.

解 $0 \leqslant x \leqslant 50$ 时，$y = 0.3x$；
$x > 50$ 时，

$$y = 0.3 \times 50 + 0.45(x - 50) = 0.45x - 7.5.$$

所以

$$y = \begin{cases} 0.3x & (0 \leqslant x \leqslant 50) \\ 0.45x - 7.5 & (x > 50) \end{cases}.$$

习题 1.1

1. 指出下列各题中的哪些函数是同一函数.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$ 与 $y(x) = x - 1$；

(2) $f(x) = \lg x^3$ 与 $g(x) = 3\lg x$；

(3) $f(x) = \lg x^{10}$ 与 $g(x) = 10\lg x$；

(4) $f(x) = (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x) = \sin x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{3x - x^2}$；

(2) $y = \sqrt{x - 2} + \dfrac{1}{x - 3} + \lg(5 - x)$；

(3) $y = \lg(5 - x) + \arcsin\dfrac{x - 1}{6}$；

(4) $y = \begin{cases} x & (-1 \leqslant x < 0) \\ 1 + x & (x > 0) \end{cases}$；

(5) $f(\lg x)$，其中 $f(u)$ 的定义域为$(0,1)$.

3. 已知 $f(x + 1) = x^2 - x + 1$，求 $f(x)$.

4. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$；

(2) $y = \dfrac{a^x - 1}{a^x - 1}$；

(3) $y = \dfrac{1}{2}(10^x + 10^{-x})$；

(4) $y = \sin x + \cos x$.